Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. М. Гуревич, С. В. Савченко, Термодинамический формализм для символических цепей Маркова со счетным числом состояний, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 2, 3–106

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm17>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.209.52.79

26 апреля 2023 г., 07:48:23

УДК 519.217

ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ ДЛЯ СИМВОЛИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ МАРКОВА СО СЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ СОСТОЯНИЙ

Б. М. ГУРЕВИЧ, С. В. САВЧЕНКО

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	4
Глава 1. Вариационные принципы и классификация функций, определенных на марковском множестве	5
§ 1. Основные определения. Вариационный принцип для топологического давления	5
§ 2. Производящие функции. Неотрицательные матрицы	16
§ 3. Критерии устойчивой положительности	25
§ 4. Равновесные и гиббсовские меры. Вариационный принцип Гиббса ..	38
Глава 2. Два класса инвариантных мер, связанных с СЦМ. Метод субдифференциалов	48
§ 5. Субдифференциал топологического давления	48
§ 6. Асимптотически-равновесные меры. Сходимость равновесных мер, отвечающих конечным подцепям счетной СЦМ	63
§ 7. Асимптотика дискретных инвариантных мер	73
Глава 3. Динамические дзета-функции, связанные с СЦМ	81
§ 8. Теорема факторизации и некоторые ее следствия	81
§ 9. Мероморфное продолжение дзета-функций и поведение дискретных инвариантных мер	87
§ 10. Дзета-функция и спектральные свойства неотрицательных матриц ..	94
Глава 4. Некоторые специальные классы СЦМ	98
§ 11. СЦМ с регулярным множеством периодических орбит	98
§ 12. СЦМ с конечной областью прохождения циклов	101
Список литературы	105

Работа первого автора выполнена при поддержке Фонда Сороса (грант № M8X000) и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-00377).

Работа второго автора выполнена при поддержке Фонда Сороса (грант № M8X000) и гранта INTAS-RFBR 95-418.

Введение

Символическая цепь Маркова (СЦМ) – это динамическая система, порожденная сдвигом на множестве последовательностей, которые можно отождествить с бесконечными путями конечного или счетного ориентированного графа. Обычно множество путей рассматривается вместе с заданной на нем естественной топологией, в которой сдвиг является непрерывным преобразованием. Отсюда – термин “топологическая цепь Маркова”, употребляемый гораздо чаще, чем СЦМ. Однако топология играет первостепенную роль далеко не во всех вопросах, касающихся этого объекта (примеры можно найти и в настоящей статье), поэтому эпитет “символическая” кажется нам в большей степени отвечающим существу дела. Впрочем, имеется еще английский термин “subshift of finite type”, указывающий на то, что речь идет об ограничении сдвига на некоторое подмножество множества всех последовательностей с данным алфавитом, т.е. о “подсдвиге”, причем это подмножество задается конечным числом ограничений (по крайней мере, в случае конечного алфавита). Строго говоря, subshift of finite type – несколько более общее понятие, чем СЦМ, однако первое сводится ко второму с помощью простой перекодировки (см. ниже).

В теории динамических систем СЦМ играют двоякую роль: с одной стороны, они выступают в качестве простейших символических моделей некоторых классических динамических систем, в частности, систем гиперболического типа и рассеивающих билиардов (причем в последнем случае с неизбежностью возникают СЦМ с бесконечным числом состояний) и служат одним из наиболее эффективных инструментов их изучения, с другой стороны, они достойны внимания и сами по себе, являясь источником разнообразных и достаточно содержательных математических задач.

Одно из основных направлений в исследовании СЦМ относится к так называемому термодинамическому формализму – кругу идей и понятий, тесно связанных со статистической физикой. Истоки этого направления можно усмотреть в работах середины 60-х годов, посвященных доказательству вариационного принципа для топологической энтропии непрерывных преобразований компактных топологических пространств, но только в 70-е годы было осознано, что в классе символических динамических систем топологическая энтропия есть не что иное, как давление в решетчатой модели статистической физики с сингулярным потенциалом, и появилась возможность рассматривать потенциалы более общего вида, что привело к понятию топологического давления и изучению вероятностных мер на фазовом пространстве динамической системы (не только символической), которые можно интерпретировать как распределения Гиббса. Этому в значительной мере способствовали статьи Я.Г. Сина [1], Р. Боуэна [2] и Д. Рюэля [3], [4] (см. также [5]–[8]). Для СЦМ с конечным числом состояний топологическая энтропия и вариационные принципы рассматривались в работе В. Перри [9] еще до появления этих понятий в общем случае. В [10], [11] полученные им результаты были обобщены (насколько это оказалось возможным) на СЦМ со счетным числом состояний. Выяснилось, что некомпактность фазового пространства приводит в этом случае к совершенно новым задачам, не имеющим смысла для СЦМ с конечным числом состояний.

Настоящая статья посвящена некоторым из этих задач. Она носит полубзорный характер: доказательства, как правило, приводятся лишь в тех случаях, когда они отсутствуют в имеющейся литературе, новые результаты подробно доказываются,

по ходу изложения формулируются нерешенные задачи. Для удобства читателя все выделенные формулировки (определения, леммы, теоремы и т. д.) внутри каждого параграфа включены в общий список и снабжены номерами вида N.1, N.2, ..., где N – номер параграфа.

Глава 1.

Вариационные принципы и классификация функций, определенных на марковском множестве

Обычно термодинамический формализм строится в ситуации, когда заданы преобразование T некоторого пространства X и функция f , определенная на этом пространстве. В этой статье роль (X, T) будет, как правило, играть СЦМ со счетным числом состояний, определяемая некоторым ориентированным графом G , а на f будут накладываться те или иные ограничения. Поэтому во многих встречающихся ниже обозначениях присутствует пара (G, f) или заменяющие ее символы. Впрочем, иногда мы будем опускать символ G , если граф явным образом фиксирован.

§1. Основные определения. Вариационный принцип для топологического давления

Пусть G – ориентированный граф с конечным или счетным множеством вершин $V = V(G)$ и множеством ребер $E = E(G) \subset V \times V$.

1.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем последовательность $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, где $n \geq 1$ и $v_i \in V$ при $0 \leq i \leq n$, *путем* длины $l(\gamma) = n$ графа G (или G -*путем*), если $(v_i, v_{i+1}) \in E$ при $0 \leq i \leq n-1$; каждое такое ребро (v_i, v_{i+1}) будем называть принадлежащим γ , а сам путь γ – проходящим через (v_i, v_{i+1}) . Будем говорить, что путь γ выходит из $v \in V$, входит в v и проходит через v , если соответственно $v_0 = v$, $v_n = v$ и $v_i = v$ при некотором $i \neq 0, n$. Если при этом $v_n = v_0$, будем называть γ *циклом* (или, более точно, *v-циклом*); v -циклы, в которых $v_i \neq v$ при всех $i \neq 0, n$, назовем *простыми*. Все циклы графа G будем называть G -*циклами*. Путь, выходящий из v и входящий в v' , будем называть ведущим из v в v' , а путь, проходящий через какую-либо вершину $w \in W$, где $W \subset V$, – проходящим через W . Если $\gamma = (v_0, v_1, \dots, v_n)$, $\gamma' = (v'_0, v'_1, \dots, v'_m)$ – два G -пути, причем $v'_0 = v_n$, то последовательность $\gamma\gamma' = (v_0, v_1, \dots, v_n, v'_1, \dots, v'_m)$, также являющуюся G -путем (длина которого, очевидно, равна $m + n$), будем называть произведением путей γ и γ' . Множество всех G -путей обозначим через $\Gamma(G)$.

Ясно, что всякий v -цикл представим, притом единственным способом, в виде произведения простых v -циклов.

В пространстве последовательностей $X = V^{\mathbb{Z}}$ выделим подмножество $X(G)$, состоящее из тех $x = (x_i, i \in \mathbb{Z})$, для которых $(x_i, x_{i+1}) \in E(G)$ при всех $i \in \mathbb{Z}$. Последовательности, входящие в $X(G)$, будем называть *двусторонне-бесконечными G -путями*. На X определен сдвиг S , переводящий последовательность $x = (x_i, i \in \mathbb{Z})$ в последовательность $x' = (x'_i, i \in \mathbb{Z})$, где $x'_i = x_{i+1}$. Очевидно, множество $X(G)$ является S -инвариантным. Будем называть его *марковским множеством*.

1.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пара $(X(G), S)$ называется *символической цепью Маркова* (СЦМ), отвечающей графу G .

Поскольку преобразование S всегда одно и то же, СЦМ $(X(G), S)$ можно отождествить с множеством $X(G)$, называемым *марковским множеством*, или даже с самим графом G . По определению $X(G)$ состоит из последовательностей, в которых каждая пара стоящих рядом символов “допустима” – служит ребром графа G .

Можно обобщить это определение, если задать при каком-нибудь $n \geq 2$ произвольную совокупность $\mathcal{A}$ последовательностей длины $n + 1$ и, назвав их допустимыми, рассмотреть множество $X(\mathcal{A})$ тех бесконечных последовательностей $x \in X$, в которых каждый отрезок длины $n + 1$ является допустимым. Множество $X(\mathcal{A})$, как и $X(G)$, инвариантно относительно S , и пару $(X(\mathcal{A}), S)$ естественно назвать СЦМ порядка n . В таком случае $(X(G), S)$ будет СЦМ первого порядка. Очевидно, всякая СЦМ порядка 1 есть одновременно и СЦМ порядка n при любом $n > 1$. В зарубежной математической литературе по отношению к СЦМ любого (конечного) порядка часто применяется термин *subshift of finite type*, происхождение которого было объяснено во введении. Мы не будем рассматривать СЦМ порядка большего единицы: как уже было сказано, их можно свести к СЦМ первого порядка. Делается это следующим образом.

При $n \geq 1$ введем отображение Φ_n , которое каждой последовательности $x = (x_i, i \in \mathbb{Z})$, $x_i \in V$, ставит в соответствие последовательность $y = (y_i, i \in \mathbb{Z})$, где $y_i = (x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n-1})$. Очевидно, Φ_n обратимо на X и коммутирует со сдвигом, а Φ_1 – тождественное преобразование. Если $\mathcal{A}$ – произвольное множество последовательностей длины $n + 1$, то, как легко видеть, $\Phi_n X(\mathcal{A})$ – марковское множество. Оно определяется графом $G_n(\mathcal{A})$ с множеством вершин, состоящим из тех последовательностей $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}) \in V^n$, которые можно продолжить до последовательности из $\mathcal{A}$ приписыванием одного символа слева или справа, и множеством ребер, состоящим из таких пар $((v_{i_1}, \dots, v_{i_n}), (v'_{i_1}, \dots, v'_{i_n}))$, для которых $v'_{i_k} = v_{i_{k+1}}$ при $k = 1, \dots, n - 1$ и $(v_{i_1}, \dots, v_{i_n}, v'_{i_n}) \in \mathcal{A}$. Будем называть Φ_n *редукцией порядка n* или *n -редукцией*. В частном случае, когда $X(\mathcal{A})$ само является марковским множеством, т.е. $X(\mathcal{A}) = X(G)$, мы можем рассматривать $G_n(\mathcal{A})$ как образ графа G при индуцированном отображении графов, которое в дальнейшем будем обозначать тем же символом Φ_n . Пользуясь тем, что Φ_n обратимо на $X(G)$ и $\Phi_n X(G) = X(\Phi_n G)$, можно поставить в соответствие каждой функции $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$ функцию $f_n = \Phi_n^* f$, где $\Phi_n^* f(y) = f(\Phi_n^{-1} y)$, $y \in X(G_n)$ (использование одного и того же обозначения для индуцирующих друг друга отображений разных множеств не должно вызывать недоразумений).

Снабдим множество V дискретной топологией и зададим на X топологию прямого произведения. Очевидно, конечномерные цилиндры, т.е. множества вида $\{x \in X : x_i = v_{n_i}, i = 1, \dots, k\}$ образуют базу этой топологии, множество $X(G)$ в ней замкнуто, а сдвиг S и n -редукция Φ_n при любом n являются гомеоморфизмами. Ту же топологию на X и, следовательно, ту же индуцированную топологию на $X(G)$ можно получить с помощью метрики. Пусть $\theta \in (0, 1)$ и ρ – метрика на V , удовлетворяющая условию $\sup_{v, v' \in V} \rho(v, v') < \infty$. Для любых $x = (x_i, i \in \mathbb{Z})$, $x' = (x'_i, i \in \mathbb{Z})$ положим

$$(1.1) \quad d_{\rho, \theta}(x, x') = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \theta^{|n|} \rho(x_i, x'_i).$$

Легко проверить, что $d_{\rho, \theta}$ – метрика на X . Для нас будут важны метрики ρ двух типов, а именно, метрики, удовлетворяющие при какой-нибудь нумерации вершин условию

$$(1.2) \quad \inf_{i, j: i \neq j} \rho(v_i, v_j) > 0$$

и условию

$$(1.3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{i, j \geq n} \rho(v_i, v_j) = 0$$

(очевидно, при любой другой нумерации было бы то же самое). Число θ и конкретный вид метрики каждого типа в дальнейшем не играют существенной роли, поэтому впредь будем считать, что $\theta = 1/2$, $\rho_1(v_i, v_j) \equiv 1$ и $\rho_2(v_i, v_j) \equiv |i^{-1} - j^{-1}|$.

Напомним определение топологического давления $P(Y, T, f)$ для непрерывного отображения $T: Y \rightarrow Y$ компактного топологического пространства Y и функции $f \in C(Y, \mathbb{R})$ (подробности см. в [6], [7]). Пусть $\mathcal{U}$ – конечное покрытие пространства Y открытыми множествами U_i и $\mathcal{U}^{(m)}$, $m = 0, 1, \dots$, – покрытие, образованное множествами вида

$$U_{i_0, \dots, i_{m-1}} = \bigcap_{k=0}^{m-1} T^{-k} U_{i_k}.$$

Для каждого непустого элемента W покрытия $\mathcal{U}^{(m)}$ положим

$$f^{(m)}(W) = \sup_{y \in W} \exp \left[\sum_{k=0}^{m-1} f(T^k y) \right].$$

Пусть

$$Z_m(\mathcal{U}) = \min_{\mathcal{U}'} \sum_{W \in \mathcal{U}'} f^{(m)}(W),$$

где минимум берется по всем подпокрытиям $\mathcal{U}'$ покрытия $\mathcal{U}$. Тогда существует предел

$$P(Y, T, f, \mathcal{U}) = \lim_{m \rightarrow \infty} m^{-1} \log Z_m(\mathcal{U}).$$

Топологическое давление $P(Y, T, f)$ определяется равенством

$$(1.4) \quad P(Y, T, f) = \sup_{\mathcal{U}} P(Y, T, f, \mathcal{U}).$$

В частном случае, когда $f \equiv 0$, мы приходим к определению *топологической энтропии* $h(Y, T) = P(Y, T, 0)$.

1.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Ниже будут встречаться ситуации, когда пространство Y вложено в некоторое большее пространство X , а функция f определена на X . Строго говоря, в таких случаях следовало бы вместо $P(Y, T, f)$ писать $P(Y, T, f|_Y)$. Мы, однако, этого делать не будем, поскольку Y и так присутствует в обозначениях в качестве первого аргумента функции P . Точно так же будем поступать и с некоторыми другими обозначениями, аналогичными этому.

Обозначим через $\mathcal{M}(Y, T)$ совокупность T -инвариантных вероятностных борелевских мер на Y . Равенство

$$(1.5) \quad P(Y, T, f) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(Y, T)} \left[h_\mu(T) + \int f d\mu \right]$$

носит название *вариационного принципа* для топологического давления. В приведенной здесь форме оно было доказано П. Уолтерсом [6] (более ранние результаты относились к топологической энтропии, первое обобщение на случай $f \neq 0$ получено Рюэлем [3]).

Меры μ , для которых в правой части (1.5) достигается верхняя грань, называются *равновесными мерами* (более точно, *f -равновесными*), а также равновесными распределениями и равновесными состояниями.

Я. Б. Песин и Б. С. Пицкель [12] обобщили понятие топологического давления на некомпактный случай (для топологической энтропии это ранее сделал Боуэн [13], [14]) в предположении, что Y – подмножество компактного метрического пространства X , а функцию f можно продолжить по непрерывности на X . Приведем их определение.

Пусть X – компактное метрическое пространство, $Y \subset X$, $T: Y \rightarrow Y$ – непрерывное отображение и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывная функция. Для любого конечного открытого покрытия $\mathcal{U} = (U_1, \dots, U_k)$ пространства X , любого $n \in \mathbb{Z}^+$ и любого набора $I = (i_0, \dots, i_{n-1}) \in \{1, \dots, k\}^n$ положим

$$l(I) = n, \quad U(I) = \bigcap_{s=0}^{n-1} T^{-s} U_{i_s},$$

$$F(I) = \begin{cases} \sup_{x \in U(I)} \sum_{s=0}^{n-1} f(T^s x), & U(I) \neq \emptyset, \\ -\infty, & U(I) = \emptyset. \end{cases}$$

Пусть $Z \subset Y$, $N \geq 1$, $\mathcal{J}_N = \bigcup_{n \geq N} \{1, \dots, k\}^n$ и $\mathcal{J}_N(Z, T, \mathcal{U})$ – совокупность тех $\mathcal{J}' \subset \mathcal{J}_N$, для которых $\bigcup_{I \in \mathcal{J}'} U(I) \supset Z$. Для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ положим

$$M_X(Z, T, f, \mathcal{U}, \lambda, N) = \inf_{\mathcal{J}' \in \mathcal{J}_N(Z, T, \mathcal{U})} \sum_{I \in \mathcal{J}'} \exp[-\lambda l(I) + F(I)].$$

Так как $M_X(Z, T, f, \mathcal{U}, \lambda, N)$, очевидно, не убывает по N , существует предел

$$m_X(Z, T, f, \mathcal{U}, \lambda) = \lim_{N \rightarrow \infty} M_X(Z, T, f, \mathcal{U}, \lambda, N),$$

причем возможен лишь один из двух случаев: либо $m_X(Z, T, f, \mathcal{U}, \lambda) = 0$ при всех $\lambda \in \mathbb{R}$, либо найдется такое $\lambda_0 \in \mathbb{R}$, что $m_X(Z, T, f, \mathcal{U}, \lambda) = \infty$, если $\lambda < \lambda_0$, и

$m_X(Z, T, f, \mathcal{U}, \lambda) = 0$, если $\lambda > \lambda_0$. Положим $P_X(Z, T, f, \mathcal{U})$ равным нулю в первом случае и равным λ – во втором. Пусть, наконец,

$$(1.6) \quad P_{X,d}(Z, T, f) = \lim_{\text{diam}(\mathcal{U}) \rightarrow 0} P_X(Z, T, f, \mathcal{U}),$$

где $\text{diam}(\mathcal{U})$ – наибольший из диаметров множеств U_i (существование предела доказывается весьма просто).

1.4. ЗАМЕЧАНИЕ. В [12] имеется вариант определения топологического давления для $f \equiv 0$ (т.е. топологической энтропии), когда T – непрерывное преобразование произвольного топологического пространства Y (а объемлющее пространство X отсутствует). Это определение отличается от только что приведенного лишь тем, что в нем $\mathcal{U}$ – конечное открытое покрытие пространства Y (а не X) и в (1.6) вместо предела берется точная верхняя грань по всем таким $\mathcal{U}$. Обозначив полученную величину через $h_Y(Z, T)$, положим $h(Y, T) = h_Y(Y, T)$. В [12] показано, что $h(Y, T)$ совпадает с энтропией, введенной Боуэном [13].

Топологическое давление $P_{X,d}(Z, T, f)$ обладает следующими свойствами:

а) если множество Y компактно, то

$$(1.7) \quad P_{X,d}(Y, T, f) = P(Y, T, f)$$

(см. (1.5) и замечание 1.3);

б) если $Z_1 \subseteq Z_2 \subseteq Y$, то

$$(1.8) \quad P_{X,d}(Z_1, T, f) \leq P_{X,d}(Z_2, T, f);$$

в) справедливо неравенство

$$(1.9) \quad P_{X,d}(Y, T, f) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(Y, T)} \left[h_\mu(T) + \int f d\mu \right].$$

Говорят, что $P_{X,d}(Y, T, f)$ удовлетворяет вариационному принципу, если в (1.9) имеет место равенство. Это всегда так в случае компактного Y (см. [6]).

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда заданы топологическое пространство Y , непрерывное отображение $T: Y \rightarrow Y$ и непрерывная функция $f: Y \rightarrow \mathbb{R}$. Положим

$$P^{\text{int}}(Y, T, f) = \sup_{K \in \mathcal{K}(Y, T)} P(K, T, f),$$

где $\mathcal{K}(Y, T)$ – совокупность T -инвариантных компактных множеств $K \subset Y$ (если $\mathcal{K}(Y, T) = \emptyset$, полагаем $P^{\text{int}}(Y, T, f) = -\infty$). Очевидно, $P^{\text{int}}(Y, T, f)$ – топологический инвариант: если (Y', T', f') – другая тройка того же типа, что (Y, T, f) , и существует такой гомеоморфизм $\Phi: Y \rightarrow Y'$, что $T'\Phi y = \Phi T y$, $f'(\Phi y) = f(y)$ при всех $y \in Y$, то $P^{\text{int}}(Y', T', f') = P^{\text{int}}(Y, T, f)$.

В предположении, что Y можно непрерывно вложить в компактное метрическое пространство (X, d) , а функцию f – продолжить по непрерывности на X , положим

$$P^{\text{ext}}(Y, T, f) = \inf_{(X, d)} P_{X,d}(Y, T, f),$$

где $\inf$ берется по всем упомянутым вложениям.

Очевидно, P^{int} и P^{ext} определяются уже только одной топологической структурой пространства Y (причем P^{int} имеет смысл и в том случае, когда функция f неограничена). Для ограниченной f справедливость вариационного принципа в компактном случае приводит к неравенству

$$(1.10) \quad P^{\text{int}}(Y, T, f) \leq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(Y, T)} \left[h_\mu(T) + \int f d\mu \right],$$

а (1.6) – к неравенству

$$(1.11) \quad P^{\text{ext}}(Y, T, f) \geq \sup_{\mu \in \mathcal{M}(Y, T)} \left[h_\mu(T) + \int f d\mu \right].$$

Если в (1.10) и (1.11) имеет место равенство, будем, аналогично предыдущему, говорить о справедливости вариационного принципа для P^{int} и P^{ext} соответственно.

Из (1.10), (1.11) видно, что

$$(1.12) \quad P^{\text{int}}(Y, T, f) \leq P^{\text{ext}}(Y, T, f)$$

во всех случаях, когда правая часть (1.12) имеет смысл. Разумеется, в компактном случае P^{int} и P^{ext} совпадают. Если же Y некомпактно, то в (1.10) и, следовательно, в (1.12) может быть строгое неравенство. Чтобы убедиться в этом, достаточно взять в качестве T какой-нибудь минимальный гомеоморфизм компактного пространства X , имеющий положительную топологическую энтропию, в качестве Y – множество $X \setminus \mathcal{O}(x)$, где $\mathcal{O}(x)$ – орбита произвольной точки $x \in X$, и положить $f \equiv 0$. Очевидно, левая часть (1.10) в этом случае будет равна нулю, а правая – топологической энтропии преобразования T .

Из сказанного следует, что P^{int} может удовлетворять вариационному принципу лишь при наличии у Y достаточно богатого запаса T -инвариантных компактных подмножеств. Было бы интересно также найти общие условия, при которых справедлив вариационный принцип для P^{ext} .

В случае СМЦ ситуация значительно яснее, чем в общем случае. Заметим, прежде всего, что для любой метрики ρ на V и любого θ преобразование S равномерно непрерывно в метрике $d = d_{\rho, \theta}$ (см. (1.1)). Поэтому S можно продолжить по непрерывности до преобразования $S_d: Y_d \rightarrow Y_d$, где Y_d – пополнение пространства $Y = X(G)$ по метрике d . Если функция f , заданная на Y , также равномерно непрерывна, то и ее можно продолжить до непрерывной функции f_d на Y_d .

Проведем теперь операцию противоположного характера: для произвольного конечного связного подграфа G_0 графа G ограничим как сдвиг S , так и функцию f на множество $X(G_0) \subset X(G)$, которое, очевидно, S -инвариантно и компактно.

ТЕОРЕМА ([15], см. также замечание 5.15). *Если ρ – метрика на V , удовлетворяющая условию (1.3), $d = d_{\rho, \theta}$ – индуцированная ею метрика на $X(G)$ и $X_d(G)$ – пополнение пространства $(X(G), d)$, то для любого $\theta \in (0, 1)$*

(а) *пространство $X_d(G)$ компактно;*

- (б) для любой функции $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$, ограниченной и равномерно непрерывной в метрике d , выполняется соотношение

$$\sup_{G_0} P(X(G_0), S, f) = P(X_d(G), S, f_d),$$

где $\sup$ берется по всем конечным связным подграфам G_0 графа G .

1.6. ЗАМЕЧАНИЕ. В [15] эта теорема доказана для конкретного выбора ρ и θ (а именно, для $\rho(v_i, v_j) = |i^{-1} - j^{-1}|$ при некоторой нумерации вершин и для $\theta = 1/2$), однако приведенное там доказательство годится и для общего случая.

1.7. СЛЕДСТВИЕ. Если функция f равномерно непрерывна в метрике $d = d_{\rho, \theta}$, где ρ удовлетворяет условию (1.3), то

$$(1.13) \quad P^{\text{int}}(X(G), S, f) = P^{\text{ext}}(X(G), S, f),$$

$$(1.14) \quad P^{\text{ext}}(X(G), S, f) = P_{X_d(G), d}(X(G), S, f)$$

и для P^{int} , P^{ext} выполняется вариационный принцип.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого множества $Y \subset X(G)$ положим

$$V(Y) = \{v \in V(G) : \text{существуют такие } x = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in Y \text{ и } n \in \mathbb{Z}, \text{ что } x_n = v\}.$$

Пусть Y инвариантно относительно S ; тогда

$$V(Y) = \{v \in V(G) : \text{существует такое } x = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in Y, \text{ что } x_0 = v\}.$$

Если, кроме того, Y компактно, то $V(Y)$ конечно. Так как граф G связан, он обладает связным подграфом G_0 , вершины которого образуют конечное множество $V_0 \subset V$, содержащее $V(Y)$, а ребрами служат те ребра графа G , у которых начало и конец принадлежат V_0 (это, в частности, следует из леммы 3.10, доказываемой ниже). Легко видеть, что $Y \subseteq X(G_0)$ и, следовательно,

$$P(Y, S, f) \leq P(X(G_0), S, f).$$

Тем самым,

$$(1.15) \quad P^{\text{int}}(X(G), S, f) = \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_0(G)} P(X(G_0), S, f),$$

где $\mathcal{G}_0(G)$ – множество всех конечных подграфов графа G . Отсюда в силу теоремы 1.5 получаем

$$(1.16) \quad P^{\text{int}}(X(G), S, f) = P(X_d(G), S_d, f_d).$$

С другой стороны, (1.8), (1.7) и определение $P(X(G), S, f)$ дают

$$(1.17) \quad \begin{aligned} P(X_d(G), S_d, f_d) &= P_{X_d(G), d}(X_d(G), S_d, f_d) \\ &\geq P_{X_d(G), d}(X(G), S, f) \geq P^{\text{ext}}(X(G), S, f). \end{aligned}$$

Сравнивая (1.16), (1.17) с (1.12), приходим к (1.13), (1.14).

Что касается вариационного принципа для $P = P^{\text{ext}}$, то он моментально следует из (1.13), (1.11) и справедливости вариационного принципа для $P(X(G_0), S, f)$ при любом конечном G_0 . Следствие доказано.

1.8. ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, равенство (1.15) справедливо для любой непрерывной функции, определенной на $X(G)$, даже неограниченной. Заметим, что если метрика ρ_1 на V удовлетворяет условию (1.2), а метрика ρ_2 — условию (1.3) и если $d_i = d_{\theta, \rho_i}$, $i = 1, 2$, — соответствующие метрики на $X(G)$, то всякая d_2 -равномерно непрерывная функция является и d_1 -равномерно непрерывной, но, вообще говоря, не наоборот. Поэтому в следствии 1.7 нельзя заменить метрику d_2 на метрику d_1 (даже в случае $f \equiv 0$). Тем не менее справедливо следующее утверждение.

1.9. ТЕОРЕМА. Если функция f ограничена и равномерно непрерывна в метрике d_1 , то для $P^{\text{int}}(X(G), S, f)$ выполняется вариационный принцип.

Для доказательства нам потребуется ввести один класс функций, который будет использоваться и в дальнейшем.

1.10. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для любых $k, l \in \mathbb{Z}$ обозначим через $\mathcal{F}_k^l(G)$ совокупность действительных функций, постоянных на цилиндрических множествах с носителем $[k, l]$:

$$\mathcal{F}_k^l(G) = \{f : f(x) = f(x'), \text{ если } x = (x_i, i \in \mathbb{Z}), x' = (x'_i, i \in \mathbb{Z}) \text{ и } x_i = x'_i \text{ при } k \leq i \leq l\}.$$

Такие функции будем называть *локальными*.

