Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Райгородский, Проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера и реализация случайного графа в пространстве, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 195–196

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1696>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:27:55

Проблема Нелсона–Эрдёша–Хадвигера и реализация случайного графа в пространстве

А. М. Райгородский

1. Введение. В настоящей работе речь пойдет об известной проблеме Нелсона–Эрдёша–Хадвигера, состоящей в отыскании хроматического числа d -мерного евклидова пространства, т.е. величины $\chi(\mathbb{R}^d)$, равной минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки $\mathbb{R}^d$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния 1. Напомним, что проблема не решена даже в случае плоскости, и к настоящему времени известны лишь такие, например, результаты: $4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$ (нижняя оценка принадлежит братьям Мозерам [1]; верхняя – Г. Хадвигеру [2]), $6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$ (нижняя оценка недавно получена О. Нечуштаном [3]; верхняя – Д. Кулсоном [4]), $(1.239 \dots + o(1))^d \leq \chi(\mathbb{R}^d) \leq (3 + o(1))^d$ (нижняя оценка доказана автором [5]; верхняя – Д. Ларманом и К. А. Роджерсом [6]). Следует отметить, что $\chi(\mathbb{R}^d)$ – это, на самом деле, хроматическое число бесконечного графа $\mathcal{G}_d = (\mathcal{V}_d, \mathcal{E}_d)$ с $\mathcal{V}_d = \mathbb{R}^d$ и $\mathcal{E}_d = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{V}_d \times \mathcal{V}_d : |\mathbf{x} - \mathbf{y}| = 1\}$. Понятно, что $\chi(\mathbb{R}^d) \geq \chi(G)$ для любого подграфа G графа $\mathcal{G}_d$. Возникает разумный вопрос: как “часто” в графе $\mathcal{G}_d$ встречаются подграфы с “большим” хроматическим числом? Слова “часто” и “большой” взяты в кавычки не случайно, ведь априори у нас нет никакого представления ни о частоте появления упомянутых объектов, ни о том, что такое большое хроматическое число. В последнем случае все просто: если на данном этапе наилучшей остается оценка вида $\chi(\mathbb{R}^d) \geq \chi_d$, то χ_d – это то, что нам нужно. Графов с большим хроматическим числом мы не знаем, а стало быть, всякий граф $G \subset \mathcal{G}_d$ с $\chi(G) = \chi_d$ имеет большое хроматическое число. Что же касается частоты, то в своей работе [7] автор предложил естественный способ ее задания в терминах случайного графа в модели $G(n, p)$. Имеется в виду вероятностное пространство $G(n, p) = (\Omega, \mathcal{B}, P)$, где Ω – совокупность всех $2^{C_n^2}$ графов $G = (V, E)$ на фиксированных n вершинах V , причем вероятность графа $P(G)$ вычисляется в соответствии со “схемой серий”, в которой “вероятность успеха” равна $p = p(n)$: $P(G) = p^{|E|}(1 - p)^{C_n^2 - |E|}$. Иначе говоря, каждое ребро принадлежит графу с вероятностью p независимо от остальных. Итак, в [7] введена и мотивирована величина $t(d, n, p)$, определяемая как максимальное $k = k(d, n, p)$, при котором вероятность следующего свойства Q_k случайного графа G в пространстве $G(n, p)$ (т.е. вероятность множества графов, обладающих свойством Q_k) больше $\frac{1}{2}$: в графе G найдется индуцированный связный подграф H , который можно реализовать как подграф в $\mathcal{G}_d$, имеющий k вершин и $\chi(H) \geq \chi_d$.

В статье [7] приведены некоторые условия несуществования величины $t(d, n, p)$, а также указаны различные нетривиальные условные оценки, которые для нее выполнены. В частности, имеет место

ТЕОРЕМА 1. Пусть χ'_d – это самая сильная из известных верхних оценок на $\chi(\mathbb{R}^d)$, а $l = l(n, p)$ – наименьшее число такое, что $C_n^l(1 - p)^{C_n^l} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда, если $t(d, n, p)$ существует, то оно не превосходит $\chi'_d l$.

Ниже мы расскажем о новых нижних и верхних (условных и безусловных) оценках для $t(d, n, p)$. Заметим лишь, что с историей проблемы можно ознакомиться по статье [8].

2. Формулировки результатов и некоторые замечания. Имеет место следующая теорема.

