Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ю. Плахов, О бильярдах в неограниченных областях, обращающих направление движения частиц, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1699>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:58:31

О бильярдах в неограниченных областях, обращающих направление движения частиц

А. Ю. Плахов

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^2$ с ортогональными координатами x , y и бильярд в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$, где множество Ω удовлетворяет следующим условиям:

- (а) Ω принадлежит верхней полуплоскости $\{y \geq 0\}$ и содержит полуплоскость $\{y > 1\}$;
- (б) $\partial\Omega$ есть несамопересекающаяся кусочно-гладкая кривая класса C^2 .

Обозначим $S_+^1 = \{\vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 : |\vec{v}| = 1, v_2 \geq 0\}$ верхнюю единичную полуокружность и для произвольных $x \in \mathbb{R}$, $\vec{v} \in S_+^1$ рассмотрим бильярдную частицу, имеющую координаты $(x(t), y(t)) = (x, 0) + \vec{v}t$ при $t \leq 0$. Если частица имеет конечное число отражений в регулярных точках $\partial\Omega$ и после этого движется свободно, то обозначим эту финальную скорость $\vec{v}_\Omega^+(x, \vec{v})$. Тем самым определена функция $\vec{v}_\Omega^+$ на некотором подмножестве множества $\mathbb{R} \times S_+^1$, принимающая значения в $S_+^1 := \{\vec{v} = (v_1, v_2) : |\vec{v}| = 1, v_2 \leq 0\}$. Справедливо следующее утверждение: функция $\vec{v}_\Omega^+$ определена на открытом всюду плотном подмножестве множества $\mathbb{R} \times S_+^1$ и непрерывна. Доказательство этого утверждения несложно и в значительной своей части повторяет рассуждения, использовавшиеся в [1; лемма 1.7.1].

Основной результат настоящей работы – построение семейства множеств Ω_ε , $\varepsilon > 0$, удовлетворяющих условиям (а) и (б) и таких, что на любом борелевском подмножестве множества $\mathbb{R} \times S_+^1$ конечной лебеговской меры

$$\text{при } \varepsilon \rightarrow 0^+ \text{ функция } \vec{v}_{\Omega_\varepsilon}^+(x, \vec{v}) \text{ сходится по мере к } -\vec{v}. \quad (1)$$

Построение заключается в следующем. Рассмотрим множество $E_\varepsilon = \{(x, y) : y \geq 0, y \geq \varepsilon(|x| - \varepsilon), x^2/(1 + \varepsilon^2) + y^2 \leq 1\}$ – фигуру, ограниченную сверху дугой эллипса, а снизу – большим диаметром и наклонными прямыми, проходящими через фокусы, и рассмотрим усеченный конус $K_\varepsilon = \{(x, y) : y \geq 0, y \geq \varepsilon(x - \varepsilon), y \geq -\varepsilon(x + \varepsilon)\}$. Обозначим $E_\varepsilon^{k,b}$, $K_\varepsilon^{k,b}$, $k > 0$, множества, полученные из E_ε и K_ε гомотетией с центром $(0, 0)$ и коэффициентом k и последующим сдвигом на вектор $(b, 0)$. Далее, определим по индукции множества $\mathcal{E}_\varepsilon^{(n)}$ и $\mathcal{K}_\varepsilon^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$. Положим $\mathcal{E}_\varepsilon^{(1)} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} E_\varepsilon^{1, 2m\sqrt{1+\varepsilon^2}}$, $\mathcal{K}_\varepsilon^{(1)} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} K_\varepsilon^{1, 2m\sqrt{1+\varepsilon^2}}$. Пусть теперь множества $\mathcal{E}_\varepsilon^{(n)}$ и $\mathcal{K}_\varepsilon^{(n)}$ уже определены для некоторого n . Рассмотрим пары (k, b) такие, что расстояние между множествами $\mathcal{K}_\varepsilon^{(n)}$ и $E_\varepsilon^{k,b}$ равно k . (Под расстоянием между двумя множествами мы здесь понимаем нижнюю грань расстояний между элементами первого и элементами второго множества.) Множество всех таких пар счетно, они имеют одинаковую первую компоненту $k = k_n$, а множество вторых компонент $b = b_{nm}$, $m \in \mathbb{Z}$, образует бесконечную двустороннюю арифметическую прогрессию. Положим $\mathcal{E}_\varepsilon^{(n+1)} = \mathcal{E}_\varepsilon^{(n)} \cup (\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} E_\varepsilon^{k_n, b_{nm}})$, $\mathcal{K}_\varepsilon^{(n+1)} = \mathcal{K}_\varepsilon^{(n)} \cup (\bigcup_{m \in \mathbb{Z}} K_\varepsilon^{k_n, b_{nm}})$. Множества $\mathcal{E}_\varepsilon^{(n)}$ инвариантны относительно сдвига на вектор $(2\sqrt{1+\varepsilon^2}, 0)$, и каждое множество $I_n := ([0, 2\sqrt{1+\varepsilon^2}] \times \{0\}) \setminus \mathcal{E}_\varepsilon^{(n)}$ есть объединение конечного числа интервалов, общая длина $|I_n|$ которых образует убывающую геометрическую прогрессию по n . Выберем n_ε такое, что $|I_{n_\varepsilon}| \leq \varepsilon$, и положим $\Omega_\varepsilon = \{(x, y) : y > 0\} \setminus \mathcal{E}_\varepsilon^{(n_\varepsilon)}$. Очевидно, множество Ω_ε удовлетворяет условиям (а) и (б).