Легко видеть, что все локальные функции непрерывны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.9. Начнем со случая, когда

$$(1.18) \quad \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)} \left[h_\mu(S) + \int f d\mu \right] = \infty.$$

Так как функция f ограничена, (1.18) эквивалентно равенству

$$(1.19) \quad \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)} h_\mu(S) = \infty,$$

а так как в силу следствия 1.7 для $P^{\text{int}}(X(G), S, 0)$ выполняется вариационный принцип, (1.19) означает, что $P^{\text{int}}(X(G), S, 0) = \infty$. Для $P^{\text{int}}(X(G_0), S, 0)$ при $G_0 \in \mathcal{G}_0(G)$ также выполняется вариационный принцип. Поэтому (см. (1.15) и замечание 1.8)

$$\sup_{G_0 \in \mathcal{G}_0(G)} P^{\text{int}}(X(G_0), S, 0) = \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_0(G)} \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G_0), S)} h_\mu(S) = \infty.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} P^{\text{int}}(X(G), S, f) &= \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_0(G)} P^{\text{int}}(X(G_0), S, f) \\ &= \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_0(G)} \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G_0), S)} \left[h_\mu(S) + \int f d\mu \right] = \infty. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что левая часть равенства (1.18) конечна и, следовательно, $P^{\text{int}}(X(G), S, f) < \infty$. Пользуясь равномерной непрерывностью f , подберем такую последовательность функций $f_n \in \mathcal{F}_{-n}^n(G)$, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_n\| = 0,$$

где $\|f - f_n\| = \sup_{x \in X(G)} |f(x) - f_n(x)|$. Очевидно,

$$\left| \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)} \left[h_\mu(S) + \int f d\mu \right] - \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)} \left[h_\mu(S) + \int f_n d\mu \right] \right| \leq \|f - f_n\|$$

(последнее неравенство вытекает из соотношения (1.15) и вариационного принципа для $P^{\text{int}}(X(G_0), S, g)$, где $G_0 \in \mathcal{G}_0(G)$ и g – непрерывная функция на $X(G)$). Отсюда следует, что достаточно доказать вариационный принцип для $P^{\text{int}}(X(G), S, f)$ в предположении, что f – ограниченная функция из $\mathcal{F}_{-n}^n(G)$, $n = 1, 2, \dots$. Так как обе части равенства, выражающего вариационный принцип, не меняются при замене $f(x)$ на $f(Sx)$, достаточно ограничиться случаем, когда $f \in \mathcal{F}_0^n(G)$, $n = 1, 2, \dots$. Кроме того, можно считать, что $n = 1$. В самом деле, если $f \in \mathcal{F}_0^n(G)$, $n \geq 2$, применим к $X(G)$ преобразование Φ_n (определенное выше). Напомним, что $\Phi_n X(G) = X(G_n)$, где G_n – граф, вершинами которого служат G -пути длины $n - 1$, а ребрами – пары G -путей (γ', γ'') , удовлетворяющие условию: найдется G -путь длины n , начало которого совпадает с γ' , а конец – с γ'' . Пользуясь тем, что Φ_n обратимо, положим, как и раньше, $f_n(y) = (\Phi_n f)(y) = f(\Phi_n^{-1}y)$, $y \in X(G_n)$. Очевидно, f_n – ограниченная непрерывная функция из $\mathcal{F}_0^1(G_n)$ и

$$P^{\text{int}}(X(G), S, f) = P^{\text{int}}(X(G_n), S, f_n),$$

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)} \left[h_\mu(S) + \int f d\mu \right] = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G_n), S)} \left[h_\mu(S) + \int f_n d\mu \right].$$

Таким образом, вариационный принцип для $P^{\text{int}}(X(G), S, f)$ достаточно доказать в случае ограниченной непрерывной функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, понимая под G произвольный связный ориентированный граф со счетным множеством вершин. Но такой результат имеется в [16], [25] (см. также § 4 настоящей статьи). Тем самым теорема 1.9 доказана.

Остановимся теперь на частном случае, когда $f \equiv 0$, т.е. на случае топологической энтропии. Разумеется, к нему применимо следствие 1.7. Однако известны еще по крайней мере три определения топологической энтропии непрерывного отображения, которые, вообще говоря, не эквивалентны в некомпактном случае, и представляется естественным вопрос, к чему они приводят в случае СЦМ. Два из этих определений, содержащиеся соответственно в [13] и [12], дают одну и ту же величину (см. замечание 1.4), третье (а хронологически – первое) предложено Боуэном [14] и относится к непрерывным преобразованиям метрических пространств. Оно состоит в следующем.

Пусть (X, d) – метрическое пространство и $T: X \rightarrow X$ – непрерывное отображение. Множество $D \subset X$ называется (n, ε) -плотным в множестве $F \subset X$ ($n \in \mathbb{Z}^+$, $\varepsilon > 0$),

если для всякой точки $x \in F$ найдется такая точка $y \in D$, что $d(T^i x, T^i y) \leq \varepsilon$ при $i = 0, \dots, n-1$. Для любого компактного $K \subset X$ положим

$$(1.20) \quad r_n(X, d, T, K, \varepsilon) = \inf \{ \#D : D \text{ является } (n, \varepsilon)\text{-плотным в } K \},$$

$$(1.21) \quad h(X, d, T, K, \varepsilon) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln r_n(X, d, T, K, \varepsilon),$$

$$(1.22) \quad h(X, d, T, K) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} h(X, d, T, K, \varepsilon)$$

(очевидно, $h(X, d, T, K, \varepsilon)$ не убывает по ε). Топологическая энтропия $h(X, d, T)$ определяется равенством

$$(1.23) \quad h(X, d, T) = \sup \{ h(X, d, T, K) : K \subset X \text{ компактно} \}.$$

Подставим в это определение вместо d введенные выше метрики d_1 и d_2 (см. (1.1) и замечание 1.6).

1.11. ТЕОРЕМА. Пусть G – связный ориентированный граф с конечным или счетным множеством вершин V . Тогда

$$(1.24) \quad h(X(G), d_2, S) = P^{\text{int}}(X(G), S, 0),$$

$$(1.25) \quad h(X(G), d_1, S) = \sup_{v \in V} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \# \Gamma^+(v, n),$$

где $\Gamma^+(v, n)$ – множество G -путей длины n , выходящих из вершины $v \in V$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Равенство (1.24) доказано в [17] (см. предложение 1.3 из указанной статьи); там же (теорема 1.1) доказано равенство (1.25) в предположении, что для каждой вершины $v \in V$ множество входящих в нее и выходящих из нее ребер конечно (графы с таким свойством называются локально-конечными). Более широкий класс образуют графы, по отношению к которым условие конечности накладывается лишь на выходящие ребра (такие графы будем называть *локально-конечными вперед*). Докажем для них сначала неравенство

$$(1.26) \quad h(X(G), d_1, S) \leq \sup_{v \in V} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \# \Gamma^+(v, n).$$

Для любого множества $F \subset X(G)$ и любого $n \in \mathbb{Z}$ положим

$$V(F, n) = \{ v \in V : \text{существует такое } x = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in F, \text{ что } x_n = v \}.$$

Очевидно, компактность F равносильна конечности всех $V(F, n)$, $n \in \mathbb{Z}$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по заданным $\rho(\cdot, \cdot)$ и θ (входящим в определение метрики d_1 , см. замечание 1.8) подберем такое $k = k(\varepsilon)$, что $d_1(x, x') \leq \varepsilon$ для любых $x = (x_i, i \in \mathbb{Z})$, $x' = (x'_i, i \in \mathbb{Z})$, удовлетворяющих условию $x_i = x'_i$ при $|i| \leq k$. Возьмем любое компактное множество K и при $n \in \mathbb{Z}^+$ поставим в соответствие каждому пути $\gamma \in \bigcup_{v \in V(K, -k)} \Gamma^+(v, 2k + n)$ произвольный двусторонне-бесконечный

путь $x(\gamma) = (x_i, i \in \mathbb{Z})$, для которого $(x_{-k}, \dots, x_{k+n}) = \gamma$. Множество $K_{n,\varepsilon}$, состоящее из всех таких $x(\gamma)$, является, очевидно, (n, ε) -плотным в K . Так как

$$\#K_{n,\varepsilon} \leq \sum_{v \in V(K, -k)} \#\Gamma^+(v, 2k+n),$$

мы получаем (см. (1.20), (1.21))

$$\begin{aligned} h(X(G), d_1, S, K, \varepsilon) &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \sum_{v \in V(K, -k)} \#\Gamma^+(v, 2k+n) \\ &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \max_{v \in V(K, -k)} \#\Gamma^+(v, 2k+n), \end{aligned}$$

откуда следует (1.26).

Это рассуждение не использует свойства локальной конечности и, по существу, содержится в [17]. Небольшая его модификация приведет к доказательству обратного неравенства.

Подберем для каждого $v \in V(G)$ такие $w_i \in V(G)$, $i \leq -1$, что множество

$$F(v) = \{x \in X(G) : x_i = w_i \text{ при } i \leq -1, x_0 = v\}$$

непусто. Так как граф G локально-конечен вперед, $F(v)$ компактно. Пусть $\varepsilon > 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ и $F_1(v)$ – произвольное множество, которое (n, ε) -плотно в $F(v)$. Легко понять, что если $\varepsilon < \inf_{v', v''} \rho(v', v'')$, то для любого пути $\gamma \in \Gamma^+(v, n)$ множество $F_1(v)$ должно иметь непустое пересечение с цилиндром $\{x \in X(G) : (x_0, \dots, x_n) = \gamma\}$ (см. (1.1), (1.2)). Поэтому $\#F_1(v) \geq \#\Gamma^+(v, n)$, т.е. при достаточно малом $\varepsilon > 0$

$$r_n(X(G), d_1, S, F(v), \varepsilon) \geq \#\Gamma^+(v, n), \quad v \in V(G).$$

Отсюда с учетом (1.21)–(1.23) получаем

$$h(X(G), d_1, S) \geq \sup_{v \in V(G)} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \#\Gamma^+(v, n),$$

что вместе с (1.26) приводит к (1.25).

Остается рассмотреть графы, которые не являются локально-конечными вперед. Пусть G – такой граф. Ясно, что для него правая часть (1.26) равна бесконечности, и требуется доказать то же самое для левой части.

Для любой вершины $v \in V$ обозначим через $V^+(v)$ множество тех $w \in V$, для которых пара (v, w) служит ребром в G . По предположению найдется вершина $v \in V$, для которой $\#V^+(v)$ – бесконечное множество. Разобьем его на конечные подмножества $V_k^+(v) = \{v_{k,1}, \dots, v_{k,n_k}\}$, $k = 1, 2, \dots$, выбрав n_k так, чтобы выполнялось условие $k = o(\ln n_k)$. Возьмем произвольную периодическую последовательность $x \in X(G)$ с периодом p , для которой $x_0 = v$, и при $k \geq 1$, $n = 1, \dots, n_k$ зафиксируем произвольную последовательность $x^{k,n} = (x_i^{k,n}, i \in \mathbb{Z})$ из $X(G)$, для которой $x_i^{k,n} = x_i$ при $i \leq kp$ и $x_{kp+1}^{k,n} = v_{k,n}$. Пусть F – совокупность полученных таким образом последовательностей. Очевидно, при любом $i \in \mathbb{Z}$ множество $V(F, i)$ конечно и, следовательно, F компактно. Из определения метрики d_1 следует, что при $k \geq 1$ и достаточно малом $\varepsilon \leq 1$ мощность любого $(kp+1, \varepsilon)$ -плотного в F множества не может быть меньше n_k , т.е. $r_{kp+1}(X(G), d_1, S, F, \varepsilon) \geq n_k$. Теперь вследствие выбора n_k мы получаем $h(X(G), d_1, \varepsilon) = \infty$, откуда видно, что $h(X(G), d_1) = \infty$. Теорема доказана.

В следующей теореме сравниваются $h(X(G), d_1, S)$ и $h(X(G), d_2, S)$.

1.12. ТЕОРЕМА [17]. а) Для любого связного графа G

$$h(X(G), d_2, S) \leq h(X(G), d_1, S).$$

б) Для любых $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $1 < \alpha \leq \beta$, найдется такой связный локально-конечный граф G , что

$$h(X(G), d_1, S) = \beta, \quad h(X(G), d_2, S) = \alpha.$$

1.13. ЗАМЕЧАНИЕ. На сегодняшний день остается открытым вопрос о взаимоотношениях между энтропией $h(X(G), S)$ (см. замечание 1.4) и энтропией $h(X(G), d, S)$ для тех или иных метрик d . Есть основания предполагать, что эти энтропии равны, если $d = d_2$.

§ 2. Производящие функции. Неотрицательные матрицы

В дальнейшем изложении основную роль будут играть периодические точки преобразования S и связанные с ними производящие функции.

Пусть

$$\text{Fix}_n(G) = \{x \in X(G) : S^n x = x\}, \quad n \geq 0.$$

Для любого множества $Y \subset X(G)$ и любой функции $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$ положим

$$(2.1) \quad Y_n = Y \cap S^{-1}(X(G) \setminus Y) \cap \dots \cap S^{-n+1}(X(G) \setminus Y), \quad n \geq 1,$$

$$Q_Y(G, f, n) = \sum_{x \in Y \cap \text{Fix}_n(G)} \exp \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k x), \quad n \geq 1,$$

$$(2.2) \quad Q_Y^0(G, f, n) = \sum_{x \in Y_n \cap \text{Fix}_n(G)} \exp \sum_{k=0}^{n-1} f(S^k x), \quad n \geq 1$$

(левые части этих равенств будем считать равными нулю, если соответственно $Y \cap \text{Fix}_n(G) = \emptyset$ и $Y_n \cap \text{Fix}_n(G) = \emptyset$). Положив

$$C(v) = \{x \in X(G) : x_0 = v\}, \quad v \in V(G),$$

назовем пару (G, f) *допустимой*, если $Q_{C(v)}(G, f, n) < \infty$ при всех v и n . Ясно, что для допустимой пары (G, f) все $Q_{C(v)}^0(G, f, n)$ также конечны.

Введем производящие функции

$$(2.3) \quad \varphi(G, f, Y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_Y(G, f, n) z^n,$$

$$(2.4) \quad \varphi^0(G, f, Y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_Y^0(G, f, n) z^n$$

и при $Y = C(v)$ обозначим радиусы сходимости рядов (2.3) и (2.4) через $R(G, f, v)$ и $R^0(G, f, v)$ соответственно. При $Y = X(G)$ будем опускать во всех обозначениях переменную Y .

Большая часть содержания этой статьи относится к случаю, когда $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ (см. определение 1.10). С помощью преобразований редукции и сдвига большую часть излагаемой здесь теории можно обобщить на любые локальные функции. Обобщение на нелокальные функции представляется нам актуальной и вполне разрешимой задачей.

Каждой функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ можно поставить в соответствие функцию $A_f: V(G) \times V(G) \rightarrow \mathbb{R}^+$, определяемую следующим образом: если $(v, v') \notin E(G)$, то $A_f(v, v') = 0$; если $(v, v') \in E(G)$, то $A_f(v, v') = \exp f(x)$, где x – любая последовательность из $X(G)$, для которой $x_0 = v$, $x_1 = v'$. отождествив вершины графа G с натуральными числами, можно считать функцию A_f бесконечной неотрицательной матрицей (от способа отождествления ничего зависеть не будет).

Обратно, если задана неотрицательная матрица $A = (a_{ij})$ (конечная или бесконечная), можно построить ориентированный граф G_A , вершины которого – это номера строк (и столбцов) матрицы A , а ребра – те пары (i, j) , для которых $a_{ij} > 0$. Пусть $x = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in X(G_A)$; положив $f_A(x) = \ln a_{x_0 x_1}$, мы получим функцию $f \in \mathcal{F}_0^1(G_A)$. Очевидно, описанное соответствие между неотрицательными матрицами и парами (G, f) , где G – ориентированный граф и $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, является взаимнооднозначным (с точностью до нумерации вершин). С учетом этого мы часто будем в дальнейшем, имея дело с функциями из $\mathcal{F}_0^1(G)$, заменять во всех обозначениях пару (G, f) матрицей A_f .

Матричный язык окажется особенно удобным в этом и следующих двух параграфах, так как рассматриваемые в них вопросы тесно связаны с теоремой Перрона–Фробениуса для неотрицательных матриц. Если речь идет о конечной неотрицательной матрице A , то согласно этой теореме (см. [18], [19]), A обладает собственным числом $\lambda(A) \geq 0$, которое не меньше абсолютной величины любого другого собственного числа этой матрицы и которому отвечает неотрицательный собственный вектор x_A . Если матрица A неразложима, то $\lambda(A) > 0$, вектор x_A положителен и собственное подпространство, отвечающее $\lambda(A)$, одномерно.

При попытке обобщения теоремы Перрона–Фробениуса на бесконечные матрицы возникает трудность, состоящая в том, что такая матрица не обязательно определяет ограниченный линейный оператор в каком-либо естественном нормированном пространстве бесконечных числовых последовательностей. Тем не менее Вир-Джоунс [20], [21], применив метод производящих функций и воспользовавшись вместо оператора, отвечающего A , аналогом матричных элементов его резольвенты, получил в этом направлении ряд существенных результатов. Сейчас мы изложим некоторые из них в удобной для нас форме, снабдив их необходимыми дополнениями.

Пусть $A = (a_{ij})$ – конечная или бесконечная неотрицательная матрица. Назовем ее *допустимой*, если пара (G_A, f_A) допустима. Это, очевидно, означает, что при каждом $n > 0$ элементы матрицы A^n конечны. В дальнейшем, если не оговорено противное, будем всегда считать рассматриваемые неотрицательные матрицы допустимыми.

При $n \geq 1$, $i, j \in V(G_A)$ рассмотрим множество $\Gamma_{ij}(G_A, n)$, состоящее из G_A -путей $\gamma = (i, i_1, \dots, i_{n-1}, j)$ длины n , которые ведут из i в j , и множество $\Gamma_{ij}^0(G_A, n)$, состоящее из тех $\gamma \in \Gamma_{ij}(G_A, n)$, которые не проходят через j , т.е. удовлетворяют условию

$i_s \neq j$ при $s \neq 0, n$. Назовем A -*весом* пути $\gamma = (i_0, i_1, \dots, i_n)$ число

$$Q(A, \gamma) = \prod_{s=0}^{n-1} a_{i_s i_{s+1}}$$

и введем производящие функции

$$(2.5) \quad \varphi_{ij}(A, z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{\gamma \in \Gamma_{ij}(G_A, n)} Q(A, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ij}(A, n) z^n,$$

$$(2.6) \quad \varphi_{ij}^0(A, z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{\gamma \in \Gamma_{ij}^0(G_A, n)} Q(A, \gamma) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ij}^0(A, n) z^n.$$

Сравнив (2.5), (2.6) с (2.3), (2.4), нетрудно убедиться, что при всяком $n \geq 1$ величины $Q_{ii}(A, n)$ и $Q_{ii}^0(A, n)$, определяемые соотношениями (2.5) и (2.6), равны $Q_{C(i)}(G, f, n)$ и $Q_{C(i)}^0(G, f, n)$ соответственно, вследствие чего

$$\varphi_{ii}(A, z) = \varphi_{C(i)}(G, f, z), \quad \varphi_{ii}^0(A, z) = \varphi_{C(i)}^0(G, f, z).$$

Очевидно, что если матрица A допустима, то все коэффициенты рядов (2.5), (2.6) конечны. Обозначим через $R_{ij}(A)$ и $R_{ij}^0(A)$ их радиусы сходимости, которые, как легко понять, удовлетворяют неравенству $R_{ij}(A) \leq R_{ij}^0(A)$. Заметим также, что при z , лежащем в соответствующем круге сходимости, справедливы тождества

$$(2.7) \quad \varphi_{ij}(A, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{ij}(G_A)} Q(A, \gamma) z^{l(\gamma)}, \quad \varphi_{ij}^0(A, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{ij}^0(G_A)} Q(A, \gamma) z^{l(\gamma)},$$

где $\Gamma_{ij}(G_A) = \bigcup_n \Gamma_{ij}(G_A, n)$, $\Gamma_{ij}^0(G_A) = \bigcup_n \Gamma_{ij}^0(G_A, n)$ и $l(\gamma)$ — длина пути γ .

Хотя следующее утверждение хорошо известно, мы в виде исключения приведем его доказательство (впрочем, очень короткое), так как последнее содержит неравенства, используемые ниже.

2.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (ср. [20]). *Если матрица A неразложима, то*

- (а) $R_{ij}(A)$ не зависит от i, j ;
- (б) $R_{ij}^0(A) \geq R_{jj}^0(A)$ при любых i, j .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вследствие неразложимости A для любых i, j существуют путь γ_{ij} из i в j и путь γ_{ji} из j в i . Пусть $i \neq j$. Легко видеть, что при $n > l(\gamma_{ij}) + l(\gamma_{ji})$ выполняются неравенства

$$(2.8a) \quad Q_{ij}(A, n) \geq Q(A, \gamma_{ij}) Q_{ii}(A, n - l(\gamma_{ij})),$$

$$(2.8b) \quad Q_{ii}(A, n) \geq Q(A, \gamma_{ji}) Q_{ij}(A, n - l(\gamma_{ji})),$$

$$(2.8c) \quad Q_{ii}(A, n) \geq Q(A, \gamma_{ij}) Q(A, \gamma_{ji}) Q_{jj}(A, n - l(\gamma_{ij}) - l(\gamma_{ji})),$$

из которых непосредственно вытекает утверждение (а). Считая γ_{ji} кратчайшим путем из j в i , можно получить аналогичное (2.8b) неравенство

$$(2.8d) \quad Q_{jj}^0(A, n) \geq Q(A, \gamma_{ji}) Q_{ij}^0(A, n - l(\gamma_{ji})),$$

которое приводит к утверждению (б).

Пункт (а) предложения 2.1 – одна из простейших “теорем солидарности”, позволяющая всюду ниже писать $R(A)$ вместо $R_{ij}(A)$. Такие теоремы будут встречаться и в дальнейшем. Из очевидного равенства $R_{ii}(A) = R(G_A, f_A, i)$ следует, что если граф G связан и $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, то $R(G_A, f_A, i)$ не зависит от i и мы можем опустить i в последнем обозначении, что впредь и будем делать.

2.2. ЗАМЕЧАНИЕ. По доказанному $R(A)$ в случае неразложимой матрицы A есть радиус сходимости ряда (2.5) при любых i, j и, следовательно,

$$-\ln R(A) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln Q_{ij}(A, n).$$

При некоторых дополнительных условиях это утверждение можно уточнить. Предположим, что граф G_A апериодичен (это значит, что наибольший общий делитель $d(G_A)$ длин всех циклов в G_A равен единице). Тогда в последнем равенстве при $i = j$ верхний предел можно заменить пределом. Действительно, из определения $Q_{ii}(A, n)$ нетрудно вывести, что $Q_{ii}(A, n + m) \geq Q_{ii}(A, n) Q_{ii}(A, m)$ при любых m и n , а из апериодичности следует, что $Q_{ii}(A, n) > 0$ при всех достаточно больших n (скажем, при $n \geq n_0$). Поэтому последовательность чисел $b_n = -\ln Q_{ii}(A, n)$, $n \geq n_0$, обладает свойством субаддитивности: $b_{m+n} \leq b_m + b_n$, а тогда существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n/n$ (см., например, [2, с. 122]). Если $d(G_A) = d > 1$, то все сказанное сохранится после замены n на nd .

2.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Если A – конечная неразложимая неотрицательная матрица с максимальным собственным числом $\lambda(A)$, то $R(A) = [\lambda(A)]^{-1}$. В самом деле, так как матрица A конечна, из предложения 2.1 следует, что $R(A)$ есть радиус сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \text{tr}(A^n) z^n$. Приведа A к жордановой форме A_1 , убеждаемся затем, что $\text{tr}(A_1^n) = \text{tr}(A^n)$. Но в силу теоремы Перрона–Фробениуса (см. [18, гл. 13]) $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\text{tr}(A_1^n)|^{1/n} = \lambda(A)$.

2.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ср. [20]). Неразложимая неотрицательная матрица A называется *возвратной*, если найдется такое i , что $\varphi_{ii}(A, R(A)) = \infty$, и *положительно-возвратной*, если найдется такое i , что $Q_{ii}(A, n)[R(A)]^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. В противном случае A называется соответственно *невозвратной* и *нуль-возвратной*.

Из определения следует, что если матрица A возвратна, то $R(A) > 0$. Очевидно, это определение сформулировано по аналогии с частным случаем, когда A – стохастическая матрица. Как показывает следующая ниже теорема солидарности, вместо слов “найдется такое i ” в нем можно писать “для любого i ”.

2.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [20]. Если матрица A неразложима, то каждое из соотношений

$$\varphi_{ij}(A, R(A)) = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{ij}(A, n)[R(A)]^n = 0$$

выполняется или не выполняется одновременно для всех пар (i, j) .

Теперь выразим возвратность и положительную возвратность в терминах функций φ_{ii}^0 .

2.6. ЛЕММА. Пусть A – неразложимая неотрицательная матрица и $i \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1) равенства $\varphi_{ii}^0(A, R(A)) = 1$ и $\varphi_{ii}(A, R(A)) = \infty$ эквивалентны;
- 2) при всех i выполняется равенство $R(A) = \min\{R_{ii}^0(A), t_{ii}(A)\}$, где $t_{ii}(A)$ определяется соотношением $\varphi_{ii}^0(A, t_{ii}(A)) = 1$, если $\varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) \geq 1$, и $t_{ii}(A) = \infty$ в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, при любых i, j

$$(2.9) \quad Q_{ji}(A, n) = \begin{cases} Q_{ji}^0(A, n) + \sum_{k=1}^{n-1} Q_{ji}^0(A, k)Q_{ii}(A, n-k), & n \geq 2, \\ a_{ji}, & n = 1, \end{cases}$$

откуда получаем

$$(2.10) \quad \varphi_{ii}(A, z) = \varphi_{ii}^0(A, z)[1 - \varphi_{ii}^0(A, z)]^{-1}, \quad |z| < R(A), \quad i = 1, 2, \dots$$

Пользуясь неотрицательностью коэффициентов $Q_{ii}(A, \cdot)$ и $Q_{ii}^0(A, \cdot)$, из (2.10) (при $i = j$) легко вывести утверждение 1). Что касается утверждения 2), то оно следует из равенства

$$Q_{ii}(A, n) = Q_{ii}^0(A, n) + \sum_{k=2}^n \sum_{n_1 + \dots + n_k = n} Q_{ii}^0(A, n_1) \cdots Q_{ii}^0(A, n_k), \quad i \in V(G_A), \quad n \geq 2,$$

которое, в свою очередь, выводится по индукции из (2.9).

2.7. ТЕОРЕМА [20]. Положительная возвратность неразложимой матрицы A равносильна каждому из следующих трех свойств:

- 1) $\varphi_{ii}^0(A, R(A)) = 1$, $\left. \frac{d}{dt} \varphi_{ii}^0(A, t) \right|_{t=R(A)} < \infty$;
- 2) либо $\varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) > 1$, либо $\varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) = 1$, $\left. \frac{d}{dt} \varphi_{ii}^0(A, t) \right|_{t=R_{ii}^0(A)} < \infty$;
- 3) существуют векторы $y'(A) = (y'_n(A), n = 1, 2, \dots)$ и $y''(A) = (y''_n(A), n = 1, 2, \dots)$ с положительными компонентами, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{jn} y'_n(A) = [R(A)]^{-1} y'_j(A), \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_{nj} y''_n(A) = [R(A)]^{-1} y''_j(A), \quad j = 1, 2, \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y'_n(A) y''_n(A) = 1$$

и определяемые однозначно с точностью до множителя. При этом каждое из свойств 1) и 2) имеет место для всех i , если это верно хотя бы для одного i .

Таким образом, для положительно-возвратных матриц справедлив аналог теоремы Перрона–Фробениуса, в котором $1/R(A)$ играет роль максимального собственного числа.

Из теоремы 2.7 вытекает, что если $A = A_f$, $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, и $R(A) > 0$, то функция f гомологична некоторой ограниченной сверху функции $f_1 \in \mathcal{F}_0^1(G)$, т.е. $f(x) = f_1(x) + g(Sx) - g(x)$, $x \in X(G)$, где g – борелевская функция на $X(G)$. В самом деле, если матрица A положительно-возвратна, то матрица A' с элементами $a'_{ij} = R(A)a_{ij}y'_j(A)/y'_i(A)$ является стохастической, и можно положить

$$f_1(x) = \ln a'_{x_0 x_1} - \ln R(A), \quad g(x) = -\ln y'_{x_0}(A), \quad x = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in X(G).$$

Остается заметить, что если $R(A_f) > 0$, то матрица $A_{f+t\mathbf{1}_{C(v)}}$, где v – произвольная вершина графа G и $C(v) = \{x \in X(G) : x_0 = v\}$, положительно-возвратна при достаточно большом $t > 0$.

Введем теперь еще одно важное понятие.

2.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем положительно-возвратную матрицу A *устойчиво-положительной*, если найдется такое i , что

$$(2.11) \quad \varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) > 1.$$

В противном случае назовем ее *неустойчиво-положительной*.

Из п. 2) леммы 2.6 вытекает, что (2.11) можно переписать в виде

$$(2.12) \quad R_{ii}^0(A) > R(A).$$

Несмотря на то, что $R_{ii}^0(A)$ может зависеть от i , здесь также верна теорема солидарности.

2.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (ср. [20]). *Для неразложимой матрицы A условие устойчивой положительности (2.11) выполняется или не выполняется одновременно при всех i .*

2.10. СЛЕДСТВИЕ. *Для неразложимой матрицы A условие неустойчивой положительности*

$$\varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) = 1, \quad \left. \frac{d}{dt} \varphi_{ii}^0(A, t) \right|_{t=R_{ii}^0(A)} < \infty$$

выполняется или не выполняется одновременно при всех i .

2.11. ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть A – неразложимая матрица и a_{ij} – любой из ее положительных элементов. Заменяя его произвольным $a'_{ij} > 0$ и оставив неизменными остальные элементы матрицы A , получим новую матрицу A' с $G_{A'} = G_A$, для которой, как легко понять, $R_{ii}^0(A') = R_{ii}^0(A)$. Очевидно, при $z \in (0, R_{ii}^0(A))$ имеем $\varphi_{ii}^0(A', z) < \varphi_{ii}^0(A, z)$, если $a'_{ij} < a_{ij}$, и $\varphi_{ii}^0(A', z) > \varphi_{ii}^0(A, z)$, если $a'_{ij} > a_{ij}$. Ясно, кроме того, что $\varphi_{ii}^0(A', z)$ непрерывно зависит от a'_{ij} при фиксированном z из круга сходимости. Поэтому свойства невозвратности и устойчивой положительности матрицы A (при которых соответственно $\varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) < 1$ и $\varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) > 1$) будут наследоваться матрицей A' , если a'_{ij} и a_{ij} достаточно близки, и, наоборот, соотношение $\varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) = 1$ не выдерживает замены A на A' , если только $a'_{ij} \neq a_{ij}$. Отсюда, в частности, следует, что малое возмущение конечного числа элементов невозвратной или устойчиво-положительной матрицы A снова приводит соответственно к невозвратной и устойчиво-положительной матрице. Более того, последнее свойство сохраняется и при замене каждого элемента a_{ij} на a'_{ij} , где $1 - \varepsilon < a'_{ij}/a_{ij} < 1 + \varepsilon$ и ε достаточно мало. Этим оправдывается введенный нами термин “устойчивая положительность”. Впрочем, это свойство можно было бы с равным успехом назвать и “устойчивой возвратностью” (что и сделано в [22]).

