Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Степанов, Заметка о двойственном комплексе разрешения особенностей, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 12:33:58

Заметка о двойственном комплексе разрешения особенностей

Д. А. Степанов

1. Построение. Двойственный комплекс разрешения особенностей обобщает в высшие размерности понятие графа разрешения двумерной особенности. Пусть (X, S) – росток особенности алгебраического многообразия над полем характеристики 0, $\dim X \geq 2$. Рассмотрим разрешение $\pi: (Y, E) \rightarrow (X, S)$ особенностей многообразия X , исключительное множество E которого – дивизор с простыми нормальными пересечениями. Такое разрешение существует по теореме Хиронаки [1]; следуя терминологии теории минимальных моделей, мы будем называть его лог-разрешением.

Двойственный комплекс $\Gamma(E)$ разрешения π – это двойственный клеточный комплекс дивизора E как приводимого многообразия. А именно, пусть $E = \sum_{i=1}^N E_i$ – разложение дивизора E на простые компоненты E_i . Тогда k -мерные клетки $\Delta_{i_0 \dots i_k}^j$ комплекса $\Gamma(E)$ соответствуют неприводимым компонентам $E_{i_0 \dots i_k}^j$ пересечений $E_{i_0} \cap \dots \cap E_{i_k} = \bigcup_j E_{i_0 \dots i_k}^j$, $k = 0, \dots, n-1$, $1 \leq i_0 < i_1 < \dots < i_k \leq N$, причем каждая клетка $\Delta_{i_0 \dots i_k}^j$ является стандартным k -мерным симплексом, вершины которого занумерованы числами $i_0, \dots, i_k$. Приклеивающее отображение границы $\partial \Delta_{i_0 \dots i_k}^j$ k -мерной клетки к $(k-1)$ -мерному остову является симплицальным. Оно отображает грань $\Delta_{i_0 \dots \widehat{i_s} \dots i_k}^j$ на тот симплекс $\Delta_{i_0 \dots \widehat{i_s} \dots i_k}^{j'}$, для которого $E_{i_0 \dots i_k}^j \cap E_{i_0 \dots \widehat{i_s} \dots i_k}^{j'} \neq \emptyset$, и переводит вершину с номером i_r грани $E_{i_0 \dots \widehat{i_s} \dots i_k}^j$ в вершину с тем же номером i_r симплекса $\Delta_{i_0 \dots \widehat{i_s} \dots i_k}^{j'}$. Комплекс $\Gamma(E)$ рассматривался в [2].

2. Гомотопический тип двойственного комплекса разрешения как инвариант особенности.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\pi': (Y', E') \rightarrow (X, o)$ и $\pi'': (Y'', E'') \rightarrow (X, o)$ – два лог-разрешения изолированной особенности (X, o) . Тогда топологические пространства $\Gamma(E')$ и $\Gamma(E'')$ гомотопически эквивалентны.

Этот результат основывается на теореме Абрамовича–Кару–Мацуки–Влодарчика о факторизации бирациональных отображений в логарифмической категории [3].

Так как особенность (X, o) изолирована, можно компактифицировать X до полного многообразия, гладкого вне o . Тогда и разрешения Y' и Y'' можно считать полными. По теореме о факторизации бирациональный изоморфизм между Y' и Y'' можно разложить в последовательность

$$(Y', E') = (Y_1, E^{(1)}) \xrightarrow{\psi_1} (Y_2, E^{(2)}) \xrightarrow{\psi_2} \dots \xrightarrow{\psi_{k-1}} (Y_k, E^{(k)}) = (Y'', E''),$$

где $E^{(i)}$ – дивизор с простыми нормальными пересечениями в неособом многообразии Y_i , $Y_i \setminus E^{(i)} \simeq Y_{i+1} \setminus E^{(i+1)}$, а бирациональное отображение ψ_i (или ψ_i^{-1}) – раздутие гладкого неприводимого центра $C_i \subset E^{(i)}$ (или $C_{i+1} \subset E^{(i+1)}$), который имеет нормальные пересечения с $E^{(i)}$ (или с $E^{(i+1)}$) (так называемого *допустимого центра*).

Теперь теорема 1 следует из такой леммы.

ЛЕММА. Пусть $\sigma: (X', E') \rightarrow (X, E)$ – раздутие допустимого центра $C \subset E$ в неособом многообразии X , E – дивизор с простыми нормальными пересечениями. Тогда топологические пространства $\Gamma(E')$ и $\Gamma(E)$ гомотопически эквивалентны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $E = \sum_{i=1}^N E_i$ – разложение E на простые дивизоры, а раздуваемый центр $C \subset E_i$ при $1 \leq i \leq l$ и $C \not\subset E_i$ при $l < i \leq N$. Допустим, что C также имеет непустые пересечения с $E_{l+1}, \dots, E_r$, $l < r \leq N$. Возможны два случая.