Обозначим N_ε множество значений $(x, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times S_+^1$ таких, что либо $v_2 \leq \varepsilon/\sqrt{1+\varepsilon^2}$, либо $x + 2m\sqrt{1+\varepsilon^2} \in I_{n_\varepsilon}$ для некоторого $m \in \mathbb{Z}$. Если $(x, \vec{v}) \notin N_\varepsilon$, то бильярдная частица в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega_\varepsilon$, имеющая координаты $(x, 0) + \vec{v}t$ при $t \leq 0$, отразится ровно один раз в точке верхней границы одной из фигур $E_\varepsilon^{k_n, b_{nm}}$, и скорость после отражения равна $\vec{v}_{\Omega_\varepsilon}^+(x, \vec{v}) = -\vec{v} + O(\varepsilon)$, причем эта оценка равномерна по x и $\vec{v}$. С другой стороны,

для любого борелевского множества конечной лебеговой меры $M \subset \mathbb{R} \times S_+^1$ лебегова мера пересечения $M \cap N_\varepsilon$ есть $O(\varepsilon)$. Таким образом, сходимость (1) доказана.

Это построение допускает обобщение на случаи размерности три и выше. В самом деле, рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ с ортогональными координатами x, y, z ; зафиксируем $\varepsilon > 0$ и обозначим $O_\varepsilon = \{(x, y, z) : 0 \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq \varepsilon \max\{|x| - \varepsilon, |y| - \varepsilon\}\}$ множество, ограниченное сверху верхней единичной полусферой, а снизу – экваториальной плоскостью этой полусферы и четырьмя наклонными плоскостями. Обозначим $O_\varepsilon^{k,x,y}$, $k > 0$, множество, полученное из O_ε гомотетией с центром в начале координат и коэффициентом k и последующим сдвигом на вектор $(x, y, 0)$. Подобно тому, как это было сделано в двумерном случае, строится множество $\mathcal{O}_\varepsilon$, являющееся объединением счетного набора попарно непересекающихся множеств вида $O_\varepsilon^{k,x,y}$ (с, вообще говоря, различными тройками значений k, x, y), инвариантное относительно сдвигов на векторы $(2, 0, 0)$ и $(0, 2, 0)$ и такое, что площадь плоского множества $([0, 2] \times [0, 2] \times \{0\}) \setminus \mathcal{O}_\varepsilon$ не превосходит ε . Множества $\Omega_\varepsilon^{(3)} = \{(x, y, z) : z > 0\} \setminus \mathcal{O}_\varepsilon$ содержатся в полупространстве $\{z \geq 0\}$, содержат полупространство $\{z > 1\}$ и имеют кусочно-гладкую границу. Для почти всех $(x, y, \vec{v}) \in \mathbb{R}^2 \times S_+^2$, где $S_+^2 = \{\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3 : |\vec{v}| = 1, v_3 \geq 0\}$, бильярдная частица в $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega_\varepsilon^{(3)}$, имеющая координаты $(x, y, 0) + \vec{v}t$ при $t \leq 0$, испытывает конечное число отражений и дальше движется свободно со скоростью $\vec{v}_{\Omega_\varepsilon^{(3)}}^+(x, y, \vec{v})$. Определенная таким образом функция $\vec{v}_{\Omega_\varepsilon^{(3)}}^+$ сходится по мере к $-\vec{v}$ на любом подмножестве конечной лебеговой меры множества $\mathbb{R}^2 \times S_+^2$.