Как мы увидим в дальнейшем, устойчиво-положительные матрицы во многом близки по своим свойствам к конечным матрицам, что часто позволяет получать для них результаты, которые, вообще говоря, неверны для более широких классов неотрицательных матриц. По этой причине следующий параграф будет целиком посвящен устойчиво-положительным матрицам. А данный параграф мы завершим рассмотрением одного важного технического вопроса, связанного с отображением n -редукции.

Пусть, как и раньше, G – связный ориентированный граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$ (мы всегда будем предполагать, что $\#V(G) > 1$). В §1 было введено взаимнооднозначное отображение Φ_n , $n \geq 1$, переводящее марковское множество $X(G)$ в марковское множество $\Phi_n X(G) = X(G_n)$, где граф G_n однозначно определяется последним равенством (что позволяет положить по определению $G_n = \Phi_n G$). Ясно, что вершинами этого графа служат все G -пути длины $n - 1$, а ребрами – все пары путей $\gamma = (i_0, \dots, i_{n-1})$, $\gamma' = (i'_0, \dots, i'_{n-1})$, для которых $i'_0 = i_1, i'_1 = i_2, \dots, i'_{n-2} = i_{n-1}$. Отображение Φ_n естественным образом переносится и на функции. Легко проверить, что это отображение, где бы оно ни рассматривалось – на марковских множествах, графах или функциях, – удовлетворяет тождеству $\Phi_k \Phi_l = \Phi_{k+l-1}$. Мы покажем, что свойства матрицы A_f , где $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, наследуются матрицей $A_{\Phi_k f}$ при любом $k \geq 1$.

2.12. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если G – связный граф, $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и $k \geq 2$, то

$$(2.13) \quad R(A_{\Phi_k f}) = R(A_f)$$

и для того чтобы матрица $A_{\Phi_k f}$ была невозвратной, нуль-возвратной, неустойчиво-положительной и устойчиво-положительной, необходимо и достаточно, чтобы соответствующим свойством обладала матрица A_f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ввиду соотношения $\Phi_k \Phi_l = \Phi_{k+l-1}$ можно ограничиться случаем $k = 2$. Положим $G_2 = \Phi_2 G$, $f_2 = \Phi_2 f$, $A = A_f$, $A_2 = A_{f_2}$. Пусть (i, j) – произвольное ребро графа G с $j \neq i$. Пара (i, j) образует вершину графа G_2 и любой цикл

$\gamma \in \Gamma_{(i,j)(i,j)}(G_2, n)$, $n \geq 2$, имеет вид

$$\gamma = ((i, j), (i_1, i_2), \dots, (i_{n-1}, i_n), (i, j)),$$

где $\gamma' = (i_1, \dots, i_n)$ — путь, принадлежащий $\Gamma_{ji}(G, n-1)$. Очевидно, переход от γ к γ' порождает взаимнооднозначное соответствие между множествами $\Gamma_{(i,j)(i,j)}(G_2, n)$ и $\Gamma_{ji}(G, n-1)$. Поэтому (см. определение A_2)

$$(2.14) \quad Q_{(i,j)(i,j)}(A_2, n) = a_{ij}Q_{ji}(A, n-1), \quad n \geq 2, \quad Q_{(i,j)(i,j)}(A_2, 1) = 0,$$

вследствие чего

$$(2.15) \quad R(A_2) = R(A), \quad \varphi_{(i,j)(i,j)}(A_2, z) = a_{ij}z\varphi_{ji}(A, z).$$

Нам потребуется еще соотношение между суммами весов некоторых простых циклов, но в отличие от (2.14) оно будет иметь вид неравенства. Возьмем те же i, j , что и раньше, и зафиксируем кратчайший путь $\gamma_{ji} = (j_0, \dots, j_l)$, ведущий из j в i . Пусть на этот раз

$$\gamma = (i, i_1, \dots, i_{n-1}, i) \in \Gamma_{ii}^0(G, n), \quad n \geq 2, \quad \gamma' = ((i, i_1), (i_1, i_2), \dots, (i_{n-1}, i), (i, j)).$$

Положим

$$\gamma'' = \begin{cases} \gamma', & \text{если } i_1 = j, \\ ((i, j_0), (j_0, j_1), \dots, (j_{l-1}, i))\gamma', & \text{если } i_1 \neq j. \end{cases}$$

Очевидно, в первом случае $\gamma'' \in \Gamma_{(i,j)(i,j)}^0(G_2, n)$, $Q(A_2, \gamma'') = Q(A, \gamma)$, во втором случае $\gamma'' \in \Gamma_{(i,j)(i,j)}^0(G_2, n+l+1)$, $Q(A_2, \gamma'') = a_{ij}Q(A, \gamma)Q(A, \gamma_{ji})$ и в обоих случаях разным γ отвечают разные γ'' . Отсюда получаем неравенство

$$Q_{ii}^0(A, n) \leq Q_{(i,j)(i,j)}^0(A_2, n) + [a_{ij}Q(A, \gamma_{ji})]^{-1}Q_{(i,j)(i,j)}^0(A_2, n+l+1), \quad n \geq 2,$$

приводящее к выводу, что

$$(2.16) \quad R_{(i,j)(i,j)}^0(A_2) \leq R_{ii}^0(A).$$

Из (2.14) сразу следует, что как возвратность, так и положительная возвратность матрицы A_2 равносильны соответствующим свойствам матрицы A (см. определение 2.4 и предложение 2.5).

Чтобы доказать то же самое для устойчивой и неустойчивой положительности, получим из (2.15) с помощью (2.10) соотношение

$$(2.17) \quad \varphi_{(i,j)(i,j)}^0(A_2, z) = \frac{a_{ij}z\varphi_{ji}^0(A, z)}{1 - \varphi_{ii}^0(A, z) + a_{ij}z\varphi_{ji}^0(A, z)}.$$

Предположим теперь, что матрица A устойчиво-положительна, т.е.

$$R_{ji}^0(A) \geq R_{ii}^0(A) > R(A)$$

(см. определение 2.8 и п. (б) предложения 2.1). Тогда найдется такое $r > R(A)$, что в круге $|z| < r$ числитель и знаменатель дроби, стоящей в правой части (2.17), аналитичны и, следовательно, функция $\varphi_{(i,j)(i,j)}^0(A_2, \cdot)$ мероморфна. В силу п. 2) предложения 3.5 (при доказательстве предложения 3.5 используются лишь утверждения, предшествующие предложению 2.12) это означает, что матрица A_2 устойчиво-положительна.

Если, наконец, матрица A неустойчиво-положительна, то $R_{ii}^0(A) = R(A)$ (см. следствие 2.10), откуда с учетом (2.15), (2.16) получаем

$$R(A) = R(A_2) \leq R_{(i,j)(i,j)}^0(A_2) \leq R_{ii}^0(A) = R(A).$$

Следовательно, $R(A_2) = R_{(i,j)(i,j)}^0(A_2)$, а так как по доказанному положительная возвратность матрицы A влечет за собой положительную возвратность матрицы A_2 , последняя может быть лишь неустойчиво-положительной. Предложение доказано.

Введем еще несколько обозначений. Пусть G – произвольный ориентированный граф и $\gamma = (v_0, \dots, v_l)$, $l \geq 2$, – произвольный G -путь. При $0 \leq s \leq t \leq l$ положим $\gamma_s^t = (v_s, \dots, v_t)$. Очевидно, γ_s^t также будет G -путем. Если γ – цикл, то ему можно поставить в соответствие бесконечную периодическую последовательность $\text{per}(\gamma) = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in X(G)$, определяемую равенством $(x_{rl}, x_{rl+1}, \dots, x_{(r+1)l}) = \gamma$, $r \in \mathbb{Z}$. Если $x = (x_i, i \in \mathbb{Z})$ – произвольная точка из $X(G)$, то при каждом $n \geq 0$ ей отвечает конечная последовательность $\gamma^{x,n} = (x_0, \dots, x_n)$, которая, очевидно, является G -путем. Наконец, для любых $v \in V(G)$, $\gamma \in \Gamma(G)$ положим

$$(2.18) \quad C(v) = \{x \in X(G) : x_0 = v\}, \quad C(\gamma) = \{x \in X(G) : (x_0, \dots, x_{l(\gamma)}) = \gamma\}.$$

2.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть заданы связный ориентированный граф G и функция $f \in \mathcal{F}_0^m(X(G))$, $m \geq 1$, удовлетворяющие любому из следующих условий:

- (а) $m = 1$;
- (б) $m \geq 1$, G локально-конечен;
- (в) $m \geq 1$, f ограничена.

Тогда для любых $k \geq m$, $v \in V(G)$ и любого пути γ_0 длины k , выходящего из v , найдутся такие числа B , b и n_0 , что

$$(2.19) \quad Q_{C(v)}(G, f, n) \leq BQ_{C(\gamma_0)}(G, f, n+b) \leq BQ_{C(v)}(G, f, n+b), \quad n \geq n_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $C(\gamma_0) \subset C(v)$, правое неравенство в (2.19) выполняется при любых B , b , и в доказательстве нуждается лишь левое. Пусть v^+ – вершина, в которую входит путь γ_0 (см. определение 1.1). Возьмем, пользуясь связностью G , какой-нибудь путь γ^+ , ведущий из v^+ в v , и образуем путь $\gamma_1 = \gamma_0 \gamma^+$, длина которого равна $l_1 = k + l^+$, где l^+ – длина пути γ^+ . Ясно, что $\gamma_1 \in \Gamma_{vv}(G, k + l^+)$.

Всякой точке $x \in C(v) \cap \text{Fix}_n(G)$, $n \geq 1$, поставим в соответствие точку $x' = \text{per}(\gamma_1 \gamma^{x,n}) \in X(G)$. Очевидно, $x' \in C(\gamma_0) \cap \text{Fix}_{n+l_1}(G)$ и разным x отвечают разные x' . Положив

$$u_n(x) = \exp \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x), \quad u_{n+l_1}(x') = \exp \sum_{j=0}^{n+l_1-1} f(S^j x'),$$

сравним $u_n(x)$ и $u_{n+l_1}(x')$.

Поскольку $f \in \mathcal{F}_0^m(G)$, существует функция $\tilde{f}$, определенная на G -путях длины m , для которой $f(x) = \tilde{f}(\gamma^{x,m})$. В этих обозначениях при любом $n > m$

$$(2.20) \quad u_n(x) = \exp \left[\sum_{i=0}^{n-m} \tilde{f}((\gamma^{x,n})_i^{i+m}) + \sum_{i=n-m+1}^{n-1} \tilde{f}((\gamma^{x,n})_i^n (\gamma^{x,n})_0^{m-n+i}) \right],$$

$$(2.21) \quad u_{n+l_1}(x') = \exp \left[\sum_{i=0}^{l_1-m} \tilde{f}((\gamma_1)_i^{i+m}) + \sum_{i=l_1-m+1}^{l_1-1} \tilde{f}((\gamma_1)_i^{l_1} (\gamma^{x,n})_0^{m-l_1+i}) \right. \\ \left. + \sum_{i=0}^{n-m} \tilde{f}((\gamma^{x,n})_i^{i+m}) + \sum_{i=n-m+1}^{n-1} \tilde{f}((\gamma^{x,n})_i^k (\gamma_1)_0^{m-n+i}) \right]$$

(суммы, в которых верхний индекс больше нижнего, считаются равными нулю). Для двух сумм в правой части (2.20) и четырех сумм в правой части (2.21) введем обозначения $S_{1,1}$, $S_{1,2}$ и $S_{2,1}$, $S_{2,2}$, $S_{2,3}$, $S_{2,4}$ соответственно. Заметим, что S_{21} не зависит от x и n . Поэтому при $m = 1$ (см. условие (а)), когда $S_{1,2} = S_{2,2} = S_{2,4} = 0$, мы имеем $u_n(x) = B_1 u_{n+l_1}(x')$, где $B_1 = \exp(-S_{21})$. В случае (б) существует лишь конечное число путей длины $< m$, входящих в вершину v или выходящих из нее. Поэтому $S_{1,2}$, $S_{2,2}$ и $S_{2,4}$ как функции от x и n принимают конечное число положительных значений, и, следовательно, $u_n(x) \leq B_2 u_{n+l_1}(x')$, где B_2 не зависит от x и n . Наконец, в случае (в) все значения сумм $S_{1,2}$, $S_{2,2}$ и $S_{2,4}$ лежат между $m \min_{x \in X(G)} f(x)$ и $m \max_{x \in X(G)} f(x)$, и мы приходим к тому же неравенству. Остается заметить, что из него непосредственно вытекает (2.19), если положить $b = l_1$, $n_0 = m+1$. Предложение доказано.

2.14. СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия предложения 2.13, то

$$R(\Phi_k G, \Phi_k f) = R(G, f, v), \quad v \in V(G).$$

§ 3. Критерии устойчивой положительности

В этом параграфе мы с разных сторон охарактеризуем устойчиво-положительные матрицы (см. также § 10). Некоторые из приводимых ниже свойств этих матриц, внешне совершенно различные, в действительности оказываются эквивалентными самой устойчивой положительности и, значит, друг другу. Начнем с простейшего случая.

3.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Всякая конечная неразложимая матрица A устойчиво-положительна, и для такой матрицы функции $\varphi_{ii}(A, \cdot)$ и $\varphi_{ii}^0(A, \cdot)$ рациональны.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть A – матрица, о которой идет речь в формулировке, и $V = V(G_A)$ – множество вершин отвечающего ей графа G_A . Из очевидного равенства

$$Q_{ij}(A, n) = \sum_{k \in V} a_{ik} Q_{kj}(A, n-1), \quad i, j \in V, \quad n \geq 2,$$

вытекает, что

$$\varphi_{ij}(A, z) = z \left[a_{ij} + \sum_{k \in V} a_{ik} \varphi_{kj}(A, z) \right].$$

При фиксированном j эти соотношения можно рассматривать как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\varphi_{ij}(A, z)$. Так как это конечная система, ее можно решать по правилу Крамера, откуда видно, что функции $\varphi_{ij}(A, \cdot)$ рациональны. В силу (2.10) функции $\varphi_{ii}^0(A, \cdot)$ тоже рациональны. Следовательно, $R_{ii}^0(A) = |z_i|$, где z_i – ближайший к началу координат полюс функции $\varphi_{ii}^0(A, \cdot)$, если у нее действительно есть полюса, и $R_{ii}^0(A) = \infty$, если эта функция – многочлен. Так как в круге $|z| < |z_i|$ эта функция разлагается в ряд с неотрицательными коэффициентами, можно утверждать, что

$$\varphi_{ii}^0(A, |z_i|) \geq \lim_{z \rightarrow z_i} |\varphi_{ii}^0(A, z)| = \infty.$$

Тем самым доказано, что $\varphi_{ii}^0(A, R_{ii}^0(A)) = \infty$ при всех $i \in V$ и, значит, матрица A устойчиво-положительна.

Теперь остановимся на структуре множества $\mathcal{R}(A) = \{R_{ii}^0(A), i = 1, 2, \dots\}$. Как следует из леммы 2.6 и теоремы 2.7, это множество во всех случаях, кроме случая устойчивой положительности, состоит из единственной точки $R(A)$. В [21] приведен пример бесконечной матрицы A , для которой множество $\mathcal{R}(A)$ бесконечно. Следующее предложение показывает, что для любой устойчиво-положительной матрицы дело обстоит точно так же.

3.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть A – неразложимая устойчиво-положительная матрица. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ множество таких i , что $R_{ii}^0(A) > R(A) + \varepsilon$, конечно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксировав произвольное j , рассмотрим функцию $\varphi_{jj}(A, \cdot)$. Так как матрица A устойчиво-положительна, выполняются неравенство $R_{jj}^0(A) > R(A)$ (см. предложение 2.5 и п. 2 леммы 2.6) и равенство $\varphi_{jj}^0(A, R(A)) = 1$. Поэтому (см. (2.7)) найдутся конечное множество путей $\Gamma_\varepsilon \subset \Gamma_{jj}^0(G_A)$ и число $t_\varepsilon > 0$, для которых

$$(3.1) \quad R(A) < t_\varepsilon < R(A) + \varepsilon, \quad \varphi_\varepsilon(t_\varepsilon) = 1,$$

где

$$\varphi_\varepsilon(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_\varepsilon} Q(A, \gamma) z^{l(\gamma)}$$

($t_\varepsilon > 0$ определяется равенством $\varphi_\varepsilon(t_\varepsilon) = 1$ однозначно).

Обозначим через A_ε произвольную неразложимую конечную подматрицу матрицы A , для которой $\Gamma_\varepsilon \subset \Gamma_{jj}^0(A_\varepsilon)$. В силу теоремы 2.7 $R(A_\varepsilon) \leq t_\varepsilon$.

Для произвольной вершины $i \notin V(G_{A_\varepsilon})$ зафиксируем кратчайший путь γ_{ij} из i в j и кратчайший путь γ_{ji} из j в i (если кратчайших путей несколько, возьмем в каждом случае любой из них). Очевидно, эти пути содержат i лишь в качестве начальной и конечной точки соответственно. Поэтому для любого $z > 0$

$$\varphi_{ii}^0(A, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{ii}^0(G_A)} Q(A, \gamma) z^{l(\gamma)} \geq Q(A, \gamma_{ij}) Q(A, \gamma_{ji}) z^{l(\gamma_{ij}) + l(\gamma_{ji})} \varphi_{jj}(A_\varepsilon, z),$$

откуда видно, что $R_{ii}^0(A) \leq R(A_\varepsilon)$. Вместе с (3.1) и полученным выше неравенством $R(A_\varepsilon) \leq t_\varepsilon$ это приводит к выводу, что $R_{ii}^0(A) < R(A) + \varepsilon$. Предложение доказано.

В силу этого предложения бесконечность множества $\mathcal{R}(A)$ может служить критерием устойчивой положительности. Прежде чем переходить к другим критериям, напомним следующее определение.

3.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – ориентированный граф и $d(G)$ – наибольший общий делитель длин всех его циклов. Число $d(G)$ называется *периодом* графа G ; если $d(G) = 1$, то G называется *апериодическим* графом.

В случае, когда неотрицательной матрице A отвечает апериодический граф G_A , будем называть апериодической и саму эту матрицу.

Легко видеть, что если граф G связан, то $d(G)$ совпадает с наибольшим общим делителем длин циклов, составляющих каждое из множеств $\Gamma_{vv}(G)$ и $\Gamma_{vv}^0(G)$, где v – произвольная вершина.

Следующий простой факт потребуется не только здесь, но и в гл. 3.

3.4. ЛЕММА. Пусть $\varphi(z)$ и $R_0 \in (0, \infty)$ – соответственно сумма и радиус сходимости степенного ряда с коэффициентами $a_n \geq 0$, $n = 1, 2, \dots$, и при некотором $R < R_0$ выполняется равенство $\varphi(R) = 1$. Тогда найдется такое $r \in (R, R_0)$, что множество нулей функции $1 - \varphi(z)$, лежащих в круге $|z| \leq r$, имеет вид

$$U = \{R \exp(2\pi i k/d), 0 \leq k \leq d-1\},$$

где d – наибольший общий делитель (НОД) тех n , для которых $a_n > 0$, причем все эти нули – простые.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения U и d видно, что $\varphi(z) = \varphi(R) = 1$ при всех $z \in U$, а вследствие неотрицательности коэффициентов a_n и равенства $\varphi(R) = 1$ функция $1 - \varphi(z)$ не может иметь нулей в круге $|z| < R$. Поэтому найдется такое $r \in (R, R_0)$, что все ее нули в круге $|z| < r$ лежат на окружности $|z| = R$. Положим $J = \{n : a_n > 0\}$ и пусть при некотором $z = R \exp(2\pi i \alpha)$, где $0 \leq \alpha < 1$, выполняется равенство $\varphi(z) = 1$. Так как $a_n \geq 0$ при всех n , это возможно лишь в случае, когда $n\alpha \in \mathbb{Z}$ при всех $n \in J$. Пусть теперь $s \geq 1$ и $n_1, \dots, n_s$ таковы, что $\text{НОД}\{n_1, \dots, n_s\} = d$. Подбрав $k_1, \dots, k_s \in \mathbb{Z}$ так, что $k_1 n_1 + \dots + k_s n_s = d$, и воспользовавшись условием $n_j \alpha \in \mathbb{Z}$, $j = 1, \dots, s$, приходим к выводу, что $d\alpha \in \mathbb{Z}$, т.е. $\alpha = k/d$, где $k \in \{0, \dots, d-1\}$.

Что касается простоты нулей функции $1 - \varphi(z)$ в точках $z \in U$, то она вытекает из очевидного неравенства $z\varphi'(z) > 0$, $z \in U$. Лемма доказана.

Перейдем к критерию устойчивой положительности, связанному с аналитическими свойствами функций φ_{ii} . Для этого положим

$$(3.2) \quad R^*(A) = \sup\{R_{ii}^0(A), i = 1, 2, \dots\}.$$

В силу предложения 3.2 точную верхнюю грань здесь можно заменить на максимум, причем он достигается лишь в конечном числе точек.

Ниже мы иногда используем обозначение $C(\rho)$ для круга $\{z : |z| < \rho\}$, $\rho > 0$, на комплексной плоскости. Всякую функцию, определенную в $C(\rho)$ и аналитическую всюду за исключением, быть может, конечного числа полюсов, будем называть мероморфной в $C(\rho)$.

3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) Если неразложимая матрица A устойчиво-положительна, то при любом i функции $\varphi_{ii}(A, \cdot)$ и $\varphi_{ii}^0(A, \cdot)$ продолжаются до мероморфных функций в круге $C(R^*(A))$, причем существует такое $r > R(A)$ (не зависящее от i), что особенности каждой из функций $\varphi_{ii}(A, \cdot)$ в круге $C(r)$ исчерпываются простыми полюсами в точках $R(A) \exp(2\pi i k/d(G_A))$, $0 \leq k \leq d(G_A) - 1$.

2) Если для неразложимой матрицы A с $R(A) > 0$ найдется такое i , что при некотором $r > R(A)$ функция $\varphi_{ii}(A, \cdot)$ продолжается до мероморфной функции в круге $C(r)$, то матрица A устойчиво-положительна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Если A – устойчиво-положительная матрица, то $R(A) > 0$ и в силу п. 2 леммы 2.6 и предложения 2.9 при всех i выполняется неравенство $R_{ii}^0(A) > R(A)$. В таком случае соотношение (2.10) реализует аналитическое продолжение функции $\varphi_{ii}(A, \cdot)$ в круг $C(R_{ii}^0(A))$, причем из очевидного неравенства

$$\left. \frac{d}{dz} \varphi_{ii}^0(A, z) \right|_{z=R(A)} > 0$$

вытекает простота полюса в точке $R(A)$.

Теперь зафиксируем произвольное i , для которого $R_{ii}^0(A) = R^*(A)$ и, следовательно, функция $\varphi_{ii}^0(A, \cdot)$ аналитична в круге $C(R^*(A))$. Воспользовавшись леммой 3 из [21], можно утверждать, что при любом j функция $\varphi_{jj}^0(A, \cdot)$ мероморфна в этом круге и $\varphi_{jj}^0(A, z) \neq 1$ во всех точках z , где $\varphi_{ii}^0(A, z) \neq 1$. Но тогда (см. (2.10)) и функция $\varphi_{ii}(A, \cdot)$ мероморфна в том же круге, а в силу леммы 3.4 найдется такое $r > R(A)$, что все ее особенности в круге $C(r)$ исчерпываются простыми полюсами в точках, указанных в формулировке (очевидно, можно положить $r = \min\{|z| : |z| > R(A), \varphi_{ii}^0(A, z) = 1\}$).

2) Пусть A обладает свойствами, указанными в условии. Тогда с помощью соотношения (2.10), переписанного при $j = i$ в виде

$$(3.3) \quad \varphi_{ii}^0(A, z) = \varphi_{ii}(A, z)(1 + \varphi_{ii}(A, z))^{-1}, \quad |z| < R(A),$$

функцию $\varphi_{ii}^0(A, \cdot)$ можно аналитически продолжить на множество $C(r) \setminus F$, где $F = \{z : \varphi_{ii}(A, z) = -1\}$.

Из (3.3) и леммы 2.6 следует, что F не пересекается с кругом $C(R(A))$. Но F не пересекается и с его замыканием. Действительно, вследствие мероморфности $\varphi_{ii}(A, \cdot)$ у каждой точки $z_0 \in F \cap C(r)$ найдется окрестность, в которой эта функция аналитична. Отсюда следует, что если $|z_0| = R(A)$, то $\varphi_{ii}(A, z_n) \rightarrow -1$ при $n \rightarrow \infty$ для любой последовательности точек $z_n \in C(R(A))$, сходящейся к z_0 . Тогда $|\varphi_{ii}^0(A, z_n)| \rightarrow \infty$ (см. (3.3)) и, тем более, $\varphi_{ii}^0(A, |z_n|) \rightarrow \infty$. Так как $|z_n| \rightarrow R(A)$, последнее означает, что $\varphi_{ii}^0(A, R(A)) = \infty$. Но это противоречит п. 2 леммы 2.6. Таким образом, не существует точек $z \in F$, для которых $|z| \leq R(A)$. Поэтому найдется такое $r_1 \in (R(A), r)$, что $F \cap C(r_1) = \emptyset$, и следовательно, функция $\varphi_{ii}^0(A, \cdot)$ аналитична в круге $C(r_1)$, т.е. $R_{ii}^0(A) \geq r_1 > R(A)$. В силу того же п. 2 леммы 2.6 отсюда вытекает устойчивая положительность матрицы A . Предложение доказано.

Теперь свяжем устойчивую положительность с асимптотическим поведением коэффициентов ряда $\varphi_{ii}^0(A, \cdot)$. Особенно просто эта связь выглядит в случае стохастических матриц.

3.6. ОПРЕДЕЛЕНИЕ (ср. [23]). Назовем стохастическую матрицу A *геометрически эргодической*, если существуют такие $\rho \in (0, 1)$, $c_{ij} > 0$, $q_j > 0$ ($i, j \in \mathbb{N}$), что

$$|Q_{ij}(A, n) - q_j| \leq c_{ij} \rho^n, \quad i, j, n \in \mathbb{N}.$$

Следующий факт, по существу, содержится в [21].

3.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Неразложимая возвратная стохастическая матрица является геометрически эргодической в том и только том случае, когда она апериодична и устойчиво-положительна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть матрица A апериодична и устойчиво-положительна. Из ее стохастичности и возвратности следует, что $R(A) = 1$ (см. п. 1 леммы 2.6). Пользуясь предложением 3.1, будем считать все функции $\varphi_{ii}(A, \cdot)$ определенными в круге $C(r)$, $r > 1$, где они имеют своей единственной особенностью простой полюс в точке 1. Это значит, что при каждом i функция $\psi_{ii}(z) = (z - 1)\varphi_{ii}(A, z)$ аналитична в упомянутом круге. Разложив ее в ряд

$$\psi_{ii}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_i(n) z^n, \quad |z| < r,$$

убеждаемся, что

$$b_i(1) = -Q_{ii}(A, 1), \quad b_i(n) = Q_{ii}(A, n-1) - Q_{ii}(A, n), \quad n \geq 2.$$

В силу неравенства Коши

$$|b_i(n)| \leq c_i(\rho) \rho^{-n}, \quad n \geq 1,$$

где ρ – любое число из интервала $(1, r)$ и $c_i(\rho) = \max_{|z|=\rho} |\psi_{ii}(z)|$. Но тогда

$$|Q_{ii}(A, n) - q_i| \leq \frac{c_i(\rho)}{\rho - 1} \rho^{-n},$$

где q_i – стационарные вероятности цепи Маркова с матрицей перехода A . Согласно [21] отсюда вытекает геометрическая эргодичность.

Обратно, пусть матрица A геометрически эргодична. Очевидно, тогда она апериодична, а из ее возвратности следует, что $R(A) = 1$. Повторив теперь только что проведенное рассуждение в обратном порядке, приходим к выводу, что функция $(z - 1)\varphi_{ii}(A, z)$ аналитична в некотором круге $C(r)$, где $r > 1$. В силу п. 2 предложения 3.5 это означает, что матрица A устойчиво-положительна. Предложение доказано.

Обратимся к критерию устойчивой положительности, основанному на совершенно другой идее. Прежде всего заметим, что в случае стохастической матрицы устойчивая положительность влечет за собой весьма сильные свойства возвратности соответствующей цепи Маркова: частица, совершающая случайное блуждание, описываемое

этой цепью, имеет тенденцию держаться вблизи своего начального положения. Доказываемая ниже теорема 3.8 утверждает, что устойчивую положительность можно интерпретировать как стремление такой частицы оставаться внутри некоторого конечного множества, содержащего точку, из которой она вышла. В дальнейшем мы увидим, что эта теорема служит своеобразным критерием компактности для последовательности гиббсовских мер, связанных с конечными подматрицами матрицы A . Чтобы сформулировать ее, необходимо ввести еще несколько понятий.

Назовем *подматрицей* матрицы A результат последовательного проведения двух операций: замены нулями произвольных элементов a_{ij} и вычеркивания при каждом i строки и столбца с номером i , если они целиком состоят из нулей (эта терминология немного отличается от общепринятой). В дальнейшем явное указание на вторую из этих операций будет, как правило, опускаться. Включение $A' \subset A$ будет означать, что A' – подматрица матрицы A . Если подматрицу можно получить путем вычеркивания строк и столбцов с одинаковыми номерами, то она называется *главной*. Множество номеров строк (и столбцов) главной подматрицы A' будем называть ее *носителем* и обозначать $\text{supp}(A')$. Как и в §2, поставим в соответствие матрице A ориентированный граф G_A с множеством вершин $V = V(G_A)$. Точно так же, всякой подматрице $A' \subset A$ отвечает подграф $G_{A'}$ графа G_A (будем писать $G_{A'} \subset G_A$), и, как нетрудно понять, переход от A' к $G_{A'}$, рассматриваемый лишь на множестве неразложимых подматриц, реализует взаимнооднозначное соответствие между этим множеством и множеством связных подграфов графа G_A . Подграфы $G_{A'} \subset G_A$, отвечающие главным подматрицам $A' \subset A$, будем называть *главными подграфами*. Очевидно, множество вершин $V(G_{A'})$ такого подграфа совпадает с $\text{supp}(A')$, а его ребрами служат те и только те ребра графа G_A , которые ведут из $V(G_{A'})$ в $V(G_{A'})$.