1) $\dim C = n - l$ ($n = \dim X$), т.е. C совпадает с одной из неприводимых компонент пересечения $E_1 \cap \dots \cap E_l$: $C = E_{1\dots l}^1$. Тогда после раздутья собственные прообразы $E'_1, \dots, E'_l$ дивизоров $E_1, \dots, E_l$ имеют пересечение, число неприводимых компонент которого на единицу меньше, чем у пересечения $E_1 \cap \dots \cap E_l$, но все эти собственные прообразы пересекаются с исключительным дивизором F раздутья σ . Кроме этого, F пересекается с собственными прообразами $E'_{l+1}, \dots, E'_r$ дивизоров $E_{l+1}, \dots, E_r$. Поэтому ясно, что комплекс $\Gamma(E')$ получается из $\Gamma(E)$ барицентрическим разбиением симплекса $\Delta_{1\dots l}^1$ с центром в точке, соответствующей дивизору F , и комплексы $\Gamma(E')$ и $\Gamma(E)$ оказываются даже гомеоморфными.

2) $\dim C < n - l$, пусть $C \subset E_{1\dots l}^1$. В этом случае дивизоры $E_{i_1}, \dots, E_{i_s}$ имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда и их собственные прообразы $E'_{i_1}, \dots, E'_{i_s}$ имеют непустое пересечение. Поэтому комплекс $\Gamma(E')$ получается из комплекса $\Gamma(E)$ так. Нужно добавить к $\Gamma(E)$ новую вершину, соответствующую исключительному дивизору F раздутья σ , и надстроить конусы с вершиной F над всеми максимальными клетками $\Delta_{i_1\dots i_s}^j$ комплекса $\Gamma(E)$, обладающими свойством $E_{i_1\dots i_s}^j \cap C \neq \emptyset$. При этом симплекс $\Delta_{F,1\dots l}$, соответствующий пересечению $F \cap E_{1\dots l}^1$, рассматривается как обций для всех надстроенных конусов. Теперь гомотопическую эквивалентность между $\Gamma(E')$ и $\Gamma(E)$ можно задать как стягивание надстроенных конусов: переведем вершину F комплекса $\Gamma(E')$ в любую из вершин $E_1, \dots, E_l$ клетки $\Delta_{1\dots l}^1$ комплекса $\Gamma(E)$, тогда индуцированное симплициальное отображение и будет требуемой гомотопической эквивалентностью.

3. Случай торических особенностей.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $o \in X$ – изолированная особенность торического многообразия X . Тогда двойственный комплекс $\Gamma(E)$ любого лог-разрешения $\pi: (Y, E) \rightarrow (X, o)$ гомотопически тривиален (гомотопически эквивалентен точке).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Можно считать многообразие X аффинным. Тогда его можно представить как торическое многообразие $X = U_\sigma = \text{Spec } \mathbb{C}[\sigma]$, соответствующее выпуклому полиэдральному конусу $\sigma \subset \mathbb{R}^n$. Согласно теореме 1, достаточно найти гомотопический тип какого-нибудь одного лог-разрешения особенности (X, o) . Существует такой веер Σ , что носитель $\text{supp } \Sigma = \sigma$ и бирациональный морфизм $\pi: Y = X(\Sigma) \rightarrow X$ – лог-разрешение особенностей многообразия X (см. [4]). Рассмотрим сначала двойственный комплекс дивизора $E' = \sum T_i + E$, где T_i – инвариантные дивизоры, соответствующие ребрам τ_i конуса σ , а E – исключительный дивизор морфизма π . Простые исключительные дивизоры E_i , $E = \sum E_i$, соответствуют одномерным конусам веера Σ , отличным от τ_i ; дивизоры E_i и E_j имеют непустое пересечение тогда и только тогда, когда соответствующие одномерные конусы порождают двумерный конус веера Σ и т.д. Пусть L – такая гиперплоскость в пространстве $\mathbb{R}^n$, что $L \cap \sigma = K$ – компактный полиэдр. Вееру Σ тогда отвечает некоторая триангуляция полиэдра K . Соответствующий симплициальный комплекс мы тоже будем обозначать через K . Теперь ясно, что двойственный комплекс $\Gamma(E')$ гомеоморфен комплексу K и, очевидно, гомотопически тривиален.

Двойственный комплекс $\Gamma(E)$ получается из K выбрасыванием симплексов, имеющих один из дивизоров T_i своей вершиной. Триангуляцию Σ можно выбрать как угодно мелкой, поэтому очевидно, что после такого выбрасывания мы получим комплекс, гомотопически эквивалентный исходному, т.е. гомотопически тривиальный.

Список литературы

- [1] Н. Hironaka, *Ann. of Math.* (2), **79** (1964), 109–326. [2] G. L. Gordon, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **261**:1 (1980), 93–101. [3] D. Abramovich, K. Karu, K. Matsuki, J. Włodarczyk, *J. Amer. Math. Soc.*, **15**:3 (2002), 531–572. [4] В. И. Данилов, *УМН*, **33**:2 (1978), 97–154.

Д. А. Степанов (D. A. Stepanov)

Московский государственный технический
университет им. Н. Э. Баумана
E-mail: dstepanov@bmstu.ru

Представлено Э. Б. Винбергом

Принято редакцией
01.12.2005