Поясним смысл полученных результатов на следующем примере. На неограниченное тело в $\mathbb{R}^2$ падает вертикальный поток частиц плотности ρ и фиксированного поперечного сечения $[a, b]$, т.е. первая конфигурационная координата падающих частиц заключена между a и b . Тело в исходном положении совпадает с некоторым множеством Ω , удовлетворяющим условиям (а) и (б). Тело может поворачиваться вокруг начала координат, причем вероятность поворота на угол $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$ определяется вероятностной мерой ν на $S_+^1 = \{(\cos \varphi, \sin \varphi), \varphi \in [-\pi/2, \pi/2]\}$. Математическое ожидание вертикальной составляющей силы давления потока на тело равно $R(\Omega) = \rho \int_{S_+^1} \int_a^b [1 - (\vec{v}_\Omega^+(x/v_2, \vec{v}), \vec{v})] dx d\nu(\vec{v})$. Требуется найти $\sup_\Omega R(\Omega)$.

Построенное выше семейство множеств $\{\Omega_\varepsilon\}$ доставляет решение этой задачи: именно, справедливо соотношение $\sup_\Omega R(\Omega) = 2\rho(b - a) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} R(\Omega_\varepsilon)$. С другой стороны, математическое ожидание силы давления на вертикальную полуплоскость $\Omega^0 := \{(x, y) : y > 0\}$ равно $R(\Omega^0) = 2\rho(b - a) \int_{S_+^1} v_2^2 d\nu(\vec{v})$; в частности, если ν есть мера равномерного распределения на S_+^1 , то величина $R(\Omega^0) = \rho(b - a)$ в 2 раза меньше максимального значения R .

В трехмерном случае аналогичное рассмотрение приводит к соотношению $\sup_\Omega R(\Omega) = 2\rho\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} R(\Omega_\varepsilon^{(3)})$, где σ – площадь поперечного сечения потока и ρ – его плотность. С другой стороны, для верхнего полупространства $\Omega_0^{(3)} := \{(x, y, z) : z > 0\}$ имеем $R(\Omega_0^{(3)}) = 2\rho\sigma \int_{S_+^2} v_2^2 d\mu(\vec{v})$, где μ – вероятностная мера на S_+^2 . В случае, если μ – мера равномерного распределения на S_+^2 , величина $R(\Omega_0^{(3)}) = \frac{2}{3}\rho\sigma$ в 3 раза меньше максимального значения R .

В заключение выражаю благодарность А. М. Степину за полезные замечания.

Список литературы

- [1] S. Tabachnikov, *Billiards*, Panor. Synthèses, 1, Société Mathématique de France, Paris, 1995.

А. Ю. Плахов (A. Yu. Plakhov)
Aveiro University, Portugal
E-mail: plakhov@mat.ua.pt

Представлено Д. В. Аносовым
Принято редакцией
01.12.2005