Пусть V' – произвольное подмножество множества $V(G_A) = \text{supp}(A)$. Для любого $n \geq 1$ и любых $i, j \in V$ введем множество $\Gamma_{ij}(G_A, n | V')$, состоящее из тех путей $\gamma \in \Gamma_{ij}(G_A, n)$, которые не проходят через V' (здесь не исключается, что $i, j \in V'$, см. определение 1.1). Пусть $Q_{ij}(A, n | V')$ – сумма весов всех этих путей и

$$(3.4) \quad \varphi_{ij}(A, z | V') = \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ij}(A, n | V') z^n.$$

Обозначив через $r_{ij}(A | V')$ радиус сходимости ряда (3.4), положим

$$r(A | V') = \inf_{i, j \in V'} r_{ij}(A | V').$$

3.8. ТЕОРЕМА. *Для устойчивой положительности бесконечной неразложимой матрицы A необходимо и достаточно, чтобы у нее нашлась конечная неразложимая главная подматрица B , удовлетворяющая неравенству*

$$(3.5) \quad R(B) \leq r(A | \text{supp}(B)).$$

Для частного случая матриц, состоящих из нулей и единиц, достаточность этого условия установлена в [24].

Прежде чем доказывать теорему, введем одно новое понятие и докажем лемму, которая будет использована также в §6 этой статьи.

3.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем последовательность конечных подграфов $G^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$, бесконечного графа G *исчерпывающей*, если $G^{(n)} \subset G^{(n+1)}$, $\bigcup_n V(G^{(n)}) = V(G)$ и $\bigcup_n E(G^{(n)}) = E(G)$. Последовательность конечных подматриц $A^{(n)}$ бесконечной матрицы A будем называть *исчерпывающей*, если $\{G_{A^{(n)}}\}$ – исчерпывающая последовательность подграфов графа G_A .

3.10. ЛЕММА. 1) *Всякая неразложимая неотрицательная бесконечная матрица A обладает исчерпывающей последовательностью неразложимых главных подматриц.*

2) *Если $\{A^{(n)}\}$ – любая такая последовательность, то существует предел*

$$(3.6) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R(A^{(n)}) = R^+(A),$$

зависящий только от A (но не от $\{A^{(n)}\}$); если при этом матрица A допустима, то $R^+(A) = R(A)$.

3) *Если $R^+(A) > 0$, то матрица A допустима.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Отождествляя, как и прежде, вершины графа G_A с натуральными числами, зафиксируем для каждой вершины k произвольный цикл γ_k , содержащий 1 и k . Пусть W_k – множество вершин, составляющих этот цикл, и $V_n = \bigcup_{k \leq n} W_k$. Рассмотрим главный подграф $G^{(n)}$ графа G_A с $V(G^{(n)}) = V_n$ и возьмем в качестве $A^{(n)}$ главную подматрицу матрицы A , определяемую условием $\text{supp}(A^{(n)}) = V_n$. Легко видеть, что тем самым построена исчерпывающая последовательность неразложимых главных подматриц.

2) Пусть $\{A^{(n)}\}$ – произвольная последовательность подматриц, обладающая указанными свойствами. Теорема Перрона–Фробениуса и замечание 2.2 позволяют утверждать, что $0 < R(A^{(n)}) < \infty$, $n = 1, 2, \dots$. Из определения непосредственно вытекает, что $R(A^{(n)})$ – невозрастающая последовательность. Поэтому существует предел (3.6). Взяв любую другую последовательность подматриц с теми же свойствами, легко убедиться, что этот предел не изменится. Если матрица A допустима, то, очевидно, $R^+(A) \geq R(A)$. Согласно предложению 3.1 при каждом n матрица $A^{(n)}$ устойчиво-положительна и, следовательно, возвратна. Поэтому для всякой вершины $i \in V_n$ выполняется равенство $\varphi_{ii}^0(A^{(n)}, R(A^{(n)})) = 1$ (см. п. 1 леммы 2.6). Что касается матрицы A , то $\varphi_{ii}^0(A, R(A)) \leq 1$ (см. п. 2 леммы 2.6). Следовательно (см. (2.7)), справедливы соотношения

$$(3.7) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_{ii}^0(G_A)} Q(A, \gamma) [R(A)]^{l(\gamma)} \leq 1,$$

$$(3.8) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_{ii}^0(G_{A^{(n)}})} Q(A^{(n)}, \gamma) [R(A^{(n)})]^{l(\gamma)} = 1.$$

Взяв в качестве i любую вершину из V_1 , можно считать (3.7), (3.8) выполненными при всех n .

Предположим, что $R^+(A) > R(A)$, и зафиксируем произвольную точку r интервала $(R(A), R^+(A))$. Тогда

$$(3.9) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_{ii}^0(G_A)} Q(A, \gamma) r^{l(\gamma)} > 1.$$

В самом деле, если в (3.7) достигается равенство, то (3.9) вытекает из неравенства $r > R(A)$; если же в (3.7) имеет место строгое неравенство, то в силу п. 2 леммы 2.6 $R_{ii}^0(A) = R(A)$, и левая часть (3.9) равна бесконечности (она может быть конечна лишь в случае, когда матрица A устойчиво-положительна). С другой стороны, в силу (3.8) при любом n справедливо неравенство

$$(3.10) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_{ii}^0(G_{A(n)})} Q(A^{(n)}, \gamma) r^{l(\gamma)} < 1.$$

Заметим теперь, что, во-первых, $Q(A^{(n)}, \gamma) = Q(A, \gamma)$ для любого пути $\gamma \in \Gamma_{ii}^0(A^{(n)})$ и, во-вторых, неравенство (3.9), очевидно, останется справедливым, если в его левой части заменить множество $\Gamma_{ii}^0(A)$ на его достаточно большое конечное подмножество Γ' . Но всякое такое Γ' будет частью множества $\Gamma_{ii}^0(A^{(n)})$ при любом достаточно большом n . Поэтому справедливость (3.9) для Γ' противоречит (3.10). Тем самым равенство $R^+(A) = R(A)$ доказано.

3) Это утверждение составляет часть теоремы С в [25], поэтому его доказательство (достаточно простое) мы опустим.

3.11. ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Лемма 3.10 позволяет обобщить определение $R(A)$ на любые неразложимые неотрицательные матрицы, не заботясь об их допустимости, а именно, отождествить $R(A)$ с $R^+(A)$.

2) Для любой неотрицательной матрицы A (не обязательно неразложимой) положим

$$\lambda(A) = \sup_{A' \subset A} \lambda(A'),$$

где $\lambda(A')$ – максимальное собственное число конечной подматрицы $A' \subset A$ и $\sup$ берется по всем таким подматрицам. Если бесконечная матрица A неразложима, то в силу леммы 3.10 для нее сохраняется соотношение $R(A) = [\lambda(A)]^{-1}$ (см. замечание 2.3).

3.12. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.8. Начнем с установления нескольких фактов, которые будут использованы ниже как при доказательстве необходимости условия теоремы, так и при доказательстве его достаточности. Пусть A – неразложимая неотрицательная бесконечная матрица, B – ее конечная неразложимая главная подматрица и $W = \text{supp}(B)$. Как и раньше, обозначим через G_B главный подграф графа G_A , определяемый равенством $V(G_B) = W$. Для любых $i, j, k \in W$ и $n \geq 1$ выделим в множестве $\Gamma_{ij}(G_A, n | k)$ (здесь и в аналогичных ситуациях ниже мы пишем k вместо $\{k\}$) подмножество $\Gamma_{ij}(G_B, n | k)$, состоящее из всех путей $\gamma \in \Gamma_{ij}(G_A, n | k)$, являющихся G_B -путями, и подмножество $\Gamma_{ij}(G_B, G_A, n | k)$, состоящее из всех путей $\gamma \in \Gamma_{ij}(G_A, n | k)$ вида $\gamma = \gamma_1 \gamma_2$ и $\gamma = \gamma_2$, где γ_1 – G_B -путь, ведущий из i в какую-либо вершину $p \in W$, а γ_2 – G_A -путь длины ≥ 2 , ведущий из p в j и не проходящий через W (ясно, что если $\gamma = \gamma_2$, то $p = i$). Очевидно, эти подмножества не пересекаются. Пусть $Q_{ij}(B, n | k)$ и $Q_{ij}(B, A, n | k)$ – суммы весов всех путей, входящих в $\Gamma_{ij}(G_B, n | k)$ и в $\Gamma_{ij}(G_B, G_A, n | k)$ соответственно. Для удобства будем считать, что $Q_{ij}(B, n | k)$, $Q_{ij}(B, A, n | k)$ определены при всех $n \in \mathbb{Z}$ и равны нулю при $n \leq 0$ (впрочем, из определения видно, что $Q_{ij}(A, B, n | k) = 0$ и при $n = 1$). Введем

производящие функции

$$\begin{aligned}\varphi_{ij}(B, z | k) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ij}(B, n | k) z^n, \\ \varphi_{ij}(B, A, z | k) &= \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ij}(B, A, n | k) z^n\end{aligned}$$

и обозначим соответственно через $r_{ij}(B | k)$, $r_{ij}(B, A | k)$ радиусы сходимости этих степенных рядов.

Из определения чисел $Q_{ij}(B, n | k)$, $Q_{ij}(B, A, n | k)$ и очевидного равенства

$$Q(A, \gamma_1 \gamma_2) = Q(A, \gamma_1) Q(A, \gamma_2)$$

непосредственно вытекает, что при любых $i, j, k \in W$ и любом $n \geq 2$

$$(3.11) \quad Q_{ij}(B, A, n | k) = Q_{ij}(A, n | W) + \sum_{p \in W \setminus \{k\}} \sum_{m=1}^{n-2} Q_{ip}(B, m | k) Q_{pj}(A, n-m | W).$$

Отсюда получаем тождество

$$\varphi_{ij}(B, A, z | k) = \varphi_{ij}(A, z | W) + \sum_{p \in W \setminus \{k\}} \varphi_{ip}(B, z | k) \varphi_{pj}(A, z | W),$$

а из него – следующее соотношение между радиусами сходимости (вытекающее из неотрицательности коэффициентов всех этих рядов):

$$(3.12) \quad r_{ij}(B, A | k) = \min_{p \in W} \min(r_{pj}(A | W), r_{ip}(B | k)), \quad i, j, k \in W.$$

Ниже нам понадобятся еще некоторые соотношения между производящими функциями. Рассмотрим произвольный путь γ из $\Gamma_{ij}(G_A, n | j)$, $n \geq 1$. Если он не принадлежит множеству

$$\Gamma_{ij}(G_B, n | j) \cup \Gamma_{ij}(G_B, G_A, n | j),$$

то при некоторых $k \in W \setminus \{j\}$, $m \in [2, n-1]$ его можно однозначным образом представить в виде $\gamma = \gamma' \gamma''$, где

$$\gamma' \in \Gamma_{ik}(G_B, G_A, m | j), \quad \gamma'' \in \Gamma_{kj}(G_A, n-m | j).$$

Обратно, если γ' , γ'' – любые пути из только что указанных множеств, то, как легко понять, $\gamma = \gamma' \gamma''$ – G_A -путь, принадлежащий $\Gamma_{ij}(G_A, n | j)$, но не принадлежащий $\Gamma_{ij}(G_B, n | j) \cup \Gamma_{ij}(G_B, G_A, n | j)$. Отсюда получаем

$$(3.13) \quad \begin{aligned}Q_{ij}(A, n | j) &= Q_{ij}(B, n | j) + Q_{ij}(B, A, n | j) \\ &+ \sum_{k \in W \setminus \{j\}} \sum_{m=2}^{n-1} Q_{ik}(B, A, m | j) Q_{kj}(A, n-m | j),\end{aligned}$$

что приводит к тождеству

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \varphi_{ij}(A, z | j) &= \varphi_{ij}(B, z | j) + \varphi_{ij}(B, A, z | j) \\ &+ \sum_{k \in W \setminus \{j\}} \varphi_{ik}(B, A, z | j) \varphi_{kj}(A, z | j), \quad i, j \in W, \end{aligned}$$

справедливому для тех z , при которых сходятся все степенные ряды, фигурирующие в его правой части. При $i = j$ оно принимает вид

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \varphi_{jj}(A, z | j) &= \varphi_{jj}(B, z | j) + \varphi_{jj}(B, A, z | j) \\ &+ \sum_{k \in W \setminus \{j\}} \varphi_{jk}(B, A, z | j) \varphi_{kj}(A, z | j), \quad j \in W, \end{aligned}$$

откуда, в частности, получаем

$$(3.16) \quad r_{jj}(A | j) \leq \min_{k \in W} r_{jk}(B, A | j), \quad j \in W.$$

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы.

Необходимость. Пусть матрица A устойчиво-положительна. Согласно определению 2.8, предложению 2.9 и п. 2 леммы 2.6 это означает, что $R_{ii}^0(A) > R(A)$ для любого i . Тогда в силу леммы 3.10 у A найдется неразложимая конечная главная подматрица B , для которой $R(B) \leq R_{ii}^0(A)$. Пусть G_B – отвечающий ей главный подграф графа G_A и W – множество его вершин, т.е. $W = \text{supp}(B)$. Не ограничивая общности, будем считать, что $i \in W$. Заметим, что по определению $r_{ii}(A | i)$ есть не что иное, как $R_{ii}^0(A)$. С учетом этого из (3.15), (3.12) получаем

$$R(B) \leq r_{ii}(A | i) \leq \min_{j \in W} r_{ij}(B, A | i) \leq \min_{j, p \in W} r_{pj}(A | W) = r(A | W).$$

Тем самым доказано, что для выбранной подматрицы B выполняется неравенство (3.5).

Достаточность. Пусть B – подматрица, для которой выполняются условия теоремы. Тогда в силу (3.5)

$$r_{pj}(A | W) \geq r(A | W) \geq R(B), \quad p, j \in W,$$

а в силу предложения 2.1

$$(3.17a) \quad r_{ip}(B | k) \geq R_{ip}(B) = R(B), \quad i, p, k \in W,$$

откуда с помощью (3.12) получаем

$$(3.17b) \quad r_{ij}(B, A | k) \geq R(B), \quad i, j, k \in W.$$

Теперь воспользуемся тождеством (3.14). Зафиксировав в нем произвольное $j \in W$ и беря всевозможные $i \in W$, будем рассматривать полученный набор соотношений как систему линейных уравнений относительно неизвестных $\varphi_{ij}(A, z | j)$. По правилу Крамера

$$(3.18) \quad \varphi_{ij}(A, z | j) = \Delta_{ij}(z) / \Delta_j(z), \quad i \in W,$$

где определители $\Delta_{ij}(z)$ и $\Delta_j(z)$ являются многочленами от $\varphi_{ij}(B, z | j)$ и $\varphi_{ik}(B, A, z | j)$, $i, k \in W$. Подставив (3.18) в (3.15), получим

$$(3.19) \quad \varphi_{jj}(A, z | j) = \varphi_{jj}(B, z | j) + \varphi_{jj}(B, A, z | j) + [\Delta_j(z)]^{-1} \sum_{k \in W \setminus \{j\}} \Delta_{kj}(z) \varphi_{jk}(B, A, z | j).$$

Обозначим правую часть (3.19) через $\psi_j(z)$. В силу (3.17a), (3.17b) ψ_j представляет собой мероморфную функцию в круге $|z| < R(B)$. Предположим, что она имеет в этом круге особые точки (полюса). Тогда (3.19) выполняется в меньшем круге, $|z| < |z_0|$, где z_0 – ближайший к началу координат полюс. Ясно, что в этом случае $r_{jj}(A | j) = |z_0|$, а так как коэффициенты ряда $\varphi_{jj}(A, \cdot)$ неотрицательны, мы приходим к выводу, что

$$\varphi_{jj}(A, |z_0| | j) \geq |\varphi_{jj}(A, z_0 | j)| = \infty.$$

Предположим теперь, что функция ψ_j аналитична во всем круге $|z| < R(B)$. В силу (3.19) в этом случае $r_{jj}(A | j) \geq R(B)$. Далее, из определения видно, что при всяком $n \geq 1$ выполняется неравенство $Q_{jj}(A, n | j) \geq Q_{jj}(B, n | j)$ и что хотя бы при одном n оно является строгим (поскольку граф G_A связан). Поэтому

$$(3.20) \quad \varphi_{jj}(A, r_{jj}(A | j) | j) > \varphi_{jj}(B, r_{jj}(A | j) | j) \geq \varphi_{jj}(B, R(B) | j).$$

Но так как $\varphi_{jj}(B, \cdot | j) = \varphi_{jj}^0(B, \cdot)$ (см. §2), а матрица B возвратна, имеет место равенство

$$\varphi_{jj}^0(B, R(B)) = 1$$

(см. п. 1 леммы 2.6). Подставив его в (3.20), получаем $\varphi_{jj}(A, r_{jj}(A | j) | j) > 1$. Таким образом, последнее неравенство выполняется в обоих случаях, т.е. матрица A устойчиво-положительна. Теорема доказана.

Выведем из теоремы 3.8 одно простое следствие, которое в дальнейшем позволит нам получить новый критерий устойчивой положительности. Пусть, как и в этой теореме, A – неразложимая бесконечная матрица, B – ее неразложимая конечная главная подматрица, $W = \text{supp}(B)$ и G_B – главный подграф графа G_A , отвечающий подматрице B . Для любой пары различных вершин $i, j \in W$ зафиксируем кратчайший G_B -путь γ_{ji} , ведущий из j в i (любой из таких путей, если их несколько). Напомним, что для множества всех G_A -путей, ведущих из i в j и не проходящих через W , выше было введено обозначение $\Gamma_{ij}(G_A | W)$ (относящееся также и к случаю $i = j$). Пусть $\Gamma'_{ij}(G_A | W)$ – множество путей, которое при $i = j$ совпадает с $\Gamma_{ij}(G_A | W)$, а при $i \neq j$ есть объединение $\Gamma_{ij}(G_A | W) \cup \{\gamma_{ji}\}$. Введем также множество $W'_{ij}(A)$,

состоящее из всех вершин графа G_A , каждая из которых принадлежит некоторому пути $\gamma \in \Gamma'_{ij}(A|W)$, и множество $E'_{ij}(A)$ ребер графа G_A , которые выделяются аналогичным условием. Подматрицу матрицы A , полученную из A заменой нулями всех элементов a_{mn} , кроме тех, для которых ребро (m, n) принадлежит одному из путей, входящих в $\Gamma'_{ij}(G_A | W)$, обозначим через $A_{ij}(B)$.

3.13. СЛЕДСТВИЕ. *Если $R(A_{ij}(B)) \geq R(B)$ для любых $i, j \in W$, то матрица A устойчиво-положительна.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $i \neq j$ и l_{ji} – длина пути γ_{ji} . Очевидно, при любом $n \geq 2$

$$Q_{ii}(A_{ij}(B), n + l_{ji}) = Q_{ij}(A, n | W)Q(A, \gamma_{ji}),$$

а потому

$$(3.21) \quad r_{ij}(A | W) = r_{ii}(A_{ij}(B)) \geq R(A_{ij}(B)),$$

и неравенство $R(A_{ij}(B)) \geq R(B)$ приводит к выводу, что $R(B) \leq r_{ij}(A | W)$, если $i \neq j$; при $i = j$ это тем более верно. Но тогда выполнено условие (3.5) и по теореме 3.8 матрица A устойчиво-положительна, что и требовалось доказать.

Согласно теореме 3.8 наличие или отсутствие свойства устойчивой положительности у матрицы A полностью определяется соотношением между “внутренними” параметрами $R(B)$ ее неразложимых конечных подматриц B и их “внешними” параметрами $r(A | \text{supp}(B))$. Сейчас для нас будет важно выяснить, как эти параметры изменяются при переходе от подматрицы B к ее неразложимой подматрице B' . Что касается внутренних параметров, то из теории неотрицательных матриц хорошо известно, что $R(B') \geq R(B)$ (см. [18, гл. 12]) (это также вытекает из того, что $-\ln R(B)$ – топологическое давление, см. § 4). Следующая лемма утверждает, что между внешними параметрами имеет место обратное соотношение.

3.14. ЛЕММА. *Если B, B_1 – неразложимые конечные главные подматрицы неразложимой бесконечной матрицы A , причем $B_1 \subset B$, то*

$$(3.22) \quad r(A | \text{supp}(B_1)) \leq r(A | \text{supp}(B)).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $W = \text{supp}(B)$, $W_1 = \text{supp}(B_1)$. Каждой вершине $k \in W$ следующим образом поставим в соответствие вершины $k', k'' \in W_1$: если $k \in W_1$, то $k' = k'' = k$; если $k \in W \setminus W_1$, то в качестве k' возьмем произвольную вершину $k_1 \in W_1$, из которой ведет кратчайший путь в k , а в качестве k'' – произвольную вершину $k_1 \in W_1$, в которую ведет кратчайший путь из k . Пусть $\gamma_{k'k}$ – первый, а $\gamma_{kk''}$ – второй из упомянутых путей (в обоих случаях его можно выбирать произвольно, если таких путей несколько).

Поставим в соответствие каждому пути $\gamma \in \Gamma_{ij}(G_A, n | W)$, где $i, j \in W$, $n \geq 2$, путь

$$\gamma_1 = \begin{cases} \gamma, & \text{если } i, j \in W_1, \\ \gamma_{i' i} \gamma, & \text{если } i \in W \setminus W_1, j \in W_1, \\ \gamma \gamma_{j j''}, & \text{если } i \in W_1, j \in W \setminus W_1, \\ \gamma_{i' i} \gamma \gamma_{j j''}, & \text{если } i, j \in W \setminus W_1. \end{cases}$$

В каждом из фигурирующих в правой части этого равенства четырех случаев введем величины l'_i, a'_i, l''_j, a''_j , положив $l'_i = l''_j = 0, a'_i = a''_j = 1$ в первом случае, $l'_i = l(\gamma_{i'i}), a'_i = Q(A, \gamma_{i'i}), l''_j = 0, a''_j = 1$ – во втором, $l'_i = 0, a'_i = 1, l''_j = l(\gamma_{jj''), a''_j = Q(A, \gamma_{jj'')}$ – в третьем и $l'_i = l(\gamma_{i'i}), a'_i = Q(A, \gamma_{i'i}), l''_j = l(\gamma_{jj''), a''_j = Q(A, \gamma_{jj'')}$ – в четвертом. Очевидно,

$$l(\gamma_1) = l'_i + n + l''_j, \quad Q(A, \gamma_1) = a'_i Q(A, \gamma) a''_j,$$

причем величины l'_i, a'_i, l''_j, a''_j не зависят от γ (а зависят лишь от i, j) и $\gamma_1 \in \Gamma_{i'j''}(G_A, l'_i + n + l''_j | W_1)$. Так как из разных γ получаются разные γ_1 , мы приходим к неравенству

$$Q_{ij}(A, n | W) \leq (a'_i a''_j)^{-1} Q_{i'j''}(A, l'_i + n + l''_j | W_1),$$

из которого видно, что

$$r_{ij}(A | W) \geq r_{i'j''}(A | W_1) \geq r(A | W_1),$$

и, следовательно, выполняется (3.22).

Теперь мы можем вывести из теоремы 3.8 последний в этом параграфе критерий устойчивой положительности. Он формулируется очень коротко.

3.15. ТЕОРЕМА. *Для устойчивой положительности неразложимой неотрицательной матрицы A необходимо и достаточно, чтобы любая ее неразложимая собственная подматрица A' удовлетворяла неравенству $R(A') > R(A)$.*

Для частного случая матриц, состоящих из нулей и единиц, эта теорема (в другой, но эквивалентной формулировке) имеется в [17]. Приведенное там доказательство можно перенести и на общий случай. Мы, однако, вместо этого воспользуемся теоремой 3.8.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость. Пусть A' – произвольная неразложимая собственная подматрица неразложимой устойчиво-положительной матрицы A и (i', j') – ребро графа G_A , которое не является ребром графа $G_{A'}$. При любом $\varepsilon \in (0, 1)$ введем матрицу $A^\varepsilon = A^\varepsilon(i', j') = (a_{ij}^\varepsilon)$, положив $a_{ij}^\varepsilon = a_{ij}$ при $(i, j) \neq (i', j')$, $a_{i'j'}^\varepsilon = (1 - \varepsilon)a_{i'j'}$. Очевидно, $G_{A^\varepsilon} = G_A$, $R_{i'j'}^0(A^\varepsilon) = R_{i'j'}^0(A)$ и найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что если $\varepsilon < \varepsilon_0$, то $\varphi_{i'j'}^0(A^\varepsilon, R_{i'j'}^0(A^\varepsilon)) > 1$ (так как по условию $\varphi_{i'j'}^0(A, R_{i'j'}^0(A)) > 1$, см. определение 2.8), т.е. A^ε (как и A) – устойчиво-положительная матрица. Но тогда (см. п. 1 леммы 2.6)

$$(3.23) \quad \varphi_{i'j'}^0(A^\varepsilon, R(A^\varepsilon)) = \varphi_{i'j'}^0(A, R(A)) = 1, \quad \varepsilon < \varepsilon_0.$$

С другой стороны, так как по условию $a_{i'j'} > 0$, из определения A^ε видно, что $\varphi_{i'j'}^0(A^\varepsilon, x) < \varphi_{i'j'}^0(A, x)$ при любом $x \in (0, R_{ii}^0(A))$. Поэтому (3.22) может выполняться лишь при $R(A^\varepsilon) > R(A)$.

Переписав последнее неравенство в виде $\lambda(A^\varepsilon) < \lambda(A)$ (см. замечание 3.11), остается заметить, что $A' \subset A^\varepsilon$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$ и, следовательно, $\lambda(A') \leq \lambda(A^\varepsilon)$. Беря $\varepsilon < \varepsilon_0$, получаем $\lambda(A') < \lambda(A)$, т.е. $R(A') > R(A)$.

Достаточность. Пусть $\{A^{(n)}\}$ – исчерпывающая последовательность неразложимых главных подматриц рассматриваемой матрицы A (см. лемму 3.10). Положив

$W^{(n)} = \text{supp}(A^{(n)})$, построим при каждом n для всех пар вершин $i, j \in W^{(n)}$ подматрицы $A_{ij}(A^{(n)})$, о которых говорилось в следствии 3.13. Если n достаточно велико, то все они будут собственными подматрицами. Действительно, в противном случае при сколь угодно большом n найдутся такие $i, j \in W^{(n)}$, что кратчайший $G_{A^{(n)}}$ -путь γ_{ji} , ведущий из j в i , проходит через все ребра этого графа. Но тогда в $G_{A^{(n)}}$ из каждой вершины выходит не более одного ребра (путь γ_{ji} , будучи кратчайшим, проходит через каждую вершину не более одного раза), что при достаточно большом n невозможно вследствие связности A и свойств последовательности $\{A^{(n)}\}$.

Пользуясь доказанным, подберем такое n_0 , что при $n \geq n_0$ все подматрицы $A_{ij}(A^{(n)})$ – собственные. По предположению, при всех $n \geq n_0$, $i, j \in W^{(n)}$ выполняется неравенство $R(A_{ij}(A^{(n)})) > R(A)$ и, значит (см. (3.21)), $r_{ij}(A | W^{(n)}) > R(A)$ при тех же n, i, j , т.е.

$$r(A | W^{(n)}) > R(A), \quad n \geq n_0.$$

Теперь с помощью лемм 3.10 и 3.14 можно подобрать такое $n \geq n_0$, что

$$r(A | W^{(n)}) > R(A^{(n)}),$$

т.е. для подматрицы $B = A^{(n)}$ выполняются условия теоремы 3.8. По этой теореме матрица A устойчиво-положительна.

3.16. ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы 3.15 видно, что в ее формулировке можно заменить неравенство $R(A') > R(A)$ на $\lambda(A') < \lambda(A)$, а также отказаться от требования неразложимости матрицы A' . Это, очевидно, усиливает утверждение о необходимости рассматриваемого условия для устойчивой положительности A . Другое необходимое и достаточное условие устойчивой положительности матрицы A , по существу в явном виде содержащееся в доказательстве (см. его первую часть – “необходимость”), состоит в том, что в результате умножения произвольного ее положительного элемента $a_{i'j'}$ на число $(1 - \varepsilon)$, где $0 < \varepsilon \leq 1$, получается матрица $A^\varepsilon = A^\varepsilon(i', j')$, для которой $R(A^\varepsilon) > R(A)$. При этом справедливость последнего неравенства для одной какой-нибудь пары (i', j') влечет выполнение его для любой такой пары.

§ 4. Равновесные и гиббсовские меры. Вариационный принцип Гиббса

Продолжим начатую в § 1 тему, связанную с понятием топологического давления и вариационным принципом. Как и там, будем рассматривать СЦМ $(X(G), S)$, где G – связный ориентированный граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G) \subseteq V(G) \times V(G)$, а S – сдвиг на пространстве $X(G)$ его двусторонне-бесконечных путей.

Предположим, что задана функция $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ (см. определение 1.10). В таком случае

$$(4.1) \quad f(x) = -U(x_0, x_1),$$

где U – функция, определенная на $E(G)$. Продолжим U с $E(G)$ на все прямое произведение $V(G) \times V(G)$, положив $U(v', v'') = +\infty$, если $(v', v'') \notin E(G)$. Как и в §2, введем функцию

$$A_f(v, v') = \exp[-U(v', v'')], \quad v', v'' \in V(G),$$

которую (занумеровав произвольным образом вершины $v \in V(G)$), можно считать бесконечной квадратной матрицей. Элементы этой матрицы неотрицательны, и в случае, когда $f \equiv 0$, она состоит из нулей и единиц и совпадает с матрицей смежности графа G . Будем называть $A = A_f$ *матрицей Больцмана*, отвечающей функции f , а также матрицей Больцмана, отвечающей *потенциалу* U . При этом, имея в виду (4.1), будем на равных правах с A_f употреблять обозначение $Q(U)$. Очевидно, $G_{Q(U)} = G$ и, значит, связность G равносильна неразложимости $Q(U)$.