Работа выполнена при поддержке гранта НШ-136.2003.1, гранта Президента РФ МК-3130.2004.1 и гранта INTAS 03-51-5070.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $m = m(n)$ – это некоторая целочисленная функция, удовлетворяющая условиям $m \in \{1, \dots, n\}$, $m \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$. Для каждого m определим $k_0 = k_0(m)$ из неравенств $C_m^{k_0} 2^{-C_{k_0}^2} < 1 < C_m^{k_0-1} 2^{-C_{k_0-1}^2}$ и положим $k_1 = k_0 - 4$. Допустим, что $C_m^n e^{-\frac{m^2}{2k_1^4}(1+o(1))} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ и что $k_1(m) \geq d + 2 = d(n) + 2$. Тогда, если $t(d, n, 0.5)$ существует, то $t(d, n, 0.5) \leq m$.

Теорема 2 доказывается с помощью мартингалльных неравенств в теории случайных графов (см. [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Нетрудно видеть, что при растущем $d = d(n)$ и $p = 0.5$ теорема 1 дает условную оценку $t(d, n, 0.5) \leq (3 + o(1))^d \log_2 n$, которая при $d \approx \log_3 \frac{n}{\log_2 n}$ теряет смысл. Посмотрим на теорему 2. Ясно, что $k_1 \sim 2 \log_2 m$. Стало быть, условие $C_m^n e^{-\frac{m^2}{2k_1^4}(1+o(1))} \rightarrow 0$ означает, что $m \gg (\log n)(\log \log n)^4$, откуда $k_1 \gg \log \log n$. Таким образом, при $d \ll \log \log n$ теорема 2 влечет условное неравенство $t(d, n, 0.5) \ll (\log n)(\log \log n)^4$. Очевидно, что при $d \ll \log \log \log n$ прежняя оценка лучше, иначе – значительно хуже. Например, при $d \asymp \log \log n$ теорема 2 все еще сводится к $t(d, n, 0.5) \ll (\log n)(\log \log n)^4$, тогда как теорема 1 дает только оценку вида $t(d, n, 0.5) \ll (\log n)^\gamma$, $\gamma > 1$. Далее, максимальное d , при котором работает теорема 2, – это, конечно, $k_1(n) - 2 \sim 2 \log_2 n$. Понятно, что и при $\log \log n \ll d \ll \log n$ теорема 2 гораздо лучше теоремы 1: ведь в ней, по сути, дается оценка $t(d, n, 0.5) \leq (\sqrt{2} + o(1))^d$.

Теперь нижние оценки. Верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $d = d(n)$ любое, $\omega(n) \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $p \geq \omega(n)n^{-7/11}$. Тогда $t(d, n, p)$ существует и ограничено снизу числом 7.

Пафос теоремы 3 не в величине оценки, а в ее безусловности. В частности, если $p = 0.5$, а d удовлетворяет условиям теоремы 2, то оценка из теоремы 2 тоже оказывается безусловной, и, следовательно, $t(d, n, 0.5)$ действительно лежит в найденных нами пределах. Оценку же из теоремы 3 вполне можно улучшить – по крайней мере при некоторых d .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $a_0 = 0.36 \dots$, $b_0 = 0.06 \dots$ – константы из [5], введенные там для получения оценки $\chi(\mathbb{R}^d) \geq (1.239 \dots + o(1))^d = \chi_d$, $d \geq d_0$. Положим $k = C_d^{[a_0 d]} C_{[a_0 d]}^{[b_0 d]} = (\rho + o(1))^d$, $\rho > 1$. Если $k = o(\sqrt{\log n})$, то $t(d, n, 0.5)$ существует и ограничено снизу величиной k .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В отличие от универсальной теоремы 3, теорема 4 применима лишь при $p = 0.5$ и $d \ll \log \log n$. Но даже при таких d мы вкупе с теоремой 2 получаем весьма точный результат. Скажем, если $d \asymp \log \log n$, то $\log t(d, n, 0.5) \asymp \log \log n$. При этом оценка безусловна.

Список литературы

- [1] L. Moser, W. Moser, *Canad. Math. Bull.*, 4:2 (1961), 187–189. [2] Н. Hadwiger, *Elem. Math.*, 16 (1961), 102–103. [3] О. Nechushtan, *Discrete Math.*, 256:1–2 (2002), 499–507. [4] D. Coulson, *Discrete Math.*, 256:1–2 (2002), 83–90. [5] А. М. Райгородский, *УМН*, 55:2 (2000), 147–148. [6] D. G. Larman, C. A. Rogers, *Mathematika*, 19 (1972), 1–24. [7] А. М. Райгородский, *Докл. РАН*, 403:2 (2005), 169–171. [8] А. М. Райгородский, *УМН*, 56:1 (2001), 107–146. [9] B. Bollobás, *Random graphs*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

А. М. Райгородский (А. М. Raigorodskii)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: araigor@avangard.ru

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией
01.12.2005