Допустим сначала, что граф G конечен и, следовательно, пространство $X(G)$ компактно. В этом случае все варианты топологического давления из §1 совпадают и для функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ дают одну и ту же величину, равную $-\ln R(A) = \ln \lambda(A)$ (см. замечание 2.3), удовлетворяющую вариационному принципу (1.5). Впервые этот результат был получен В. Пэрри [9] для случая $f \equiv 0$, а затем обобщен Ф. Спитцером [26] (см. также [27]). В упомянутых работах было также показано, что существует единственное равновесное распределение, которое представляет собой марковскую меру на $X(G)$ с вероятностями перехода p_{ij} и одномерными вероятностями π_i вида

$$(4.2) \quad p_{ij} = a_{ij}y'_j / \lambda y'_i, \quad \pi_i = y'_i y''_i, \quad i, j = 1, 2, \dots,$$

где $(y'_i, i = 1, 2, \dots) = y'$ и $(y''_i, i = 1, 2, \dots) = y''$ – векторы, фигурирующие в теореме 2.7, и $\lambda = 1/R(A)$.

4.1. ЗАМЕЧАНИЕ. В формуле (4.1), а также в определении матрицы Больцмана знак “минус” перед U выбран ради примирения двух сложившихся традиций – записи вариационного принципа в виде (1.5) (с “плюсом” в правой части), принятой в эргодической теории, и традиционного для статистической физики “минуса” в выражении для гиббсовской меры [27].

Откажемся теперь от условия конечности графа G . Наша первая цель – сформулировать вариационный принцип для топологического давления $P^{\text{int}}(X(G), S, f)$. Здесь нельзя воспользоваться ни следствием 1.7, ни даже равенством (1.5) в качестве определения, так как мы не накладываем на функцию f условия ограниченности, без которого $h_\mu(S)$ и $\int f d\mu$ могут одновременно принять бесконечные значения разных знаков. Поэтому необходима регуляризация правой части (1.5), которую мы проведем, следуя [25].

Прежде всего напомним несколько определений, связанных с понятием энтропии сохраняющего меру преобразования (подробности см. в [28]–[30]). Пусть $(X, \mathcal{B}, \mu)$ – вероятностное пространство и $T: X \rightarrow X$ – преобразование, сохраняющее μ . *Энтропией* конечного измеримого разбиения $\alpha = (A_1, \dots, A_s)$ пространства X называется число

$$H_\mu(\alpha) = - \sum_{n=1}^s \mu(A_n) \ln \mu(A_n)$$

(при этом считается, что $0 \ln 0 = 0$). Для любого α существует предел

$$h_\mu(T, \alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} H_\mu(\alpha_0^n),$$

где α_0^n – разбиение, элементы которого имеют вид $A_{i_0} \cap T^{-1}A_{i_1} \cap \dots \cap T^{-n+1}A_{i_{n-1}}$, $1 \leq i_0, \dots, i_{n-1} \leq s$. Энтропия $h_\mu(T)$ преобразования T определяется равенством $h_\mu(T) = \sup_\alpha h_\mu(T, \alpha)$.

Заметим, далее, что в рассматриваемом случае

$$P^{\text{int}}(X(G), S, f) = -\ln R(A);$$

это вытекает из равенства (1.15), полученного в ходе доказательства следствия 1.7 (условия, наложенные в формулировке этого следствия на f , в (1.15) не используются).

Пусть теперь в соответствии с обозначениями, введенными в § 1, $\mathcal{M}(X(G), S)$ – совокупность S -инвариантных борелевских вероятностных мер на $X(G)$. Для любого $i \in V(G)$ обозначим через $X_i(G)$ множество последовательностей $x = (x_n, n \in \mathbb{Z}) \in X(G)$, для которых $x_n = i$ при бесконечно многих $n < 0$ и бесконечно многих $n > 0$. Очевидно, это множество S -инвариантно. Для любого пути $\gamma \in \Gamma_{ii}^0(G)$ и любого $k \in [0, l(\gamma) - 1]$ (по поводу обозначений см. § § 1, 2) положим

$$X_i(G, \gamma, k) = X_i(G) \cap \{x \in X(G) : (x_{-k}, x_{-k+1}, \dots, x_{-k+l(\gamma)}) = \gamma\}.$$

Ясно, что при любом $i \in V(G)$ множества $X_i(G, \gamma, k)$ разбивают $X_i(G)$ на счетное число борелевских подмножеств. Обозначим это разбиение через α_i . Занумеровав произвольным образом циклы, составляющие $\Gamma_{ii}^0(G)$, т.е. представив их в виде последовательности $\gamma_1, \gamma_2, \dots$, обозначим через $X_i(G, N)$, $N = 1, 2, \dots$, объединение множеств $X_i(G, \gamma_n, k)$ по всем парам (n, k) , в которых $1 \leq n \leq N$, $0 \leq k \leq l(\gamma_n) - 1$. При каждом $N \geq 1$ определим новое, на этот раз конечное разбиение $\alpha_i(N)$ множества $X_i(G)$, получающееся из α_i в результате объединения в один элемент всех $X_i(G, \gamma_n, k)$, не попавших в $X_i(G, N)$.

Пусть $\mathcal{E}(X(G), S)$ – множество тех мер $\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)$, относительно которых сдвиг S эргодичен (их называют *эргодическими* мерами). Для любых $i \in V(G)$, $\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)$ положим

$$V_\mu = \{j \in V(G) : \mu(X_j(G)) = 1\}, \quad \mathcal{E}_i(X(G), S) = \{\nu \in \mathcal{E}(X(G), S) : \nu(X_i(G)) = 1\}$$

(заметим, что вследствие эргодичности μ и S -инвариантности $X_i(G)$ имеет место альтернатива: либо $\mu(X_i(G)) = 1$, либо $\mu(X_i(G)) = 0$). Для $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)$, $i \in V_\mu$ положим

$$(4.3) \quad P_i(X(G), f, \mu) = \overline{\lim}_{N \rightarrow \infty} \left[h_\mu(S, \alpha_i(N)) + \int_{X_i(G, N)} f d\mu \right].$$

Равенство

$$(4.4) \quad P(X(G), f, \mu) = \inf_{i \in V_\mu} P_i(X(G), f, \mu)$$

определяет на $\mathcal{E}(X(G), S)$ функционал $P(X(G), f, \cdot)$ со значениями в $\{-\infty\} \cup \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Будем называть $P(X(G), f, \mu)$ *давлением в состоянии μ* .

Это определение требует некоторого оправдания – прежде всего потому, что $P_i(X(G), f, \mu)$ определяется для фиксированной нумерации путей $\gamma \in \Gamma_{ii}^0(G)$, зависимость от которой, разумеется, нежелательна. К счастью, на самом деле такой зависимости нет.

4.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [25, теорема А]. Пусть $A = A_f$ – матрица Больцмана, отвечающая функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, где G – связный ориентированный граф (конечный или бесконечный). Тогда при $R(A) > 0$ для любых $\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)$, $i \in V_\mu$ давление $P_i(X(G), f, \mu)$ не зависит от выбранной на $\Gamma_{ii}^0(G)$ нумерации и верхний предел в (4.3) можно заменить пределом.

Покажем теперь, что в случае, когда регуляризацию проводить не обязательно, она действительно не дает ничего нового.

4.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если в условиях предложения 4.2 мера $\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)$ такова, что $f \in L_1(\mu)$, то при всех $i \in V_\mu$ имеет место равенство

$$(4.5) \quad P_i(X(G), f, \mu) = h_\mu(S) + \int_{X(G)} f d\mu.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно заметить, что в силу известных теорем эргодической теории (см., например, [29, теорема 7.3] или [30, п. 9.5])

$$\lim_{N \rightarrow \infty} h_\mu(S, \alpha_i(N)) = h_\mu(S) \geq 0$$

и что при $f \in L_1(\mu)$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \int_{X_i(G, N)} f d\mu = \int_{X(G)} f d\mu$$

(так как $\mu(X_i(G, N)) \rightarrow \mu(X_i(G))$ при $N \rightarrow \infty$ и $f \in L_1(\mu)$, последний предел существует, хотя и может равняться $+\infty$).

Теперь сформулируем вариационный принцип для топологического давления.

4.4. ТЕОРЕМА [25, теорема В, замечание 3.3]. В условиях предложения 4.2 справедливо соотношение

$$P^{\text{int}}(X(G), S, f) = -\ln R(A);$$

если, кроме того, $R(A) > 0$, то

$$\sup_{\mu \in \mathcal{E}_i(X(G), S)} P_i(X(G), f, \mu) = \sup_{\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)} P(X(G), f, \mu) = P^{\text{int}}(X(G), S, f).$$

4.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Функционал $P(X(G), f, \cdot)$ определяется формулами (4.3) и (4.4) лишь на множестве эргодических мер. Было бы желательно продолжить его на всю совокупность S -инвариантных мер $\mathcal{M}(X(G), S)$. Разумеется, в случае, когда $\inf_{x \in X(G)} f(x) > -\infty$, это можно сделать с помощью равенства (4.5), и полученный функционал будет обладать следующим свойством линейности [30]: если $\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)$ и $\{\mu_c\}$ – разложение меры μ на эргодические компоненты (отвечающее разложению на эргодические компоненты динамической системы $(X(G), S, \mu)$), то

$$P(X(G), f, \mu) = \int_{X'(G, \mu)} P(X(G), f, \mu_c) \mu'(dc),$$

где μ' – мера, которую μ индуцирует на факторпространстве $X'(G, \mu)$ пространства $(X(G), \mu)$, отвечающем разбиению на эргодические компоненты. В случае, когда $R(A) > 0$ и μ – произвольная мера из $\mathcal{M}(X(G), S)$, правую часть этого соотношения можно принять за определение его левой части, пользуясь тем, что в силу теоремы 4.4 подынтегральная функция ограничена. При этом, очевидно, будет выполняться равенство

$$\sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)} P(X(G), f, \mu) = -\ln R(A).$$

Поскольку, однако, не существует эффективных методов разложения произвольной инвариантной меры на эргодические компоненты, мы оставим множество $\mathcal{E}(X(G), S)$ в качестве естественной области определения функционала $P(X(G), f, \cdot)$.

В соответствии с § 1 назовем *равновесной относительно f* (или *f -равновесной*) всякую меру $\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)$, для которой $P(X(G), f, \mu) = P^{\text{int}}(X(G), S, f)$.

4.6. ТЕОРЕМА [25, теорема С]. *В условиях предложения 4.2 для существования f -равновесной меры необходимо и достаточно, чтобы матрица A_f была положительно-возвратной. Если f -равновесная мера существует, то она единственна и является марковской мерой на $X(G)$ с одномерным распределением и переходными вероятностями, определяемыми соотношениями (4.2).*

В дальнейшем для f -равновесной меры будем употреблять обозначение μ^f (здесь, как и в некоторых других обозначениях, встречающихся ниже, отсутствует явное указание на граф G , поскольку это не может вызвать недоразумений).

Таким образом, для бесконечных матриц Больцмана, которые положительно-возвратны, ситуация с равновесными состояниями точно такая же, как для конечных матриц Больцмана, а если условие положительной возвратности нарушается, то равновесных состояний нет.

Собственные векторы y', y'' матрицы A , фигурирующие в формуле (4.2) и теореме 2.7, можно указать до некоторой степени явно (A может быть при этом как конечной, так и бесконечной матрицей, нужно лишь, чтобы она была неразложима и положительно-возвратна). С этой целью введем еще несколько обозначений (см. также §§ 1, 2).

Пусть G – произвольный ориентированный граф. Для любых $i, j \in V(G)$ обозначим через $\Gamma_{ij}^-(G)$ (соответственно через $\Gamma_{ij}^+(G)$) множество путей $\gamma \in G$, которые ведут из i в j и не проходят через i (соответственно через j). Очевидно, $\Gamma_{ij}^+(G) = \Gamma_{ij}^0(G)$.

В условиях предложения 4.2 положим

$$(4.6) \quad D_i^0(A, t) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{ii}^0(G)} l(\gamma) Q(A, \gamma) t^{l(\gamma)-1}, \quad i \in V(G), \quad 0 < t \leq R_{ii}^0(A).$$

Легко понять, что если $t < R_{ii}^0(A)$, то

$$D_i^0(A, t) = \left. \frac{d}{d\tau} \varphi_{ii}^0(A, \tau) \right|_{\tau=t}$$

(см. (2.6)), а если $t = R_{ii}^0(A)$, то $D_i^0(A, t) = \lim_{\tau \rightarrow t-0} D_i^0(A, \tau)$. В дальнейшем важную роль будет играть величина

$$(4.7) \quad D_i(A) = D_i^0(A, R(A)).$$

С помощью формулы (2.10) легко проверить, что если матрица A устойчиво-положительна (в частности, если она конечна, см. предложение 3.1), то

$$(4.8) \quad -1/D_i(A) = \text{Res}(\varphi_{ii}(A, \cdot), R(A)),$$

где $\text{Res}(g, z)$ – вычет функции g в точке z , являющейся ее полюсом (см. предложение 3.5).

Следующий факт также имеется в [25], хотя и не выделен там в отдельное утверждение.

4.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если в условиях предложения 4.2 матрица $A = A_f$ положительно-возвратна, то векторы $y'(A) = (y'_i(A), i \in V(G))$ и $y''(A) = (y''_i(A), i \in V(G))$ можно определить равенствами

$$(4.9) \quad y'_i(A) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{iv}^+(G)} Q(A, \gamma) (R(A))^{l(\gamma)-1} / D_v(A),$$

$$(4.10) \quad y''_i(A) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{vi}^-(G)} Q(A, \gamma) (R(A))^{l(\gamma)},$$

где v – произвольная вершина графа G .

4.8. ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Вследствие положительной возвратности A и связности G все $y'_i(A)$ и $y''_i(A)$ положительны. Тем самым, f -равновесная мера, если она существует, положительна на всех открытых множествах, откуда видно, что эта мера (будучи марковской) принадлежит $\mathcal{E}_i(X(G), S)$ при каждом $i \in V(G)$.

2. Так как $\Gamma_{vv}^+(G) = \Gamma_{vv}^-(G) = \Gamma_{vv}^0(G)$, имеют место равенства

$$(4.11) \quad R(A) D_v(A) y'_v(A) = \varphi_{vv}^0(A, R(A)) = 1, \quad y''_v(A) = 1$$

(см. теорему 2.7), а поскольку собственные векторы (строка и столбец) матрицы A с собственным значением $1/R(A)$ определены однозначно с точностью до множителя, из (4.11) видно, что векторы $y'(A)$ и $y''(A)$, заданные равенствами (4.9), (4.10),

определяются условием, что их компоненты с индексом v соответственно равны $(R(A)D_v(A))^{-1}$ и единице. Из (4.11), (4.2) также видно, что

$$(4.12) \quad \pi_v = \mu^f(\{x \in X(G) : x_0 = v\}) = \frac{1}{R(A)D_v(A)}, \quad v \in V(G).$$

В дальнейшем будем явно указывать зависимость от v и писать $y'_i(A, v)$, $y''_i(A, v)$, $y'(A, v)$ и $y''(A, v)$ вместо $y'_i(A)$, $y''_i(A)$, $y'(A)$ и $y''(A)$. Заметим, с другой стороны, что вследствие единственности равновесной меры отношения $y'_j(A, v)/y'_i(A, v)$ и произведения $y'_i(A, v)y''_i(A, v)$ от v уже не зависят.

Перейдем теперь к рассмотрению гиббсовских мер. С точки зрения статистической физики (см., например, [5], [45]), речь будет идти об одномерной решетчатой модели со счетным спиновым пространством и взаимодействием ближайших соседей, задаваемым потенциалом U со значениями в $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Гиббсовская мера с потенциалом U определяется требованием, чтобы отвечающее ей условное распределение в точках любого конечного подмножества решетки при условии, что заданы значения спиновой переменной вне этого множества, имело предписываемый потенциалом явный вид. Как хорошо известно, этот вид наследуется подмножествами, а потому достаточно требовать, чтобы условие, определяющее гиббсовскую меру, выполнялось для всех кубов (в одномерном случае – отрезков). В соответствии с этим сформулируем следующее определение, приспособленное к рассматриваемому случаю. Поскольку мы всюду рассматриваем лишь S -инвариантные меры, в этом определении идет речь о мерах из $\mathcal{M}(X(G), S)$ (в общем случае условие S -инвариантности не накладывается).

4.9. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Вероятностная мера $\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)$ называется *гиббсовской мерой с потенциалом U* , если при всех $n \in \mathbb{Z}$ и всех целых k выполняются два условия:

1) сумма

$$(4.13) \quad Z_n^{n+k}(x_n, x_{n+k}) = \sum_{i_{n+1}, \dots, i_{n+k-1} \in V(G)} \exp \left[-U(x_n, i_{n+1}) - U(i_{n+k-1}, x_{n+k}) - \sum_{n+1 \leq r \leq n+k-2} U(i_r, i_{r+1}) \right], \quad x = (x_r, r \in \mathbb{Z}) \in X(G),$$

называемая *статистической суммой*, при μ -почти всех x конечна;

2) произведение

$$(4.14) \quad \begin{aligned} & \mu_x(i_{n+1}, \dots, i_{n+k-1}) \\ &= [Z_n^{n+k}(x_n, x_{n+k})]^{-1} \\ & \times \exp \left[-U(x_n, i_{n+1}) - U(i_{n+k-1}, x_{n+k}) - \sum_{n+1 \leq r \leq n+k-2} U(i_r, i_{r+1}) \right] \end{aligned}$$

есть условная мера цилиндрического множества

$$C(i_{n+1}, \dots, i_{n+k-1}) = \{y \in X(G) : y_{n+r} = i_{n+r}, 1 \leq r \leq k-1\}$$

при условии σ -алгебры, порожденной случайными величинами $x_r, r \notin [n+1, n+k-1]$.

4.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Мера $\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)$ является гиббсовской мерой с потенциалом U в том и только том случае, когда для всех $n \in \mathbb{Z}$, всех целых $k \geq 2$ и всех $i_n, \dots, i_{n+k} \in V(G)$ таких, что $\mu(x_n = i_n, x_{n+k} = i_{n+k}) > 0$, выполняется равенство

$$(4.15) \quad \mu(x_{n+1} = i_{n+1}, \dots, x_{n+k-1} = i_{n+k-1} \mid x_n = i_n, x_{n+k} = i_{n+k}) \\ = [Z_n^{n+k}(i_n, i_{n+k})]^{-1} \exp \left[- \sum_{r=0}^{k-1} U(i_{n+r}, i_{n+r+1}) \right].$$

Заметим, что правая часть (4.15) равна нулю, если последовательность $\gamma = (i_n, \dots, i_{n+k})$ не является G -путем, и равна $Q(A, \gamma)/Q_{i_n i_{n+k}}(A, k)$, где $A = A_f$ (см. (4.1)), в противном случае.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если μ – гиббсовская мера с потенциалом U , то в силу (4.13), (4.14) условная мера $\mu_x(i_1, \dots, i_k)$ измерима относительно σ -алгебры, порожденной лишь случайными величинами x_n и x_{n+k} . В таком случае она совпадает с условной мерой того же цилиндра $C(i_{n+1}, \dots, i_{n+k-1})$ при условии упомянутой σ -алгебры, а для этой последней меры равенство (4.15) выполняется по определению.

Обратно, пусть мера μ удовлетворяет сформулированному условию. Тогда (4.15) для нее выполняется в обобщенном виде, а именно: для любых $n \in \mathbb{Z}$, любых целых $k \geq 2$, $l \geq 1$ и любых $i_s \in V(G)$, $n-l \leq s \leq n+k+l$, таких, что

$$\mu(x_{n-l} = i_{n-l}, \dots, x_n = i_n, x_{n+k} = i_{n+k}, \dots, x_{n+k+l} = i_{n+k+l}) > 0,$$

имеет место равенство

$$(4.16) \quad \mu(C \mid C^- \cap C^+) = [Z_n^{n+k}(i_n, i_{n+k})]^{-1} \exp \left[- \sum_{r=0}^{k-1} U(i_{n+r}, i_{n+r+1}) \right],$$

где

$$C = \{x \in X(G) : x_{n+1} = i_{n+1}, \dots, x_{n+k-1} = i_{n+k-1}\}, \\ C^- = \{x \in X(G) : x_{n-l} = i_{n-l}, \dots, x_n = i_n\}, \\ C^+ = \{x \in X(G) : x_{n+k} = i_{n+k}, \dots, x_{n+k+l} = i_{n+k+l}\}.$$

В самом деле, представив C^- и C^+ соответственно в виде $C^- = C_2^- \cap C_1^-$, $C^+ = C_1^+ \cap C_2^+$, где

$$C_2^- = \{x \in X(G) : x_{n-l} = i_{n-l}\}, \\ C_1^- = \{x \in X(G) : x_{n-l+1} = i_{n-l+1}, \dots, x_n = i_n\}, \\ C_1^+ = \{x \in X(G) : x_{n+k} = i_{n+k}, \dots, x_{n+k+l-1} = i_{n+k+l-1}\}, \\ C_2^+ = \{x \in X(G) : x_{n+k+l} = i_{n+k+l}\},$$

получим

$$(4.17) \quad \begin{aligned} \mu(C | C^- \cap C^+) &= \mu(C | C_2^- \cap C_1^- \cap C_1^+ \cap C_2^+) \\ &= \frac{\mu(C_1^- \cap C \cap C_1^+ | C_2^- \cap C_2^+)}{\mu(C_1^- \cap C_1^+ | C_2^- \cap C_2^+)} \end{aligned}$$

(по предположению все события, выступающие в качестве условий, имеют положительную вероятность). Далее,

$$(4.18) \quad \mu(C_1^- \cap C_1^+ | C_2^- \cap C_2^+) = \sum_{C'} \mu(C_1^- \cap C' \cap C_1^+ | C_2^- \cap C_2^+),$$

где суммирование ведется по всем множествам C' вида

$$C' = \{x' \in X(G) : x'_{n+1} = i'_{n+1}, \dots, x'_{n+k-1} = i'_{n+k-1}\}, \quad i'_{n+1}, \dots, i'_{n+k-1} \in V(G).$$

Применим формулу (4.15) к числителю дроби в правой части (4.17) и к каждому слагаемому в правой части (4.18). С учетом равенства статистических сумм в числителе и знаменателе получим

$$(4.19) \quad \mu(C | C^- \cap C^+) = \exp(-T) \left[\sum_{i'_{n+1}, \dots, i'_{n+k-1} \in V(G)} \exp(-T_1 - T_2 - T_3 - T_4 - T_5) \right]^{-1},$$

где

$$\begin{aligned} T &= \sum_{r=n-l}^{n+k+l-1} U(i_r, i_{r+1}), & T_1 &= \sum_{r=n-l}^{n-1} U(i_r, i_{r+1}), \\ T_2 &= U(i_n, i'_{n+1}), & T_3 &= \sum_{r=n+1}^{n+k-2} U(i'_r, i'_{r+1}), \\ T_4 &= U(i'_{n+k-1}, i_{n+k}), & T_5 &= \sum_{r=n+k}^{n+k+l-1} U(i_r, i_{r+1}). \end{aligned}$$

После сокращения общих множителей (4.19) примет вид

$$\begin{aligned} \mu(C | C^- \cap C^+) &= \frac{\exp[-\sum_{r=n}^{n+k-1} U(i_r, i_{r+1})]}{\sum_{i'_{n+1}, \dots, i'_{n+k-1} \in V(G)} \exp(-T_2 - T_3 - T_4)} \\ &= \frac{1}{Z_n^{n+k}(i_n, i_{n+k})} \exp\left[-\sum_{r=n}^{n+k-1} U(i_r, i_{r+1})\right]. \end{aligned}$$

Тем самым равенство (4.16) доказано. Из него видно, что $\mu_x(i_{n+1}, \dots, i_{n+k})$ (см. (4.14)) есть условная мера цилиндра $C(i_{n+1}, \dots, i_{n+k-1})$ при условии σ -алгебры, порожденной случайными величинами $x_r, r \in [n-l, n] \cup [n+k, n+k+l]$. Остается перейти к пределу при $l \rightarrow \infty$, что можно сделать в силу теоремы Леви о сходимости

условных математических ожиданий относительно неубывающей последовательности σ -алгебр (см., например, [31]). Предложение доказано.

Следующая теорема устанавливает тождественность множеств f -равновесных мер и S -инвариантных гиббсовских мер с потенциалом U , связанным с f формулой (4.1), и тем самым – возможность определения последних как точек максимума функционала $P(X(G), f, \cdot)$. Этот вариационный принцип, восходящий к Гиббсу, впервые был сформулирован и доказан для систем на бесконечных решетках любой размерности О. Лэнфордом и Д. Рюэлем [32] в предположении, что пространство значений спиновой переменной конечно (одно из двух утверждений, на которые естественно разбивается вариационный принцип, было ранее доказано Р. Л. Добрушиным [33]).

4.11. ТЕОРЕМА [25, теорема D]. Пусть G – связный ориентированный граф, $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и $A = A_f$ – матрица Больцмана, отвечающая функции f . Тогда:

- 1) если $R(A) > 0$ и существует f -равновесная мера $\mu^f \in \mathcal{E}(X(G), S)$, то μ^f – гиббсовская мера с потенциалом U , где U и f связаны соотношением (4.1);
- 2) если существует гиббсовская мера $\mu \in \mathcal{M}(X(G), S)$ с потенциалом U , то $R(A) > 0$, $\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)$ и μ – f -равновесная мера, т.е. $\mu = \mu^f$.

4.12. ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Сопоставление теорем 4.6 и 4.11 приводит к необходимому и достаточному условию существования S -инвариантной гиббсовской меры с потенциалом U , которое состоит в положительной возвратности матрицы Больцмана A_f (в предположении, что выполняется (4.1)). Для частного случая, когда A_f не содержит нулевых элементов, т.е. U принимает лишь конечные значения, последний результат был другим методом получен в работе Кестена [34], где найдены также условия существования гиббсовских мер, не являющихся S -инвариантными.

2. Вполне может случиться, что для гиббсовской меры μ с потенциалом U , связанным с функцией $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ соотношением (4.1), выполняются равенства

$$h_\mu(S) = \infty, \quad \int_{X(G)} f d\mu = -\infty$$

(см. [25]). Именно по этой причине, определяя функционал $P(X(G), f, \cdot)$ в случае, когда $\inf_x f(x) = -\infty$, нельзя ограничиться мерами μ с $h_\mu(S) < \infty$ и необходима регуляризация. Только после нее удастся доказать, что всякая гиббсовская мера является равновесной.

В завершение этого параграфа рассмотрим вопрос о связи между f -равновесными и f_n -равновесными мерами, где $f_n = \Phi_n f$ – функция, в которую переходит f под действием n -редукции Φ_n , $n \geq 2$ (см. §§ 1, 2). Функции f и f_n определены соответственно на пространствах $X(G)$ и $X(G_n)$, где $G_n = \Phi_n G$. При этом по условию $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, откуда следует, что $f_n \in \mathcal{F}_0^0(G_n)$. С помощью Φ_n любую борелевскую меру μ , определенную на $X(G)$, можно перенести на $X(G_n)$, положив

$$(\Phi_n \mu)(B) = \mu(\Phi_n^{-1} B), \quad B \in \mathcal{B}(X(G_n)).$$

4.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. При всех $n \geq 2$ справедливо равенство $\mu_{\Phi_n f} = \Phi_n \mu^f$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что f -равновесная и $\Phi_n f$ -равновесная меры могут существовать лишь одновременно. Это непосредственно вытекает из теоремы 4.6 и предложения 2.12.

Пусть, как и раньше, $f(x) = -U(x_0, x_1)$, $x = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in X(G)$. Тогда $f_n = \Phi_n f$ можно представить в виде $f_n(y) = -U_n(y_0)$, $y = (y_i, i \in \mathbb{Z}) \in X(G_n)$. Из определения Φ_n видно, что U и U_n связаны следующим образом: если $v = (i_1, \dots, i_n) \in V(G_n)$, где $i_1, \dots, i_n \in V(G)$, то $U_n(v) = U(i_1, i_2)$. С помощью предложения 4.10 теперь нетрудно проверить, что если μ – гиббсовская мера на $X(G)$ с потенциалом U , то $\Phi_n \mu$ – гиббсовская мера на $X(G_n)$ с потенциалом U_n (при этом достаточно ограничиться случаем $n = 2$), после чего остается применить теорему 4.11, утверждающую, что в рассматриваемом случае гиббсовская мера и равновесная мера – это одно и то же.

Глава 2.

Два класса инвариантных мер, связанных с СЦМ. Метод субдифференциалов

Основная цель этой главы – выяснить асимптотическое поведение двух классов вероятностных мер, естественным образом порождаемых бесконечной СЦМ $(X(G), S)$ и заданной на $X(G)$ непрерывной функцией f . Мы будем пользоваться методом субдифференциалов (касательных функционалов – по терминологии Рюэля [5]).

§ 5. Субдифференциал топологического давления

Вместе с пространством $X(G)$ удобно рассматривать его пополнение относительно метрики d_2 (см. §1), которое будем обозначать $\overline{X}(G)$. Пространство $\overline{X}(G)$, как нетрудно понять, допускает следующее описание. Отождествив $V(G)$ с множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$, присоединим к нему точку ∞ и продолжим ρ_2 на множество $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ по формуле $\overline{\rho}_2(i, j) = |i^{-1} - j^{-1}|$, $i, j \in \overline{\mathbb{N}}$ (здесь, как обычно, $\infty^{-1} = 0$). Если теперь задать на $\overline{X} = \overline{\mathbb{N}}^{\mathbb{Z}}$ метрику $\overline{d}_2$ с помощью равенства (1.1) при $\theta = 1/2$, $\rho = \overline{\rho}_2$ и взять замыкание множества $X(G)$ в $\overline{X}$, то получится $\overline{X}(G)$. Для нас важно, что $\overline{X}(G)$ (как и все $\overline{X}$) оказывается не только полным, но и компактным пространством и что на него можно продолжить преобразование S . В зависимости от структуры графа G пространство $\overline{X}(G)$ содержит или не содержит последовательность $x^\infty = (x_n, n \in \mathbb{Z})$, в которой $x_n = \infty$ при всех $n \in \mathbb{Z}$. Сейчас мы свяжем это свойство со свойствами матриц A_f , отвечающих функциям $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$.

5.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. 1) Если матрица A_{f_0} , где $f_0 \equiv 0$, допустима, то $x^\infty \in \overline{X}(G)$;

2) если существует функция $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, для которой $R(A_f) > 0$ и матрица A_f не является устойчиво-положительной, то $x^\infty \in \overline{X}(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Предположим, что $x^\infty \notin \overline{X}(G)$. Из определения метрики d_2 следует, что тогда для некоторых $n_0 \in \mathbb{N}$ и $V_0 \subset V(G)$, где $\#V_0 < \infty$, всякий G -путь длины $\geq n_0$ содержит хотя бы одну вершину из V_0 . Зафиксировав эти n_0 и V_0 , выберем для каждой вершины $v \in V(G) \setminus V_0$ кратчайший путь γ^- , ведущий из V_0 в v , и кратчайший путь γ^+ , ведущий из v в V_0 . Ясно, что лишь начальная и конечная вершины пути $\gamma(v) = \gamma^- \gamma^+$ принадлежат V_0 . Поскольку $\#V(G) = \infty$, существует такое множество $V_1 \subset V(G)$, что $\#V_1 = \infty$ и $\gamma(v') \neq \gamma(v'')$ при $v', v'' \in V_1$, $v' \neq v''$.

В силу выбора n_0 и V_0 лишь конечное число путей $\gamma(v)$, $v \in V_1$, имеет длину $\geq n_0$. Поэтому найдутся такие $v_1, v_2 \in V_0$, $n < n_0$ и $V_2 \subset V_1$, что $\#V_2 = \infty$ и при всех $v \in V_2$ путь $\gamma(v)$ ведет из v_1 в v_2 . Но вследствие допустимости матрицы A_{f_0} число G -путей, ведущих из v_1 в v_2 , конечно. Полученное противоречие доказывает, что $x^\infty \in \overline{X}(G)$.

2) Возьмем произвольную исчерпывающую последовательность конечных главных подграфов $G_n \subset G$ (см. определение 3.9) и произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел l_n . Предположим, что для любого n найдется G -путь γ_n длины $l(\gamma_n) \leq l_n$, все вершины которого принадлежат множеству $V(G) \setminus V(G_n)$. Произвольным образом дополнив γ до двусторонне-бесконечного пути $x^n \in X(G) \subset \overline{X}(G)$, нетрудно убедиться в том, что при подходящем выборе чисел $m_n \in \mathbb{Z}$ имеет место сходимость (в $\overline{X}$) $S^{m_n} x^n \rightarrow x^\infty$ ($n \rightarrow \infty$); тем самым, $x^\infty \in \overline{X}(G)$. Поэтому в случае, когда $x^\infty \notin \overline{X}(G)$, существуют конечный связный подграф $G_0 \subset G$ и число $l \in \mathbb{N}$ такие, что длина любого G -пути γ , не проходящего через $V(G_0)$, меньше l . Положим $\psi(z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_0} Q(A_f, \gamma) z^{l(\gamma)}$, где Γ_0 – множество G -путей, которые начинаются и кончаются в $V(G_0)$, но не проходят через $V(G_0)$. Из сказанного следует, что $\psi(z)$ – многочлен, и теорема 3.8 позволяет заключить, что A_f – устойчиво-положительная матрица. Предложение доказано.

В дальнейшем мы постоянно будем иметь дело с определенными на $\overline{X}(G)$ борелевскими зарядами, в частности, с вероятностными мерами, сосредоточенными на $X(G)$. Говоря о сходимости последовательностей $\{\mu_n\}$ таких зарядов, мы будем, если не оговорено противное, иметь в виду их слабую сходимость (часто называемую также $*$ -слабой), т.е. сходимость последовательности $\int_{\overline{X}(G)} f d\mu_n$ для всех $f \in C(\overline{X}(G))$. Заметим, однако, что если предел последовательности $\{\mu_n\}$, $\mu_n \in \mathcal{M}(X(G))$, также сосредоточен на $X(G)$, то в силу общих теорем теории меры (см., например, [31, гл. 3, §1, замечание 1]) в качестве f можно брать любые функции из $C(X(G))$, т.е. имеет место и слабая сходимость мер на $X(G)$. Некоторые утверждения §§ 6 и 7 относятся именно к такой ситуации.

В §4 для любой функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, которой отвечает матрица Больцмана A_f с $R(A_f) > 0$, и любой меры $\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)$ была определена величина $P(X(G), f, \mu)$ – давление в состоянии μ , точная верхняя грань которой равна топологическому давлению $P^{\text{int}}(X(G), S, f)$ (см. теорему 4.4). Зафиксировав произвольную функцию $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, положим

$$(5.1) \quad P_f(g) = P^{\text{int}}(X(G), S, f + g), \quad g \in C(\overline{X}(G)).$$

5.2. ЛЕММА. При $P^{\text{int}}(X(G), S, f) < \infty$ функционал P_f обладает следующими свойствами:

- 1) если $g, g_n \in C(\overline{X}(G))$, $n \in \mathbb{N}$, и $\lim_{n \rightarrow \infty} \|g_n - g\| = 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |P_f(g_n) - P_f(g)| = 0$ (непрерывность);
- 2) $P_f(S^*g) = P_f(g)$, где $(S^*g)(x) = g(Sx)$, $x \in \overline{X}(G)$ (S -инвариантность);
- 3) если $g_1, g_2 \in C(\overline{X}(G))$ и $g_1(x) \leq g_2(x)$ при всех $x \in \overline{X}(G)$, то $P_f(g_1) \leq P_f(g_2)$ (монотонность);
- 4) если $g_1, g_2 \in C(\overline{X}(G))$ и $g = p_1 g_1 + p_2 g_2$, где $p_1, p_2 \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1$, то $P_f(g) \geq p_1 P_f(g_1) + p_2 P_f(g_2)$ (выпуклость);

5) если $\mathcal{E}_f(X(G), S)$ – совокупность мер $\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)$, для которых $f \in L_1(\mu)$, то

$$(5.2) \quad P_f(g) = \sup_{\mu \in \mathcal{E}_f(X(G))} \left[P(X(G), f, \mu) + \int_{X(G)} g d\mu \right], \quad g \in C(\overline{X}(G))$$

(вариационный принцип).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Непрерывность P_f следует из непрерывности по g функции $P^{\text{int}}(X(G_0), S, f + g)$, где G_0 – произвольный конечный подграф графа G , и вариационного принципа для $P^{\text{int}}(X(G_0), S, f + g)$. Точно так же доказывается S -инвариантность. Вышуклость и монотонность P_f вытекают из соотношения (5.2). Приступим к его доказательству.

Для краткости обозначим правую часть (5.2) через $P_f^1(g)$. Очевидно,

$$(5.3) \quad P_f^1(g) \geq \sup_{G_0 \in \mathcal{G}_0(G)} \sup_{\mu \in \mathcal{E}(X(G_0), S)} \left[P(X(G), f, \mu) + \int_{X(G_0)} g d\mu \right], \quad g \in C(\overline{X}(G)),$$

где, как и в § 1, $\mathcal{G}_0(G)$ – совокупность конечных подграфов графа G . Если $G_0 \in \mathcal{G}_0(G)$, то $f|_{X(G_0)}$ – ограниченная функция и при $\mu \in \mathcal{E}(X(G_0), S)$ в силу предложения 4.3 (см. также (4.4) и теорему 4.4)

$$P(X(G), f, \mu) = h_\mu(S) + \int_{X(G_0)} f d\mu.$$

Поэтому при $G_0 \in \mathcal{G}_0(G)$

$$\begin{aligned} & \sup_{\mu \in \mathcal{E}(X(G_0), S)} \left[P(X(G), f, \mu) + \int_{X(G_0)} g d\mu \right] \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{E}(X(G_0), S)} \left[h_\mu(S) + \int_{X(G_0)} (f + g) d\mu \right] \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}(X(G_0), S)} \left[h_\mu(S) + \int_{X(G_0)} (f + g) d\mu \right] = P(X(G_0), S, f + g) \end{aligned}$$

(по поводу предпоследнего равенства см. замечание 4.5, последнее вытекает из вариационного принципа (1.5)). Отсюда с учетом (5.3) и (1.15) получаем

$$(5.4) \quad P_f^1(g) \geq P^{\text{int}}(X(G), S, f + g) = P_f(g).$$

Чтобы доказать обратное неравенство, вначале заметим, что достаточно сделать это для функций g , ограничения которых на $X(G)$ являются локальными функциями (см. определение 1.10), поскольку такие функции всюду плотны в $C(\overline{X}(G))$, а $P_f(g)$ и $P_f^1(g)$ непрерывны по g . Из S -инвариантности $P_f(g)$ и $P_f^1(g)$ (инвариантность $P_f^1(g)$ очевидна) вытекает, что при этом можно ограничиться функциями g , для которых $g|_{X(G)} \in \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathcal{F}_0^k(G)$.

Пусть g — одна из таких функций и $g' = g|_{X(G)}$. Не ограничивая общности, можно считать, что $g' \in \mathcal{F}_0^k(G)$ при некотором $k > 1$. Отображение Φ_k переводит граф G в граф G_k , пространство $X(G)$ — в пространство $X(G_k)$, а функции f и g' — в f_k и g'_k .

Зафиксируем теперь произвольную меру $\mu \in \mathcal{E}_f(X(G), S)$ и положим $\mu_k = \Phi_k \mu$. Применив предложение 4.3 сначала к μ и f , а затем к μ_k и f_k и воспользовавшись тем, что $f_k, g'_k \in \mathcal{F}_0^1(G_k)$, получим

$$\begin{aligned} P(X(G), f, \mu) + \int_{X(G)} g d\mu &= h_\mu(S) + \int_{X(G)} f d\mu + \int_{X(G)} g d\mu \\ &= h_{\mu_k}(S) + \int_{X(G_k)} (f_k + g'_k) d\mu_k \\ &= P(X(G_k), f_k + g'_k, \mu_k). \end{aligned}$$

В силу теоремы 4.4

$$P(X(G_k), f_k + g'_k, \mu_k) \leq P^{\text{int}}(X(G_k), S, f_k + g'_k),$$

а так как Φ_k — гомеоморфизм, справедливо равенство

$$(5.5) \quad P^{\text{int}}(X(G_k), S, f_k + g'_k) = P^{\text{int}}(X(G), S, f + g').$$

Таким образом,

$$P(X(G), f, \mu) + \int_{X(G)} g d\mu \leq P_f(g), \quad \mu \in \mathcal{E}_f(X(G), S),$$

что вместе с (5.4) приводит к (5.2). Лемма доказана.

5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ [47]. Пусть F — непрерывная выпуклая функция, заданная на банаховом пространстве H . Линейный функционал $L \in H^*$ называется *субградиентом функции F* в точке $h_0 \in H$, если при всех $h \in H$ выполняется неравенство

$$(5.6) \quad L(h) \leq F(h_0 + h) - F(h_0).$$

Множество всех таких L называется *субдифференциалом* и обозначается символом $\partial F(h_0)$. Если (5.6) имеет место при всех $h \in H$ с $\|h\| \leq \delta$, то L называется δ -субградиентом. Множество всех δ -субградиентов назовем δ -субдифференциалом.

Цель этого параграфа — найти $\partial P_f(0)$. Но начнем мы с простой леммы, показывающей, что понятия δ -субградиента и δ -субдифференциала являются, по существу, лишними. Хотя эта лемма будет использоваться лишь в § 7, ее естественно сформулировать и доказать здесь.

5.4. ЛЕММА. При $\delta > 0$ всякий δ -субградиент является градиентом.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть линейный функционал L служит δ -субградиентом непрерывной выпуклой функции $F: H \rightarrow \mathbb{R}$ в точке $x \in H$. Для любого $y \in H$ подберем такое $\varepsilon = \varepsilon_y > 0$, что $\|\varepsilon y\| < \delta$. По определению δ -субградиента и в силу линейности функционала L

$$F(x + \varepsilon y) \geq \varepsilon L(y) + F(x),$$

а вследствие выпуклости F

$$F(x + \varepsilon y) \leq (1 - \varepsilon)F(x) + \varepsilon F(x + y).$$

Из этих двух неравенств после очевидных преобразований получаем

$$F(x + y) \geq F(x) + L(y),$$

что и требовалось доказать.

Введем производные по направлениям. Пусть

$$(5.7) \quad \omega_f^+(g) = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} [P_f(tg) - P_f(0)], \quad g \in C(\overline{X}(G)),$$

$$(5.8) \quad \omega_f^-(g) = \lim_{t \rightarrow -0} \frac{1}{t} [P_f(tg) - P_f(0)], \quad g \in C(\overline{X}(G))$$

(вследствие выпуклости P_f выражения, стоящие под знаком предела, не убывают по t). Если $\omega_f^-(g) = \omega_f^+(g)$, то функция $t \mapsto P_f(tg)$ дифференцируема в точке $t = 0$. Из монотонности P_f вытекает, что если $g \geq 0$, то $\omega_f^-(g), \omega_f^+(g) \geq 0$.

5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем множество

$$(5.9) \quad C = \{x \in X(G) : x_n = v_n, n \in Z\}, \quad v_n \in V(G),$$

где $Z \subset \mathbb{Z}$ и $\#Z < \infty$, цилиндрическим множеством (цилиндром) в $X(G)$ с носителем $\text{supp}(C) = Z$. Цилиндры с носителем вида $\{k, \dots, k+l\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, $l \geq 0$, будем называть *сплошными*. Если для такого цилиндра $v_k = v_{k+l} = v \in V(G)$, будем называть его *v-цилиндром*.

Всякий сплошной цилиндр имеет вид

$$(5.10) \quad C(k, \gamma) = \{x \in X(G) : (x_k, \dots, x_{k+l}) = \gamma\}, \quad k, l \in \mathbb{Z}, \quad l > 0,$$

где γ – некоторый G -путь, если $l > 0$, и $\gamma \in V(G)$, если $l = 0$. Всякий цилиндр с одноточечным носителем является, очевидно, v -цилиндром при некотором $v \in V(G)$, а все остальные v -цилиндры имеют вид (5.10) с $\gamma \in \Gamma_{vv}(G, l)$, $l \geq 1$. Ниже мы будем, как правило, писать $C(v)$ вместо $C(0, v)$ и $C(\gamma)$ вместо $C(0, \gamma)$.

Заменяя в определении 5.5 $X(G)$ на $\overline{X}(G)$, можно точно так же определить цилиндры в $\overline{X}(G)$.

Важно отметить два обстоятельства: во-первых, для любого цилиндра $C \subset X(G)$ его замыкание $\overline{C} \subset \overline{X}(G)$ является не только замкнутым, но и открытым множеством, вследствие чего характеристическая функция $\mathbf{1}_{\overline{C}}$ непрерывна (легко проверить, что $\overline{C}$ определяется тем же равенством (5.9), в котором на этот раз $x \in \overline{X}(G)$); во-вторых, $\overline{C}$ есть цилиндр в $\overline{X}(G)$ и $\overline{C} \cap X(G) = C$, откуда вытекает, что ограничение функции $\mathbf{1}_{\overline{C}}$ на $X(G)$ совпадает с $\mathbf{1}_C$.

5.6. ЛЕММА. Пусть A_f – матрица Больцмана, отвечающая функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, и $g = \mathbf{1}_{\overline{C}}$, где $C \subset X(G)$ – произвольный непустой сплошной цилиндр. Предположим, что $R(A_f) > 0$. Тогда:

- 1) если матрица A_f невозвратна или нуль-возвратна, то $\omega_f^-(g) = \omega_f^+(g) = 0$;
- 2) если матрица A_f устойчиво-положительна, то $\omega_f^-(g) = \omega_f^+(g) = \mu^f(C)$, где μ^f – равновесная мера, отвечающая функции f ;
- 3) если матрица A_f неустойчиво-положительна, то $\omega_f^-(g) = 0$, $\omega_f^+(g) = \mu^f(C)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу п. 2 леммы 5.2 можно считать, что $\text{supp}(C) = \{0, \dots, l\}$, $l \geq 0$. Введем функции $f_{l+1} = \Phi_{l+1}f$, $g'_{l+1} = \Phi_{l+1}g'$, где $g' = g|_{X(G)}$, и воспользуемся равенством

$$(5.11) \quad P^{\text{int}}(X(G), S, f + tg') = P^{\text{int}}(X(G_{l+1}), S, f_{l+1} + tg'_{l+1}), \quad t \in \mathbb{R}$$

(ср. (5.5)). По предположению $R(A_f) > 0$. Из (5.2) и теоремы 4.4 следует, что тогда

$$P^{\text{int}}(X(G), S, f + tg') \leq P^{\text{int}}(X(G), S, f) + |t|M(g) = -\ln R(A_f) + |t| < \infty,$$

где $M(g) = \max_{x \in \overline{X(G)}} |g(x)| = 1$. Значит (см. (5.7)), $P^{\text{int}}(X(G_{l+1}), S, f_{l+1} + tg'_{l+1}) < \infty$ и по той же теореме 4.4

$$(5.12) \quad P^{\text{int}}(X(G_{l+1}), S, f_{l+1} + tg'_{l+1}) = -\ln R(A^t),$$

где A^t – матрица Больцмана, отвечающая функции $f_{l+1} + tg'_{l+1}$ (по построению $f_{l+1}, tg'_{l+1} \in \mathcal{F}_0^0(G_{l+1})$).

Как мы предположили выше, $\text{supp}(C) = \{0, \dots, l\}$. В последующих рассуждениях ограничимся случаем $l \geq 1$ (при $l = 0$ все гораздо проще). Тогда $C = C(0, \gamma)$, где γ – некоторый G -путь, одновременно служащий вершиной графа G_{l+1} . Обозначим эту вершину через v . Из определения матрицы A_{l+1}^t следует, что

$$(5.13) \quad \varphi_{vv}^0(A_{l+1}^t, z) = e^t \varphi_{vv}^0(A_{l+1}, z), \quad |z| < R_{vv}^0(A_{l+1}),$$

где $A_{l+1} = A_{l+1}^0$, и, тем самым,

$$(5.14) \quad R_{vv}^0(A_{l+1}^t) = R_{vv}^0(A_{l+1}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Если матрица A невозвратна, нуль-возвратна или неустойчиво-положительна, то, согласно предложению 2.12 точно такими же свойствами обладает матрица A_{l+1} и (см. лемму 2.6 и следствие 2.10)

$$R(A_{l+1}) = R_{vv}^0(A_{l+1}), \quad \varphi_{vv}^0(A_{l+1}, R(A_{l+1})) \leq 1.$$

Но тогда в силу (5.13), (5.14) при $t < 0$

$$(5.15) \quad \varphi_{vv}^0(A_{l+1}^t, R_{vv}^0(A_{l+1}^t)) < 1$$

и, следовательно,

$$(5.16) \quad R(A_{l+1}^t) = R_{vv}^0(A_{l+1}^t) = R_{vv}^0(A_{l+1}).$$

Отсюда с учетом (5.11), (5.12) заключаем, что во всех рассматриваемых случаях $\omega_f^-(g) = 0$.

Если матрица A (и, значит, A_{l+1}) невозвратна, то

$$\varphi_{vv}(A_{l+1}, R(A_{l+1})) < 1$$

и (5.15), (5.16) выполняются при всех t , достаточно близких к нулю, а потому в этом случае $\omega_f^+(g) = 0$. Во всех остальных случаях при $t > 0$

$$(5.17) \quad \varphi_{vv}^0(A_{l+1}^t, R_{vv}^0(A_{l+1}^t)) > 1, \quad R(A_{l+1}^t) < R_{vv}^0(A_{l+1}^t) = R_{vv}^0(A_{l+1}),$$

$$(5.18) \quad \varphi_{vv}^0(A_{l+1}, R(A_{l+1}^t)) = e^{-t}$$

(последнее равенство вытекает из (5.13) и леммы 2.6).

Положим

$$\varphi(r) = \varphi_{vv}^0(A_{l+1}, r), \quad 0 \leq r \leq R(A_{l+1}),$$

и пусть $\psi: [0, 1] \rightarrow [0, R(A_{l+1})]$ — функция, обратная к φ . Функции φ и ψ монотонно возрастают и непрерывно дифференцируемы (в концах отрезков производная заменяется соответствующей односторонней производной; при этом надо иметь в виду, что продифференцированный ряд типа (2.6), определяющий производную $\varphi'(R(A_{l+1}))$, может расходиться, в этом случае непрерывность φ' в точке $R(A_{l+1})$ понимается как стремление $\varphi'(r)$ к бесконечности при $r \rightarrow R(A_{l+1}) - 0$). Из (5.7), (5.8), (5.17) с учетом сказанного получаем

(5.19)

$$\begin{aligned} \omega_f^+(g) &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} [-\ln R(A_{l+1}^t) + \ln R(A_{l+1})] = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{t} [-\ln \psi(e^{-t}) + \ln \psi(1)] \\ &= \lim_{t \rightarrow +0} \frac{1}{e^{-t} - 1} [\ln \psi(e^{-t}) - \ln \psi(1)] = \lim_{s \rightarrow -0} \frac{1}{s} [\ln \psi(1 + s) - \ln \psi(1)] \\ &= (\ln \psi)'(1) = \frac{\psi'(1)}{\psi(1)} = \frac{1}{R(A_{l+1})\varphi'(R(A_{l+1}))}. \end{aligned}$$

Отсюда сразу следует (см. теорему 2.7, следствие 2.10 и предложение 2.12), что если матрица A нуль-возвратна, то $\omega_f^+(g) = 0$. Если же матрица A положительно-возвратна, то в силу п. 2 замечания 4.8 правая часть (5.19) равна $\mu^{f_{l+1}}(C_{l+1}(v))$, где

$$C_{l+1}(v) = \{x \in X(G_{l+1}) : x_0 = v\}$$

(см. (4.12)), а в силу предложения 4.13

$$\mu^{f_{l+1}}(C_{l+1}(v)) = \mu^f(\Phi_{l+1}^{-1}C_{l+1}(v)) = \mu^f(C).$$

Таким образом, в этом случае $\omega_f^+(g) = \mu^f(C)$.

Для завершения доказательства леммы осталось вычислить ω_f^- в случае, когда матрица A устойчиво-положительна. Это вычисление ничем не отличается от только что проведенного, так как теперь неравенства (5.17) и равенство (5.18) выполняются не только при $t > 0$, но и при всех достаточно близких к нулю $t < 0$. Лемма доказана.

Переходя к изучению субдифференциалов $\partial P_f(g)$, $g \in C(\overline{X}(G))$ (см. определение 5.3), вначале заметим, что множество $\mathcal{M}(\overline{X}(G), S)$ инвариантных относительно сдвига S вероятностных борелевских мер на $\overline{X}(G)$ содержится в $C^*(\overline{X}(G))$.

5.7. ЛЕММА. Если $g \in C(\overline{X}(G))$, то $\partial P_f(g) \subset \mathcal{M}(\overline{X}(G), S)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $g, \tilde{g} \in C(\overline{X}(G))$, $\tilde{g}(x) \geq 0$ при всех $x \in \overline{X}(G)$ и $\nu \in \partial P_f(g)$. Пользуясь определением 5.3 и монотонностью P_f (см. п. 3 леммы 5.2), получаем $\nu(\tilde{g}) \geq P_f(g) - P_f(g - \tilde{g}) \geq 0$, откуда видно, что ν – неотрицательный заряд. Пусть, далее, $g_1(x) \equiv 1$. В силу (5.2)

$$P_f(g + g_1) - P_f(g) = 1, \quad P_f(g - g_1) - P_f(g) = -1$$

и, следовательно (см. определение 5.3), $\nu(g_1) \leq 1$, $-\nu(g_1) \geq -1$, т.е. $\nu(g_1) = 1$. Это значит, что ν – вероятностная мера. Ее S -инвариантность вытекает из S -инвариантности P_f (см. п. 2 леммы 5.2). Лемма доказана.

Прежде чем двигаться дальше, докажем еще одно вспомогательное утверждение, которое будет использоваться не только в этом, но и в других параграфах.

5.8. ЛЕММА. Пусть граф G связан и μ, ν – две S -инвариантные вероятностные меры на $\overline{X}(G)$, причем μ сосредоточена на $X(G)$, положительна на всех цилиндрах $C(v)$, $v \in V(G)$, и эргодична. Тогда:

- 1) если для каждого $v \in V(G)$ найдется такое $\alpha_v \geq 0$, что для любого v -цилиндра $C \subset X(G)$ выполняется соотношение

$$(5.20) \quad \nu(\overline{C}) = \alpha_v \mu(C),$$

то α_v не зависит от v (можно положить $\alpha_v = \alpha$), $\alpha \leq 1$ и

$$(5.21) \quad \nu = \alpha \mu + (1 - \alpha) \delta_\infty,$$

где δ_∞ – вероятностная мера, сосредоточенная в точке x^∞ (для единнообразия будем считать это равенство выполненным даже при $x^\infty \notin \overline{X}(G)$, если только $\alpha = 1$);

- 2) если для некоторого $v \in V(G)$ и любого v -цилиндра $C \subset X(G)$ выполняется соотношение $\nu(\overline{C}) = \mu(C)$, то $\nu = \mu$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство пп. 1 и 2 начнем с общего для них рассуждения. Зафиксируем $v \in V(G)$ и произвольный сплошной цилиндр $C = C(k, \gamma) \subset X(G)$ (см. (5.10)). Пусть $\gamma = (v_0, \dots, v_l)$. Возьмем какие-нибудь пути γ^- и γ^+ , ведущие из v в v_0 и из v_l в v соответственно и не проходящие через v . Обозначим через l^-, l^+ их длины. Ясно, что путь

$$\gamma^\pm = \begin{cases} \gamma^- \gamma \gamma^+, & l > 0, \\ \gamma^- \gamma^+, & l = 0, \end{cases}$$

является v -циклом. Ему отвечает v -цилиндр

$$C(k - l^-, \gamma^\pm) = \{x \in X(G) : (x_{k-l^-}, \dots, x_{k+l^+}) = \gamma^\pm\}.$$

Пусть $\mathcal{C}(\gamma)$ – множество всех полученных таким образом v -цилиндров. Из построения видно, что все цилиндры, входящие в $\mathcal{C}(\gamma)$, являются подмножествами цилиндра C и что любые два из них либо не пересекаются, либо совпадают; очевидно, в первом случае не пересекаются и замыкания любых двух таких цилиндров. По условию $\nu(\overline{C'}) = \alpha_v \mu(C')$ для любого $C' \in \mathcal{C}(\gamma)$. Следовательно,

$$\nu(\overline{C}) \geq \alpha_v \sum_{C' \in \mathcal{C}(\gamma)} \mu(C').$$

Вследствие эргодичности меры μ правая часть этого неравенства есть $\mu(C)$. Тем самым для любого сплошного цилиндра $C \subset X(G)$ выполняется неравенство

$$\nu(\overline{C}) \geq \alpha_v \mu(C).$$

В предположениях п. 2 это верно для фиксированного v , но зато $\alpha_v = 1$, а в предположениях п. 1 – для любого $v \in V(G)$, откуда следует, что в последнем случае для любого сплошного цилиндра $C \subset X(G)$

$$(5.22) \quad \nu(\overline{C}) \geq \alpha \mu(C),$$

где $\alpha = \sup_{v \in V(G)} \alpha_v$. Сравнив (5.20) и (5.22) при $C = C(v)$, получим

$$\alpha_v \mu(C(v)) \geq \alpha \mu(C(v)),$$

что с учетом положительности $\mu(C(v))$ приводит к неравенству $\alpha_v \geq \alpha$. Вследствие произвольности v это означает, что $\alpha_v \equiv \alpha$. Если теперь подставить $C = C(w)$, $w \in V(G)$, в (5.22) и просуммировать по всем w , получится неравенство

$$(5.23) \quad \sum_{w \in V(G)} \nu(\overline{C(w)}) \geq \alpha \sum_{w \in V(G)} \mu(C(w)).$$

Так как множества $C(w)$ при разных w не пересекаются, а μ и ν – вероятностные меры, из (5.23) следует, что $\alpha \leq 1$. Таким образом, неравенства (5.22), (5.23) с $\alpha \in [0, 1]$ выполняются в предположениях каждого из пп. 1, 2.

Ясно, что при $\alpha = 1$ (5.23) может быть лишь равенством. Но тогда мера ν сосредоточена на $X(G)$ – это вытекает из ее S -инвариантности и очевидного соотношения

$$(5.24) \quad \overline{X}(G) \setminus \bigcup_{w \in V(G)} \overline{C}(w) = C(\infty),$$

где $C(\infty) = \{x \in \overline{X}(G) : x_0 = \infty\}$. В таком случае (5.22) можно переписать в виде $\nu(C) \geq \mu(C)$, где C – произвольный сплошной цилиндр. Поскольку μ и ν – вероятностные меры, это неравенство на самом деле является равенством. Из него видно, что μ и ν совпадают на всех сплошных цилиндрах, а тогда они совпадают на всех борелевских множествах в $X(G)$. Тем самым утверждение п. 2 и соотношение (5.21) при $\alpha = 1$ доказаны.

При $\alpha < 1$ определим на $\overline{X}(G)$ заряд $\tilde{\nu} = (1 - \alpha)^{-1}(\nu - \alpha\mu)$. Согласно (5.22) он неотрицателен на всех цилиндрах в $\overline{X}(G)$, имеющих вид $\overline{C}$, где C – сплошной цилиндр в $X(G)$. Но на всех остальных сплошных цилиндрах в $\overline{X}(G)$ мера μ равна нулю (как легко понять, такие цилиндры не пересекаются с $X(G)$). Значит, заряд $\tilde{\nu}$ неотрицателен на всех без исключения сплошных цилиндрах в $\overline{X}(G)$. Отсюда следует, что он неотрицателен на всех борелевских множествах и тем самым является S -инвариантной вероятностной борелевской мерой на $\overline{X}(G)$. В силу (5.20), (5.24) $\tilde{\nu}(C(\infty)) = 1$, а тогда и

$$\tilde{\nu}(x^\infty) = \tilde{\nu}\left(\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} S^n C(\infty)\right) = 1,$$

т.е. $\tilde{\nu} = \delta_\infty$, что приводит к соотношению (5.21) и в случае $\alpha < 1$. Лемма доказана.

Теперь можно сформулировать основной результат этого параграфа.

5.9. ТЕОРЕМА. Пусть матрица Больцмана A_f , где $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, удовлетворяет условию $R(A_f) > 0$. Тогда

- 1) если матрица A_f невозвратна или нуль-возвратна, то $\partial P_f(0) = \{\delta_\infty\}$;
- 2) если матрица A_f устойчиво-положительна, то $\partial P_f(0) = \{\mu^f\}$;
- 3) если матрица A_f неустойчиво-положительна, то

$$(5.25) \quad \{c\mu^f + (1 - c)\delta_\infty, 0 \leq c \leq 1\} \subset \partial P_f(0) \\ \subset \{c\mu^f + (1 - c)\bar{\mu}, 0 \leq c \leq 1, \bar{\mu} \in \mathcal{M}(\overline{X}(G) \setminus X(G), S)\},$$

где $\mathcal{M}(\overline{X}(G) \setminus X(G), S)$ – множество S -инвариантных борелевских вероятностных мер $\bar{\mu}$ на $\overline{X}(G)$, для которых $\bar{\mu}(X(G)) = 0$; если, кроме того, матрица A_{f_0} , где $f_0 \equiv 0$, допустима (см. §2), то $\partial P_f(0) = \{c\mu^f + (1 - c)\delta_\infty, 0 \leq c \leq 1\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как функция $g \mapsto \partial P_f(g)$ непрерывна, множество $\partial P_f(0)$ непусто и выпукло (см. [47, гл. 4]). Из определения 5.3 вытекает, что если $\nu \in \partial P_f(0)$ и $g \in C(\overline{X}(G))$, то

$$t\nu(g) \leq P_f(tg) - P_f(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Деля на t и переходя к пределу при $t \rightarrow +0$ и при $t \rightarrow -0$, получаем

$$(5.26) \quad \omega_f^-(g) \leq \nu(g) \leq \omega_f^+(g).$$

В силу леммы 5.6 это означает, что если $g = \mathbf{1}_{\overline{C}}$, где $C \subset X(G)$ – произвольный сплошной цилиндр, то в случае, когда матрица A_f невозвратна или нуль-возвратна, $\nu(g) = 0$, а в случае, когда A_f устойчиво-положительна, $\nu(g) = \mu^f(C)$. Отсюда видно, что в первом случае мера ν равна нулю на любом цилиндре $C \subset X(G)$ с однотоочечным носителем и даже на его замыкании. Следовательно, ν сосредоточена в точке x^∞ (согласно предложению 5.1 в рассматриваемом случае $x^\infty \in \overline{X}(G)$), а так как по лемме 5.6 ν – вероятностная мера, она совпадает с δ_∞ . Во втором случае мера ν сосредоточена на $X(G)$. Действительно, пусть $n \in \mathbb{Z}$, $w \in \mathbb{N}$ и $\overline{C}(n, w) = \{x \in \overline{X}(G) : x_n = w\}$. Если $w \neq \infty$, т.е. $w \in V(G)$, то, очевидно, $\overline{C}(n, w)$ есть замыкание цилиндра $C(n, w) = \{x \in X(G) : x_n = w\}$, и по доказанному $\nu(\overline{C}(n, w)) =$

$\mu^f(C(n, w))$. Суммируя по $w \in V(G)$, с учетом того, что ν и μ^f – вероятностные меры, получим $\nu(\overline{C}(n, \infty)) = 0$, $n \in \mathbb{Z}$. Но тогда $\nu(\overline{X}(G) \setminus X(G)) = 0$, так как $\overline{X}(G) \setminus X(G) \subset \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \overline{C}(n, \infty)$. Следовательно, $\nu(\overline{C}) = \mu^f(C)$ для любого сплошного цилиндра $C \subset X(G)$. Поскольку борелевская мера на $X(G)$ определяется своими значениями на таких цилиндрах, мы заключаем, что $\nu = \mu^f$.

Переходя к случаю, когда матрица A_f неустойчиво-положительна, вычислим сначала $\partial P_f(g)$ при некоторых g , близких к нулю. Возьмем произвольные $v \in V(G)$, $t \in \mathbb{R}$ и обозначим через χ и $\overline{\chi}$ характеристические функции цилиндров $C(v)$ и $\overline{C}(v)$ соответственно. Из п. 5 леммы 5.2 с учетом того, что $f + t\chi \in \mathcal{F}_0^1(G)$, легко вывести соотношение

$$P_f(t\overline{\chi} + g) = P_{f+t\chi}(g), \quad g \in C(\overline{X}(G)),$$

вследствие которого

$$(5.27) \quad \partial P_f(t\overline{\chi}) = \partial P_{f+t\chi}(0), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Таким образом, вычисление субдифференциала функции P_f в точке $t\overline{\chi}$ свелось к вычислению субдифференциала функции $P_{f+t\chi}$ в нуле. Но последний нам, по существу, уже известен. В самом деле, из определения матрицы $A_{f+t\chi}$ видно, что при всех $t \in \mathbb{R}$

$$(5.28) \quad R_{vv}^0(A_{f+t\chi}) = R_{vv}^0(A_f), \quad \varphi_{vv}^0(A_{f+t\chi}, z) = e^t \varphi_{vv}^0(A_f, z), \quad |z| < R_{vv}^0(A_f).$$

По предположению матрица A_f неустойчиво-положительна. Поэтому матрица $A_{f+t\chi}$ при $t < 0$ невозвратна, а при $t > 0$ – устойчиво-положительна (см. § 2). По доказанному в первом случае $\partial P_f(t\overline{\chi}) = \{\delta_\infty\}$, а во втором случае $\partial P_f(t\overline{\chi}) = \{\mu^{f+t\chi}\}$ (см. (5.27)).

Теперь воспользуемся общей теоремой выпуклого анализа (см., например, [46]), которая утверждает, что если F – выпуклая функция, определенная на банаховом пространстве H , $\{h_n, n \in \mathbb{Z}\}$ – последовательность элементов этого пространства, сходящаяся к h , $\nu_n \in \partial F(h_n)$, $n \in \mathbb{N}$, причем $\nu_n \rightarrow \nu$ при $n \rightarrow \infty$, то $\nu \in \partial F(h)$. Беря $t = t_n$, где $t_n \rightarrow -0$, получаем из этой теоремы включение $\delta_\infty \in \partial P_f(0)$. Покажем, что если $t \rightarrow +0$, то $\mu^{f+t\chi}$ сходится к μ^f .

Вследствие компактности пространства $\overline{X}(G)$ семейство мер $\mu^{f+t\chi}$, $t \geq 0$, рассматриваемых как меры на $\overline{X}(G)$, слабо компактно. Пусть ν – произвольная предельная точка при $n \rightarrow \infty$ последовательности $\mu^{f+t_n\chi}$, где $t_n > 0$ при всех n и $t_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Не ограничивая общности, будем считать, что $\mu^{f+t_n\chi} \rightarrow \nu$. Надо убедиться, что $\nu = \mu^f$. По теореме 4.6 $\mu^{f+t\chi}$ при любом $t > 0$ – стационарная марковская мера, сосредоточенная на $X(G)$, причем ее параметры определяются соотношением (4.2). Возьмем произвольную вершину $v \in V(G)$ и произвольный v -цилиндр $C \subset X(G)$ (см. (5.10)). Если у него одноточечный носитель, то $C = C(k, v)$, $k \in \mathbb{Z}$. В противном случае $C = C(k, \gamma)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \Gamma_{vv}(G, l)$, $l \geq 1$. Из (4.2), (4.12) и определения матрицы $A_{f+t\chi}$ с помощью простой выкладки получаем

$$(5.29) \quad \mu^{f+t\chi}(C) = \begin{cases} [R(A_{f+t\chi})D_v(A_{f+t\chi})]^{-1}, & C = C(k, v), \\ [R(A_{f+t\chi})]^{l-1}Q(A_f, \gamma)e^{tm(C)}/D_v(A_{f+t\chi}), & C = C(k, \gamma), \end{cases}$$

где $m(C)$ – число простых v -циклов, произведение которых есть γ (см. определение 1.1).

В силу (5.28)

$$D_v(A_{f+t\chi}) = \frac{d}{d\tau} \varphi_{vv}^0(A_{f+t\chi}, \tau) \Big|_{\tau=R(A_{f+t\chi})} = e^t \frac{d}{d\tau} \varphi_{vv}^0(A_f, \tau) \Big|_{\tau=R(A_{f+t\chi})}.$$

Так как матрица $A_{f+t\chi}$ устойчиво-положительна, число $R(A_{f+t\chi})$ определяется равенством

$$(5.30) \quad \varphi_{vv}^0(A_f, R(A_{f+t\chi})) = e^{-t}$$

(см. лемму 2.6), откуда вытекает, что

$$(5.31) \quad \lim_{t \rightarrow +0} R(A_{f+t\chi}) = R(A_f), \quad \lim_{t \rightarrow +0} D_v(A_{f+t\chi}) = D_v(A_f).$$

Возвращаясь к (5.29), получаем

$$\lim_{t \rightarrow +0} \mu^{f+t\chi}(\overline{C}) = \lim_{t \rightarrow +0} \mu^{f+t\chi}(C) = \mu^f(C),$$

где $\overline{C}$ – замыкание множества C в $\overline{X}(G)$. Поскольку, как уже отмечалось, характеристическая функция множества $\overline{C}$ непрерывна, из сходимости $\mu^{f+t\chi} \rightarrow \nu$ вытекает, что $\nu(\overline{C}) = \mu^f(C)$. Теперь, пользуясь леммой 5.8 (при $\mu = \mu^f$, $\alpha_v \equiv 1$), моментально приходим к равенству $\mu = \nu$. Тем самым доказано, что $\mu^f \in \partial P_f(0)$. Поскольку мы уже знаем, что множество $\partial P_f(0)$ содержит δ_∞ и выпукло, это приводит к первому из включений (5.25). Перейдем ко второму.

Очевидно, всякую меру $\nu \in \mathcal{M}(\overline{X}(G), S)$ можно однозначным образом представить в виде $\nu = c\nu' + (1-c)\nu''$, где

$$0 \leq c \leq 1, \quad \nu', \nu'' \in \mathcal{M}(\overline{X}(G), S), \quad \nu'(X(G)) = 1, \quad \nu''(X(G)) = 0.$$

Если $\nu \in \partial P_f(0)$ и $g = \chi_{\overline{C}}$, где $C \subset X(G)$ – сплошной цилиндр, то в силу (5.26) и п. 3 леммы 5.6

$$\mu^f(C) = \omega_f^+(g) \geq \nu(\overline{C}) \geq \nu(C) = c\nu'(C).$$

При $c \neq 0$ отсюда следует абсолютная непрерывность меры ν' относительно μ^f , а так как обе меры S -инвариантны и μ^f обладает свойством эргодичности (см. замечание 4.8), мы приходим к выводу, что $\nu' = \mu^f$. Тем самым второе из включений (5.25) также доказано.

Осталось рассмотреть случай, когда матрица смежности графа G допустима. Из определения метрики d_2 следует, что тогда во всякой последовательности $x \in \overline{X}(G)$, содержащей символ ∞ , все места справа или слева от него занимает тот же самый символ. Отсюда нетрудно вывести, что на $\overline{X}(G) \setminus X(G)$ может быть сосредоточена только одна S -инвариантная мера, а именно, δ_∞ . Тем самым, $\nu'' = \delta_\infty$ (согласно п. 1 предложения 5.1 в нашем случае $x^\infty \in \overline{X}(G)$). Теорема доказана.

5.10. ЗАМЕЧАНИЕ. Из теоремы 5.9 вытекает, что функция P_f , где $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, дифференцируема по Гато в нуле во всех случаях, кроме случая неустойчивой положительности матрицы A_f . Можно показать, однако, что ни в одном из этих случаев P_f не обладает более сильным свойством дифференцируемости по Фреше.

Еще одно применение теоремы 5.9 связано с описанием равновесных мер на пространстве $\overline{X}(G)$, отвечающих функциям $\bar{f}$, ограничение которых на $X(G)$ принадлежит $\mathcal{F}_0^1(G)$. Пусть $\bar{f}$ – любая такая функция и $f = \bar{f}|_{X(G)}$. Согласно теореме 1.5 и вариационному принципу (1.5)

$$(5.32) \quad P^{\text{int}}(X(G), S, f) = P(\overline{X}(G), S, \bar{f}) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\overline{X}(G), S)} \left[h_\mu(S) + \int_{\overline{X}(G)} \bar{f} d\mu \right].$$

Обозначим через $\mathcal{E}\mathcal{Q}(\bar{f})$ множество $\bar{f}$ -равновесных состояний, т.е. таких мер $\mu \in \mathcal{M}(\overline{X}(G), S)$, для которых

$$h_\mu(S) + \int_{\overline{X}(G)} \bar{f} d\mu = P(\overline{X}, S, \bar{f}).$$

5.11. ТЕОРЕМА. Пусть функция $\bar{f} \in C(\overline{X}(G))$ удовлетворяет условиям $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $R(A_f) > 0$, где $f = \bar{f}|_{X(G)}$. Тогда:

1) если матрица A_f невожатна или нуль-вожатна, то

$$\mathcal{E}\mathcal{Q}(\bar{f}) = \begin{cases} \emptyset & \text{при } \bar{f}(x^\infty) < P^{\text{int}}(X(G), S, f), \\ \{\delta_\infty\} & \text{при } \bar{f}(x^\infty) = P^{\text{int}}(X(G), S, f); \end{cases}$$

2) если матрица A_f устойчиво-положительна, то $\mathcal{E}\mathcal{Q}(\bar{f}) = \{\mu^f\}$;

3) если матрица A_f неустойчиво-положительна, то

$$\mathcal{E}\mathcal{Q}(\bar{f}) = \begin{cases} \{\mu^f\} & \text{при } \bar{f}(x^\infty) < P^{\text{int}}(X(G), S, f), \\ \{c\mu^f + (1-c)\delta_\infty, 0 \leq c \leq 1\} & \text{при } \bar{f}(x^\infty) = P^{\text{int}}(X(G), S, f). \end{cases}$$

5.12. ЗАМЕЧАНИЕ. Из (5.32) и очевидного равенства $h_{\delta_\infty}(S) = 0$ вытекает, что во всех случаях $\bar{f}(x^\infty) \leq P^{\text{int}}(X(G), S, f)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5.11. Пусть $\bar{g} \in C(\overline{X}(G))$, $g = \bar{g}|_{X(G)}$ и $\bar{\mu} \in \mathcal{E}\mathcal{Q}(\bar{f})$. По теореме 1.5 (см. также (1.5))

$$\begin{aligned} P_f(\bar{g}) &= P^{\text{int}}(X(G), S, f + g) = P(\overline{X}(G), S, \bar{f} + \bar{g}) \\ &= \sup_{\mu \in \mathcal{M}(\overline{X}(G), S)} \left[h_\mu(S) + \int_{\overline{X}(G)} \bar{f} d\mu + \int_{\overline{X}(G)} \bar{g} d\mu \right] \\ &\geq h_{\bar{\mu}}(S) + \int_{\overline{X}(G)} \bar{f} d\bar{\mu} + \int_{\overline{X}(G)} \bar{g} d\bar{\mu} = P_f(0) + \int_{\overline{X}(G)} \bar{g} d\bar{\mu}, \end{aligned}$$

откуда видно, что $\bar{\mu}$ – субградиент функции P_f в нуле (см. определение 5.3). Тем самым, в условиях теоремы 5.11 $\mathcal{E}\mathcal{Q}(\bar{f}) \subset \partial P_f(0)$. Применяя пп. 1, 2 теоремы 5.9,

получаем отсюда утверждения 1) и 2). Для доказательства утверждения 3) заметим, что в силу (5.32) и теоремы 4.4 условие $R(A_f) > 0$ влечет за собой неравенство $h(\overline{X}(G), S) < \infty$ (так как функция $\bar{f}$ ограничена), из которого, в частности, вытекает, что матрица A_{f_0} (здесь, как и раньше, $f_0(x) \equiv 0$, $x \in X(G)$) допустима. При этом условию множество $\partial P_f(0)$ полностью описано в теореме 5.9 во всех случаях, включая интересующий нас сейчас случай неустойчиво-положительной матрицы A_f . Теперь утверждение 3) теоремы 5.11 получается из п. 3 теоремы 5.9 с помощью следующего простого замечания: если мера $\mathcal{E}\mathcal{Q}(\bar{f})$ есть выпуклая комбинация с ненулевыми коэффициентами двух взаимно сингулярных мер $\mu', \mu'' \in \mathcal{M}(\overline{X}(G), S)$, то $\mu', \mu'' \in \mathcal{E}\mathcal{Q}(\bar{f})$; это вытекает из свойств энтропии [30]. Теорема доказана.

Теорема 5.11 нуждается в следующем естественном дополнении.

5.13. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Все случаи, упомянутые в теореме 5.11, реализуемы, т.е. для каждого из них найдется соответствующая пара (G, f) .*

Прежде чем доказывать это предложение, введем один важный класс связанных ориентированных графов, который уже неявно присутствовал в некоторых конструкциях предыдущих параграфов и еще встретится ниже.

5.14. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть G – ориентированный граф, построенный по последовательности целых чисел l_k , $k = 1, 2, \dots$, следующим образом: вершины $v \in V(G)$ графа G отождествляются с парами целых чисел $(0, 0)$, (k, l) , $k = 1, 2, \dots$, $1 \leq l \leq l_k - 1$, а ребра – с парами вершин

$$((0, 0), (k, 1)), ((k, l), (k, l + 1)), ((k, l_k - 1), (0, 0)), \quad k = 1, 2, \dots, 1 \leq l \leq l_k - 2.$$

Последовательность вершин $(0, 0)$, $(k, 1)$, $\dots$, $(k, l_k - 1)$, $(0, 0)$ назовем *лепестком* с номером k , а сам только что описанный граф – *лепестковым графом* с длинами лепестков $l_1, l_2, \dots$ и центральной вершиной $(0, 0)$.

Ясно, что лепестковый граф G определяется не самой последовательностью длин его лепестков, а тем, сколько раз в ней встречается каждое натуральное число, т.е. последовательностью $\{N_l(G), l \geq 2\}$, где $N_l(G) \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$ – число лепестков длины l . Эту вторую последовательность будем называть *распределением* графа G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 5.13. Рассмотрим лепестковый граф G , распределение которого имеет вид $N_l(G) = 1$ при $l \geq 3$, $N_2(G) = 0$, и зададим функцию $f_\alpha \in \mathcal{F}_0^1(G)$, зависящую от действительного параметра α , условием $f_\alpha(x) = -(\alpha/l) \ln l$, если x_0, x_1 принадлежат лепестку длины l . Очевидно, f_α можно продолжить до функции $\bar{f}_\alpha \in C(\overline{X}(G))$, причем $\bar{f}_\alpha(x^\infty) = 0$ (из определения G непосредственно вытекает, что $x^\infty \in \overline{X}(G)$). Пусть v – центральная вершина графа G . По построению

$$(5.33) \quad \varphi_{vv}^0(A_{\bar{f}_\alpha}, z) = \sum_{n=3}^{\infty} \frac{z^n}{n^\alpha},$$

откуда видно, что $R_{vv}^0(A_{f_\alpha}) = 1$ при любом α . Если $\alpha \leq 2$ таково, что $\sum_{n=3}^{\infty} n^{-\alpha} \leq 1$ (легко видеть, что такие α существуют), то $\varphi_{vv}^0(A_{f_\alpha}, 1) \leq 1$ и ряд, полученный из

(5.33) почленным дифференцированием, в точке $z = 1$ расходится. Это значит, что матрица A_{f_α} либо неозвратна (когда последние два неравенства – строгие), либо нуль-озвратна (когда имеют место равенства). В обоих случаях $P^{\text{int}}(X(G), S, f_\alpha) = 0$ (см. теорему 4.4) и, значит,

$$(5.34) \quad \bar{f}_\alpha(x^\infty) = P^{\text{int}}(X(G), S, f_\alpha) = 0.$$

Чтобы доказать совместимость соотношения (5.34) и неустойчивой положительности, возьмем в предыдущей конструкции параметр $\alpha > 2$, для которого $\sum_{n=3}^\infty n^{-\alpha} \leq 1$, и подберем $\beta > 0$ так, чтобы выполнялось равенство $e^\beta \sum_{n=3}^\infty n^{-\alpha} = 1$. Пусть $\chi = \mathbf{1}_{C(v)}$ и $f_{\alpha\beta} = f_\alpha + \beta\chi$. Тогда

$$R_{vv}^0(A_{f_{\alpha\beta}}) = R(f_{\alpha\beta}) = 1, \quad \varphi_{vv}^0(A_{f_{\alpha,\beta}}, 1) = 1, \quad \left. \frac{d}{dt} \varphi_{vv}^0(A_{f_{\alpha,\beta}}, t) \right|_{t=1} < \infty,$$

откуда видно, что матрица $A_{f_{\alpha,\beta}}$ неустойчиво-положительна (см. следствие 2.10). Так как, очевидно, $f_{\alpha,\beta}$ продолжается до функции $\bar{f}_{\alpha,\beta} \in C(\overline{X}(G))$ и $\bar{f}_{\alpha,\beta}(x^\infty) = 0$, мы получаем $\bar{f}_{\alpha,\beta}(x^\infty) = P^{\text{int}}(X(G), S, f_{\alpha,\beta})$.

Теперь возьмем лепестковый граф G^1 , для которого $N_l(G^1) = 2^l$ при $l \geq 3$ и $N_2(G^1) = 0$. Снова обозначив через v центральную вершину и определив функцию $f_\alpha^1: X(G^1) \rightarrow \mathbb{R}$ точно так же, как выше была определена функция f_α , получим тождество

$$\varphi_{vv}^0(A_{f_\alpha^1}, z) \equiv \varphi_{vv}^0(A_{f_\alpha}, 2z).$$

Из него следует, что $R_{vv}^0(A_{f_\alpha^1}) = 1/2$ и что матрица $A_{f_\alpha^1}$ неозвратна и нуль-озвратна при тех же самых α , при которых соответствующими свойствами обладает матрица A_{f_α} . При этих α выполняется равенство $R(A_{f_\alpha}) = 1/2$ и в то же время, аналогично предыдущему, f_α^1 продолжается до функции $\bar{f}_\alpha^1 \in C(\overline{X}(G^1))$, равной нулю в точке $x^\infty \in \overline{X}(G^1)$. В результате мы приходим к неравенству $\bar{f}_\alpha^1(x^\infty) < P(X(G^1), S, f_\alpha^1)$.

Наконец, дословно повторив рассуждения, связанные с введением функции $f_{\alpha,\beta}$, мы получим функцию $f_{\alpha,\beta}^1$, для которой матрица $A_{f_{\alpha,\beta}^1}$ неустойчиво-положительна и выполняется неравенство $\bar{f}_{\alpha,\beta}^1(x^\infty) < P^{\text{int}}(X(G^1), S, f_{\alpha,\beta}^1)$. Тем самым, рассмотрены все случаи, встречающиеся в утверждениях 1) и 3) теоремы 5.11. Очевидно, утверждение 2) в построении каких-либо примеров не нуждается. Предложение полностью доказано.

5.15. ЗАМЕЧАНИЕ. Результаты, изложенные в этом параграфе, позволяют без особых усилий вывести из вариационного принципа, сформулированного в теореме 4.4, теорему Заргаряна 1.5. Действительно, в случае бесконечной топологической энтропии $P(X(G), S, 0)$ утверждение теоремы 1.5 очевидно, так как речь идет об ограниченных функциях f . Далее, вариационный принцип

$$(5.35) \quad \sup_{\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)} P(X(G), f, \mu) = P^{\text{int}}(X(G), S, f),$$

сформулированный в теореме 4.4 для функций $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, с помощью преобразований редукции и сдвига моментально обобщается на все ограниченные локальные функции

(см. определение 1.10). При $P(X(G), S, 0) < \infty$ обе части равенства (5.35) имеют смысл для любой ограниченной непрерывной функции $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$ и непрерывны по f в метрике пространства $C(X(G))$ (см. предложение 4.3). Поэтому (5.35) обобщается на все равномерно непрерывные ограниченные f (поскольку их можно аппроксимировать в $C(X(G))$ локальными функциями). Остается доказать, что если $\bar{f} \in C(\bar{X}(G))$ и $f = \bar{f}|_{X(G)}$, то

$$(5.36) \quad \sup_{\mu \in \mathcal{E}(X(G), S)} P(X(G), f, \mu) = \sup_{\mu \in \mathcal{E}(\bar{X}(G), S)} P(\bar{X}(G), \bar{f}, \mu),$$

где $\mathcal{E}(\bar{X}(G), S)$ – множество эргодических (относительно S) вероятностных борелевских мер на $\bar{X}(G)$ (см. (1.5)). Но при $P(X(G), S, 0) < \infty$ матрица A_{f_0} , где $f_0 \equiv 0$, допустима, $x^\infty \in \bar{X}(G)$ (см. п. 1 предложения 5.1) и $\mathcal{E}(\bar{X}(G), S) \setminus \mathcal{E}(X(G), S) = \{\delta_\infty\}$ (мы уже отмечали последнее обстоятельство при доказательстве теоремы 5.9). Так как $h_{\delta_\infty} = 0$, равенство (5.36) будет доказано, если найдется последовательность мер $\mu_n \in \mathcal{M}(X(G), S)$, сходящаяся к δ_∞ . Такую последовательность нетрудно указать в классе дискретных S -инвариантных мер (эти меры сосредоточены на множестве периодических последовательностей; им посвящен § 7 данной статьи).

5.16. ЗАМЕЧАНИЕ. Еще одно применение основных результатов этого параграфа касается множества f -равновесных мер для $f \in \mathcal{F}_0^1$, описанного без доказательства в теореме 4.6. Воспользовавшись тем, что из вариационного принципа, содержащегося в п. 5 теоремы 5.2, вытекает включение $\mathcal{EQ}(f) \subseteq \partial P_f(0)$, и действуя далее в духе леммы 5.6 и теоремы 5.9, можно изложить доказательство теоремы 4.6 в важном частном случае, когда топологическая энтропия $P^{\text{int}}(X(G), f, 0)$ конечна и, значит, для определения функционала $P(X(G), f, \cdot)$ не нужна регуляризация, гораздо короче, чем это делается в общем случае [25].

§ 6. Асимптотически-равновесные меры. Сходимость равновесных мер, отвечающих конечным подцепям счетной СЦМ

В этом параграфе обобщаются и усиливаются результаты, опубликованные без доказательства в [35]. Как и в предыдущих параграфах, будем рассматривать СЦМ $(X(G), S)$, где G – связный ориентированный граф со счетным множеством вершин $V(G)$ и S – сдвиг на пространстве $X(G)$ его двусторонне-бесконечных путей. Говоря о сходимости или компактности семейств мер, сосредоточенных на $X(G)$, будем по-прежнему считать эти меры заданными на компактном пространстве $\bar{X}(G)$.

6.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем последовательность S -инвариантных вероятностных борелевских мер μ_n , определенных на $X(G)$, асимптотически равновесной относительно функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ (короче – *асимптотически f -равновесной*), если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X(G), f, \mu_n) = P^{\text{int}}(X(G), S, f).$$

Естественный пример асимптотически f -равновесной последовательности возникает следующим образом. Пусть $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $\{G_n\}$ – исчерпывающая последовательность конечных связных подграфов графа G (см. определение 3.9) и $f_n = f|_{X(G_n)}$.

Тогда f_n -равновесные меры μ_n (которые можно считать заданными на $X(G)$) образуют асимптотически f -равновесную последовательность. Это непосредственно вытекает из леммы 3.10, замечания 3.11 и теоремы 4.4.

В следующей ниже лемме используется обозначение из леммы 5.2.

6.2. ЛЕММА. *Если $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и меры $\mu_n \in \mathcal{E}_f(X(G), S)$ образуют асимптотически f -равновесную последовательность, то всякая предельная точка этой последовательности принадлежит субдифференциалу $\partial P_f(0)$ (см. § 5).*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу (5.2) для любой функции $g \in C(\overline{X}(G))$ выполняется неравенство

$$\int g d\mu_n \leq P_f(g) - P(X(G), f, \mu_n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Переходя в нем к пределу при $n \rightarrow \infty$ и учитывая определение 6.1, получаем

$$\int g d\nu \leq P_f(g) - P_f(0),$$

где ν – произвольная предельная точка последовательности $\{\mu_n\}$. Тем самым, $\nu \in \partial P_f(0)$ (см. определение 5.3). Лемма доказана.

Из этой леммы и теоремы 5.9 немедленно вытекает следующее утверждение.

6.3. ТЕОРЕМА. *Пусть $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $R(A_f) > 0$, $\{\mu_n\}$ – произвольная асимптотически f -равновесная последовательность мер из $\mathcal{E}_f(X(G), S)$ и $L(\{\mu_n\})$ – множество ее предельных точек. Тогда:*

- 1) *если матрица A_f невозвратна или нуль-возвратна, то $L(\{\mu_n\}) = \{\delta_\infty\}$;*
- 2) *если матрица A_f устойчиво-положительна, то $L(\{\mu_n\}) = \{\mu^f\}$;*
- 3) *если матрица A_f неустойчиво-положительна, а матрица A_{f_0} , где $f_0 \equiv 0$, допустима, то*

$$L(\{\mu_n\}) \subset \{c\mu^f + (1 - c)\delta_\infty, \quad 0 \leq c \leq 1\}.$$

Если $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, то упомянутая выше последовательность f_n -равновесных мер, построенная по f и исчерпывающей последовательности конечных связных подграфов графа G , удовлетворяет условиям теоремы 6.3, так как при всех n множество $X(G_n)$, на котором сосредоточена мера μ_n , компактно и функция f на нем ограничена. Тогда согласно первым двум утверждениям этой теоремы $\mu_n \rightarrow \delta_\infty$, если матрица A_f невозвратна или нуль-возвратна (т.е. не существует f -равновесной меры, см. теорему 4.6), и $\mu_n \rightarrow \mu^f$, если матрица A_f устойчиво-положительна (вследствие чего f -равновесная мера μ^f существует). Для случая неустойчиво-положительной матрицы A_f , когда f -равновесная мера также существует, теорема 6.3 дает менее точную информацию, да и то при дополнительном условии допустимости матрицы A_{f_0} . Теорема, которую мы сейчас сформулируем, относится (в отличие от теоремы 6.3) лишь к асимптотически-равновесным последовательностям мер из рассматриваемого класса, но зато не делает различия между устойчиво-положительными и неустойчиво-положительными матрицами A_f . К тому же она не содержит никаких ограничений на матрицу A_{f_0} . Используемое ниже обозначение $D_v(\cdot)$ введено в § 4 (см. (4.7)).

6.4. ТЕОРЕМА. Пусть $\{G_n\}$ – исчерпывающая последовательность конечных связных подграфов графа G , $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $A = A_f$ – матрица Больцмана, отвечающая функции f , и A_n – матрица Больцмана, отвечающая функции $f_n = f|_{X(G_n)}$. Предположим, что $R(A) > 0$ и существует f -равновесная мера $\mu = \mu^f$. Тогда для сходимости последовательности f_n -равновесных мер $\mu_n = \mu^{f_n}$ необходимо и достаточно, чтобы нашлась вершина $v \in V(G)$, для которой существует конечный или бесконечный предел

$$(6.1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_v(A_n) = D(\{A_n\}, v);$$

если это условие выполнено, то (6.1) имеет место для всех $v \in V(G)$ и

$$(6.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n = \alpha \mu + (1 - \alpha) \delta_\infty,$$

где

$$(6.3) \quad \alpha = \frac{D_v(A)}{D(\{A_n\}, v)} \in [0, 1]$$

не зависит от v (при $\alpha = 1$ (6.2) считается выполненным и в том случае, когда $x^\infty \notin \overline{X}(G)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В приводимых ниже рассуждениях мы будем неоднократно использовать явный вид мер μ_n и μ , опираясь на теорему 4.6 и соотношения (4.2), (4.12), которые, однако, каждый раз упоминаться не будут.

Вначале докажем необходимость условия (6.1). Пусть $\nu = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n$ и $v \in V(G)$. Как уже отмечалось в § 5, характеристическая функция замыкания $\overline{C}(v)$ цилиндра $C(v)$ непрерывна. Поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(C(v)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n(\overline{C}(v)) = \mu(\overline{C}(v))$$

(первое равенство вытекает из того, что мера μ сосредоточена на $X(G)$). Но

$$\mu_n(C(v)) = \frac{1}{R(A_n)D_v(A_n)}$$

и, так как $\lim_{n \rightarrow \infty} R(A_n) = R(A)$ (см. лемму 3.10), причем $R(A) > 0$, мы получаем

$$(6.4) \quad D(\{A_n\}, v) = \lim_{n \rightarrow \infty} D_v(A_n) = \frac{1}{R(A)\nu(\overline{C}(v))}, \quad v \in V(G)$$

(здесь, как обычно, $1/0 = \infty$). Тем самым, не только доказана необходимость существования предела (6.1) для сходимости последовательности мер μ_n , но и найдена связь этого предела с предельной мерой.

Чтобы доказать остальные утверждения теоремы, возьмем произвольную предельную точку ν последовательности $\{\mu_n\}$ (такие точки существуют вследствие компактности $\overline{X}(G)$) и предположим, что $\mu_{n_i} \rightarrow \nu$. Очевидно, последовательность $\{G_{n_i}\}$,

как и $\{G_n\}$, является исчерпывающей. Тогда по доказанному для любой вершины $v \in V(G)$ существует предел

$$(6.5) \quad \lim_{i \rightarrow \infty} D_v(A_{n_i}) = D(\{A_{n_i}\}, v)$$

(ср. (6.4)), причем

$$(6.6) \quad \nu(\overline{C}(v)) = \frac{1}{R(A)D(\{A_{n_i}\}, v)}.$$

Всякий сплошной v -цилиндр $C \subset X(G)$, носитель которого содержит больше одной точки, имеет вид $C(k, \gamma)$, $k \in \mathbb{Z}$, $\gamma \in \Gamma_{vv}(G)$, а потому при каждом n

$$(6.7) \quad \mu_n(C) = \mu_n(C(k, \gamma)) = Q(A_n, \gamma)[R(A_n)]^{l(\gamma)-1}/D_v(A_n),$$

где $l(\gamma)$ – длина v -цикла γ . Очевидно, найдется такое $n(\gamma)$, что $\gamma \in \Gamma_{vv}(G_n)$ при всех $n \geq n(\gamma)$. Следовательно, при достаточно больших n в (6.7) вместо $Q(A_n, \gamma)$ можно писать $Q(A, \gamma)$. Отсюда с учетом (6.5), (6.6) и сходимости $R(A_n)$ к $R(A)$ получаем

$$(6.8) \quad \begin{aligned} \nu(\overline{C}(k, \gamma)) &= \lim_{i \rightarrow \infty} \mu_{n_i}(\overline{C}(k, \gamma)) = \frac{Q(A, \gamma)[R(A)]^{l(\gamma)-1}}{D(\{A_{n_i}\}, v)} \\ &= Q(A, \gamma)[R(A)]^{l(\gamma)} \nu(\overline{C}(v)) = \frac{\nu(\overline{C}(v))\mu^f(C(\gamma))}{\mu^f(C(v))}. \end{aligned}$$

Значит, для любого v -цилиндра C с $\# \text{supp}(C) > 1$ имеет место равенство

$$(6.9) \quad \nu(\overline{C}) = \frac{\nu(\overline{C}(v))}{\mu^f(C(v))} \mu^f(C), \quad v \in V(G).$$

Непосредственно убеждаемся в его справедливости и для $C = C(v)$, а затем (пользуясь S -инвариантностью мер μ^f и ν) – для всех цилиндров C с $\# \text{supp}(C) = 1$. Теперь лемма 5.8, в которой надо положить $\mu = \mu^f$, $\alpha_v = \nu(\overline{C}(v))/\mu^f(C(v))$, позволяет утверждать, что величина

$$(6.10) \quad \alpha = \frac{\nu(\overline{C}(v))}{\mu^f(C(v))}, \quad v \in V(G),$$

не зависит от v , $\alpha \in [0, 1]$ и выполняется соотношение (6.2). Наконец, (6.3) получается из сопоставления (6.10) и (6.6) (с учетом (4.12)). Теорема доказана.

6.5. ЗАМЕЧАНИЕ. Возвращаясь к доказательству теоремы 6.4, заметим, что если усилить ее предположения, потребовав, чтобы матрица $A = A_f$ была устойчиво-положительной, то будет выполняться равенство

$$(6.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} D_v(A_n) = D_v(A).$$

Если же, наоборот, предположить, что матрица A не является даже положительно-возвратной (и, тем самым, меры μ^f не существует, см. теорему 4.6), сохранив все остальные условия теоремы 6.4, то в правой части (6.11) надо будет заменить $D_v(A)$ на ∞ . Оба эти факта вытекают из соотношений (6.8) (среди которых лишь в последнем используется существование меры μ^f) и теоремы 6.3, но их можно доказать и непосредственно. В случае неустойчиво-положительной матрицы A_f , который, очевидно, не охватывается только что сказанным, поведение последовательности $\{D_v(A_n)\}$ оказывается гораздо менее определенным. Мы опишем возможные варианты этого поведения для СПМ $(X(G), S)$, отвечающих лепестковым графам G (см. определение 5.14). Обобщаются ли эти результаты на все графы G , нам не известно.

6.6. ЛЕММА. Пусть $\varphi(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ – степенной ряд с неотрицательными коэффициентами и радиусом сходимости R . Предположим, что $0 < R < \infty$, $\varphi(R) < \infty$, и пусть $R_n > 0$ определяется равенством $\varphi_n(R_n) = \varphi(R)$, где $\varphi_n(x) = \sum_{k=0}^n c_k x^k$, $n \geq 1$. Тогда

$$(6.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(R_n) = \varphi'(R),$$

где, как и раньше, $\varphi'(R)$ понимается как сумма продифференцированного в точке R ряда, определяющего φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что $R_n \geq R$ и, значит, $\varphi'_n(R_n) \geq \varphi'_n(R)$, $n \geq 1$. Так же очевидно, что $\varphi'_n(R)$ не убывает по n и $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(R) = \varphi'(R)$ (все эти утверждения вытекают из неотрицательности коэффициентов c_k). Поэтому

$$(6.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(R_n) \geq \varphi'(R).$$

При $\varphi'(R) = \infty$ это неравенство равносильно доказываемому утверждению.

В случае, когда $\varphi'(R) < \infty$, воспользуемся легко проверяемым фактом: если ψ – многочлен степени d с неотрицательными коэффициентами и $k \geq d$, $a \geq b \geq 0$, то $\psi(a)b^k \leq \psi(b)a^k$. Применив это неравенство к $\psi = \varphi'$, $k = d = n - 1$, $a = R_n$, $b = R$, получим

$$(6.14) \quad \varphi'_n(R_n) \leq \varphi'_n(R)(1 + R^{-1}\delta_n)^{n-1},$$

где $\delta_n = R_n - R$.

Осталось убедиться, что второй множитель в правой части (6.14) стремится к единице при $n \rightarrow \infty$.

По определению чисел R_n , δ_n и в силу монотонности функции φ'_n

$$\varphi(R) - \varphi_n(R) = \varphi_n(R + \delta_n) - \varphi_n(R) \geq \delta_n \varphi'_n(R).$$

Значит,

$$(6.15) \quad \delta_n \leq \frac{\varphi(R) - \varphi_n(R)}{\varphi'_n(R)} \leq c(\varphi(R) - \varphi_n(R)),$$

где $c > 0$ не зависит от n , если n достаточно велико (так как $0 < R < \infty$ и, следовательно, $\varphi'(R) > 0$, то можно положить $c = 2/\varphi'(R)$).

С другой стороны,

$$n(\varphi(R) - \varphi_n(R)) = \sum_{k=n+1}^{\infty} nc_k R^k \leq R \sum_{k=n+1}^{\infty} kc_k R^{k-1}.$$

При $n \rightarrow \infty$ последнее выражение стремится к нулю, так как по условию $\varphi'(R) < \infty$. Таким образом, $\varphi(R) - \varphi_n(R) = o(1/n)$ и, значит, $\delta_n = o(1/n)$ (см. (6.15)). Но тогда $(1 + R^{-1}\delta_n)^n \rightarrow 1$ при $n \rightarrow \infty$ и из (6.14) вытекает, что

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(R_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(R) = \varphi'(R).$$

Вместе с (6.13) это дает (6.12). Лемма доказана.

6.7. ЗАМЕЧАНИЕ. В дополнение к лемме 6.6 можно доказать, хотя нам это и не потребуется, что последовательность $\{\varphi'_n(R_n)\}$ не убывает; значит, при всех n выполняется неравенство $\varphi'_n(R_n) \leq \varphi'(R)$ и, тем самым, $\varphi'(R) = \sup_n \varphi'_n(R_n)$. Если, однако, в формулировке леммы 6.6 возмутить частичную сумму φ_n , добавив к ней член того же ряда с достаточно большим номером, то ситуация, как мы сейчас увидим, резко изменится.

6.8. ЛЕММА. Пусть $\varphi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^k$ — бесконечный степенной ряд с неотрицательными коэффициентами и радиусом сходимости R . Предположим, что $0 < R < \infty$, $\varphi(R) < \infty$, и пусть при всех целых $n \geq 1$ и $m > n$ число $R_{n,m}$ определяется равенством $\varphi_{n,m}(R_{n,m}) = \varphi(R)$, где

$$\varphi_{n,m}(z) = \varphi_n(z) + c_m z^m = \sum_{k=1}^n c_k z^k + c_m z^m.$$

Тогда существует такая последовательность номеров $\{n_k\}$, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi'_{n_k, n_{k+1}}(R_{n_k, n_{k+1}}) = \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать, что при любом $n \geq 1$

$$(6.16) \quad \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \varphi'_{n,m}(R_{n,m}) = \infty,$$

так как отсюда следует утверждение леммы.

По определению при $m > n$

$$(6.17) \quad \begin{aligned} \varphi'_{n,m}(R_{n,m}) &= \varphi'_n(R_{n,m}) + mc_m R_{n,m}^{m-1} \geq mc_m R_{n,m}^{m-1} \\ &= \frac{m}{R_{n,m}} (\varphi_{n,m}(R_{n,m}) - \varphi_n(R_{n,m})) \\ &= \frac{m}{R_{n,m}} (\varphi(R) - \varphi_n(R_{n,m})). \end{aligned}$$

Очевидно, $R_{n,m} \geq R$ при всех n и $m > n$. Покажем, что

$$(6.18) \quad \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} R_{n,m} = R, \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть при каком-то n (6.18) не выполняется. Тогда при некотором $r > R$ и всех достаточно больших m справедливо неравенство $R_{n,m} \geq r$, вследствие которого при тех же r и m

$$(6.19) \quad \varphi_{n,m}(R_{n,m}) \geq c_m R_{n,m}^m \geq c_m r^m.$$

Так как $r > R$, по формуле Коши–Адамара $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} c_m r^m = \infty$ и в силу (6.19)

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \varphi_{n,m}(R_{n,m}) = \infty,$$

что противоречит определению $R_{n,m}$. Из (6.17), (6.18) получаем

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \varphi'_{n,m}(R_{n,m}) \geq \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \frac{m}{R_{n,m}} (\varphi(R) - \varphi_n(R_{n,m})) = \infty,$$

так как по условию $c_k > 0$ при бесконечно многих k и, значит, $\varphi(R) > \varphi_n(R)$ при всех n . Тем самым, выполняется соотношение (6.16). Лемма доказана.

6.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – произвольный лепестковый граф и пусть функция $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ такова, что матрица Больцмана A_f неустойчиво-положительна. Тогда найдутся две исчерпывающие последовательности, $\{G_k^1\}$ и $\{G_k^2\}$, конечных подграфов графа G , для которых

$$(6.20) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^{f_k^1} = \mu^f, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu^{f_k^2} = \delta_\infty,$$

где $f_k^i = f|_{X(G_k^i)}$, $\mu^{f_k^i} - f_k^i$ -равновесная мера (определенная на $\overline{X}(G)$, но сосредоточенная на $X(G_k^i)$), $i = 1, 2$, $\mu^f - f$ -равновесная мера (определенная на $\overline{X}(G)$, но сосредоточенная на $X(G)$) и δ_∞ – вероятностная мера, сосредоточенная в точке $x^\infty \in \overline{X}(G)$ (см. предложение 5.1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – центральная вершина графа G и $\mathcal{L}_l$ – множество лепестков длины l , входящих в G . Очевидно, $\mathcal{L}_l = \Gamma_{vv}^0(G, l)$ (см. §2) и, следовательно,

$$(6.21) \quad Q_{vv}^0(A_f, l) = \sum_{\gamma \in \mathcal{L}_l} Q(A_f, \gamma), \quad l \geq 2.$$

Положим $c_l = Q_{vv}^0(A_f, l)$ и определим $\varphi(z)$, $\varphi_n(z)$, $\varphi_{n,m}(z)$, R , R_n , $R_{n,m}$ так же, как это сделано в формулировках лемм 6.6 и 6.8. Поскольку матрица A_f неустойчиво-положительна, условия обеих этих лемм выполняются. Пусть $\{n_k\}$ – последовательность, существование которой гарантируется леммой 6.8. Имея в виду, что множество $\mathcal{L}_l$ при некоторых или даже при всех l может быть бесконечным, возьмем числовую последовательность $\{\varepsilon_n\}$, $\varepsilon_n > 0$, монотонно сходящуюся к нулю, выбор которой в дальнейшем будет уточнен, и подберем при каждом $l \geq 2$ такую последовательность конечных множеств $\mathcal{L}_{l,n} \subset \mathcal{L}_l$, $n = 1, 2, \dots$, что

$$(6.22) \quad \mathcal{L}_{l,n} \subseteq \mathcal{L}_{l,n+1}, \quad \sum_{\gamma \in \mathcal{L}_{l,n}} Q(A_f, \gamma) \geq (1 - \varepsilon_n)c_l, \quad n = 2, 3, \dots,$$

(если $\mathcal{L}_l = \emptyset$, то и $\mathcal{L}_{l,n} = \emptyset$; в этом случае суммы, стоящие в (6.21) и (6.22), считаются равными нулю).

В качестве G_k^1 , G_k^2 возьмем главные подграфы графа G , образованные всеми лепестками, входящими соответственно в $\bigcup_{l=2}^k \mathcal{L}_{l,k}$ и в $(\bigcup_{l=2}^{n_k} \mathcal{L}_{l,n_k}) \cup \mathcal{L}_{n_{k+1},n_k}$. Из (6.22) вытекает, что $\{G_k^1\}$ и $\{G_k^2\}$ – исчерпывающие последовательности конечных подграфов графа G . Докажем, что если ε_n стремится к нулю достаточно быстро, то выполняются соотношения (6.20). Начнем с первого из них.

Положим для краткости

$$(6.23) \quad \begin{aligned} a_{l,k} &= Q_{vv}^0(A_{f_k^1}, l), & \psi_k(z) &= \varphi_{vv}^0(A_{f_k^1}, z), & \tilde{\psi}_k(z) &= \varphi_{vv}^0(A_{f_k^2}, z), \\ r_k &= R(A_{f_k^1}), & \tilde{r}_k &= R(A_{f_k^2}), & k, l &\geq 2. \end{aligned}$$

По построению

$$\begin{aligned} a_{l,k} &= \sum_{\gamma \in \mathcal{L}_{l,k}} Q(A_f, \gamma), & \psi_k(z) &= \sum_{l=2}^k a_{l,k} z^l, \\ \tilde{\psi}_k(z) &= \psi_{n_k}(z) + a_{n_{k+1},n_k} z^{n_{k+1}}, & k, l &\geq 2. \end{aligned}$$

Следовательно (см. (6.22)),

$$(6.24) \quad \begin{aligned} (1 - \varepsilon_k)c_l &\leq a_{l,k} \leq c_l, \quad k \geq 2, \quad l \leq k; & r_k &\geq R_k, \quad \tilde{r}_k \geq R_{n_k, n_{k+1}}, \\ (1 - \varepsilon_k)\varphi_k(r) &\leq \psi_k(r) \leq \varphi_k(r), & (1 - \varepsilon_k)\varphi'_k(r) &\leq \psi'_k(r) \leq \varphi'_k(r), \quad r \geq 0. \end{aligned}$$

Пользуясь этим, оценим разность $r_k - R_k$. Так как $\varphi_k(R_k) = \psi_k(r_k)$ и ψ'_k монотонно возрастает, мы имеем

$$0 \leq r_k - R_k \leq \frac{\psi_k(r_k) - \psi_k(R_k)}{\psi'_k(R_k)} = \frac{\varphi_k(R_k) - \psi_k(R_k)}{\psi'_k(R_k)} \leq \frac{\varepsilon_k}{(1 - \varepsilon_k)\varphi'_k(R_k)}.$$

Отсюда следует, что при достаточно больших k

$$0 \leq r_k - R_k \leq \beta \varepsilon_k,$$

где $\beta = 2/\varphi'(R)$ (см. лемму 6.6). Если выполняется последнее неравенство и, кроме того, $r_k \leq 2R_k$ (т.е. $\varepsilon_k \leq R_k/\beta$), то

$$\begin{aligned} |\varphi'_k(R_k) - \psi'_k(r_k)| &= \left| \sum_{l=2}^k l(c_l R_k^{l-1} - a_{l,k} r_k^{l-1}) \right| \\ &\leq \sum_{l=2}^k l|(c_l - a_{l,k})R_k^{l-1} + (R_k^{l-1} - r_k^{l-1})a_{l,k}| \\ &\leq \sum_{l=2}^k l|c_l - a_{l,k}|R_k^{l-1} + \sum_{l=2}^k l|R_k^{l-1} - r_k^{l-1}|c_l \\ &\leq \varepsilon_k \sum_{l=2}^k l c_l R_k^{l-1} + \sum_{l=2}^k l c_l (r_k - R_k)(l-1)r_k^{l-2} \\ &\leq \varepsilon_k (1 + \beta) \left[\varphi'_k(R_k) + \sum_{l=2}^k l(l-1)2^{l-2} c_l R_k^{l-2} \right]. \end{aligned}$$

Поэтому последовательность $\{\varepsilon_k\}$ можно выбрать так, что $|\varphi'_k(R_k) - \psi'_k(r_k)| \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. По лемме 6.6 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi'_k(R_k) = \varphi'(R)$. Значит, тот же предел имеет и $\psi'_k(r_k)$. Так как $\psi'_k(r_k) = D_v(A_{f_k}^1)$ (см. (6.23) и (4.7)), отсюда в силу теоремы 6.4 вытекает первое из соотношений (6.22).

Второе доказывается еще проще. Действительно, в силу (6.23), (6.24)

$$\tilde{\psi}'_k(\tilde{r}_k) \geq (1 - \varepsilon_{n_k})\varphi'_{n_k, n_{k+1}}(\tilde{r}_k) \geq (1 - \varepsilon_{n_k})\varphi'_{n_k, n_{k+1}}(R_{n_k, n_{k+1}}),$$

а так как последовательность $\{n_k\}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi'_{n_k, n_{k+1}}(R_{n_k, n_{k+1}}) = \infty$$

(см. лемму 6.8), достаточно еще раз применить теорему 6.4. Предложение доказано.

В случае, когда $f \equiv 0$, предложение 6.9 можно значительно усилить. Однако прежде чем сделать это, убедимся в том, что существуют лепестковые графы G с неустойчиво-положительной матрицей смежности. Очевидно, это свойство, выраженное в терминах распределения $\{N_l(G), l \geq 2\}$, состоит в том, что степенной ряд $\sum_l N_l(G)z^l = \varphi(z)$ имеет ненулевой радиус сходимости R , причем $\varphi(R) = 1$, $\varphi'(R) < \infty$.

Возьмем любое натуральное $m > 2$, для которого $\sum_{l=m+1}^{\infty} 2^{-l}[2^l l^{-3}] = s < 1$ (здесь $[\cdot]$ обозначает целую часть числа). Тогда $1 - s = \sum_{l=1}^{\infty} \varepsilon_l 2^{-l}$, где $\varepsilon_l \in \{0, 1\}$, и достаточно положить $N_2(G) = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2$, $N_l(G) = \varepsilon_l$ при $3 \leq l \leq m$ и $N_l(G) = [2^l l^{-3}] + \varepsilon_l$ при $l \geq m+1$ (очевидно, при этом будет $R(G) = 1/2$).

До конца этого параграфа мы будем рассматривать f -равновесные меры на пространствах $X(G)$ при различных G , предполагая каждый раз, что $f = f_0 \equiv 0$. В этом случае все интересующие нас объекты определяются графом G . Будем поэтому писать A_G и μ^G вместо A_f и μ^f соответственно (заметим, что A_G — матрица смежности графа G).

6.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – лепестковый граф с неустойчиво-положительной матрицей A_G . Тогда для всякого замкнутого множества $\mathcal{M} \subset \{c\mu_G + (1-c)\delta_\infty, 0 \leq c \leq 1\}$ найдется такая исчерпывающая последовательность конечных подграфов $G_n \subset G$, что множество предельных точек последовательности мер μ^{G_n} совпадает с $\mathcal{M}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть v – центральная вершина графа G . В силу теоремы 6.4 достаточно найти для любого замкнутого подмножества $\mathcal{D}$ расширенной полупрямой $[D_v(A_G), +\infty]$ такую исчерпывающую последовательность подграфов $G_n \subset G$, что множество предельных точек числовой последовательности $\{D_v(A_{G_n})\}$ есть $\mathcal{D}$. Эта цель будет достигнута, если для любой последовательности чисел $\alpha_n > D_v(A_G)$ мы определим $\{G_n\}$ так, что при всех достаточно больших n будет выполняться неравенство

$$(6.25) \quad |D_v(A_{G_n}) - \alpha_n| < \frac{1}{n}.$$

Будем строить графы G_n по индукции. В качестве G_1 возьмем главный подграф графа G , образованный любыми двумя лепестками разной длины. Предположим, что $G_1, \dots, G_k$ ($k \geq 1$) уже построены. Пусть $k^* > k$ и $G(k^*)$ – главный подграф графа G , образованный всеми лепестками длины $\leq k^*$ (поскольку из допустимости A_G следует, что $N_l(G) < \infty$ при всех $l \geq 2$, этот подграф конечен). Положив

$$\psi(z) = \varphi_{vv}^0(A_{G(k^*)}, z), \quad R = R(A_G), \quad R(k^*) = R(A_{G(k^*)}),$$

подберем настолько большое k^* , что $G_k \subset G(k^*)$ и

$$(6.26) \quad |\psi'(R) - D_v(A_G)| < \frac{1}{4(k+1)}.$$

С учетом леммы 6.6 можно также считать (быть может, еще увеличив k^*), что

$$(6.27) \quad |\psi'(R(k^*)) - D_v(A_G)| < \frac{1}{4(k+1)}.$$

Очевидно, $R < R(k^*) < 1$ (это вытекает из наличия в $G(k^*)$ лепестков разной длины и целочисленности коэффициентов $Q_{vv}(A_{G(k^*)}, n)$).

Граф G_{k+1} будет получаться из $G(k^*)$ добавлением некоторого числа $b \leq N_m(G)$ лепестков длины $m > k^*$, где m и b еще подлежат определению.

Положим

$$\psi_{m,b}(z) = \psi(z) + bz^m, \quad d_{m,b} = \psi'_{m,b}(R_{m,b}), \quad m \geq k^* + 1, \quad 0 \leq b \leq N_m,$$

где $N_m = N_m(G)$ и $R_{m,b} > 0$ определяется соотношением $\psi_{m,b}(R_{m,b}) = 1$. Из монотонности ψ вытекает, что $R < R_{m,b+1} \leq R_{m,b} \leq R(k^*)$ и

$$(6.28) \quad \begin{aligned} d_{m,b+1} - d_{m,b} &= \psi'(R_{m,b+1}) - \psi'(R_{m,b}) + mb(R_{m,b+1}^{m-1} - R_{m,b}^{m-1}) + mR_{m,b+1}^{m-1} \\ &\leq \psi'(R(k^*)) - \psi'(R) + (R(k^*))^{m-1}m. \end{aligned}$$

При доказательстве леммы 6.8 мы установили (см. (6.18)), что выбором подходящего m можно сделать производную $\psi'_{m, N_m}(R_{m, N_m})$ как угодно большой. С учетом этого факта, а также неравенства $R(k^*) < 1$ подберем $m = m^*$, удовлетворяющее условиям

$$(6.29) \quad (R(k^*))^{m^*-1} m^* \leq \frac{1}{2(k+1)}, \quad \psi'_{m^*, N_{m^*}}(R_{m^*, N_{m^*}}) > \alpha_{k+1}.$$

Применив (6.26), (6.27) и первое из этих условий к (6.28), получим

$$d_{m^*, b+1} - d_{m^*, b} \leq \frac{1}{k+1}.$$

Отсюда с помощью второго из условий (6.29) можно заключить, что существует $b = b^* \leq N_{m^*}$, для которого

$$|d_{m^*, b^*} - \alpha_{k+1}| \leq \frac{1}{k+1}.$$

Определив граф G_{k+1} указанным выше способом при $m = m^*$, $b = b^*$, непосредственно убеждаемся, что $D_v(A_{G_{k+1}}) = d_{m^*, b^*}$ и, значит, (6.25) выполняется также при $n = k+1$. Предложение доказано.

§ 7. Асимптотика дискретных инвариантных мер

Очевидно, всякая дискретная S -инвариантная мера, определенная на $X(G)$, сосредоточена на множестве периодических точек преобразования S и принимает одинаковые значения на всех одноточечных множествах, входящих в одну периодическую орбиту. Мы будем рассматривать дискретные инвариантные меры, сосредоточенные на периодических орбитах фиксированного периода и определяемые функциями $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$. Пусть, как и раньше, $\text{Fix}_n(G) = \{x \in X(G) : S^n x = x\}$, $n = 1, 2, \dots$. При $B \in \mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \mathcal{B}(X(G))$ – совокупность борелевских подмножеств пространства $X(G)$, положим

$$(7.1) \quad Q_B(G, f, n) = \sum_{x \in B \cap \text{Fix}_n(G)} \exp \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i x),$$

если $\text{Fix}_n(G) \neq \emptyset$, и $Q_B(G, f, n) = 0$ в противном случае (ср. (2.1)). Если $Y \subset X(G)$, $Y \cap \text{Fix}_n(G) \neq \emptyset$ и $Q_Y(G, f, n) < \infty$, то равенство

$$(7.2) \quad \mu_n^{f, Y}(B) = \frac{Q_{B \cap Y}(G, f, n)}{Q_Y(G, f, n)}, \quad B \in \mathcal{B},$$

определяет на $X(G)$ дискретную вероятностную меру, которая, как легко проверить, будет S -инвариантной, если S -инвариантно множество Y . Возможен случай, когда для некоторых $Y \subset X(G)$ мера $\mu_n^{f, Y}$ определена, а мера $\mu_n^{f, X(G)}$ – нет; если же обе они существуют, то $\mu_n^{f, Y}$ есть, очевидно, условная мера при условии Y , отвечающая мере $\mu_n^{f, X(G)}$.

Ниже нам потребуется несколько вспомогательных утверждений. Первое из них, неравенство Рюэля [43], справедливо в весьма общей ситуации.

7.1. ЛЕММА. Пусть $(X, \mathcal{B})$ – измеримое пространство, $S: X \rightarrow X$ – измеримое отображение и $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ – измеримые функции, причем g ограничена. Предположим, что для $n \in \mathbb{N}$ и S -инвариантного множества $Y \in \mathcal{B}$ формулами, аналогичными (7.1) и (7.2) (в которых надо опустить символ G), определены константы $Q_Y(f, n)$ и мера $\mu_n^{f, Y}$. Тогда

$$(7.3) \quad n^{-1} \ln Q_Y(f + g, n) \geq n^{-1} \ln Q_Y(f, n) + \int g d\mu_n^{f, Y}.$$

Хотя предположения, при которых неравенство (7.3) получено в [43], существенно отличаются от наших, приведенное там доказательство опирается лишь на сходимость ряда, определяющего $Q_Y(f, n)$, и ограниченность функции g .

Возвращаясь к СЦМ $(X(G), S)$, заметим, что $\text{Fix}_n(G) \neq \emptyset$ при всех достаточно больших n вида kd , где $d = d(G)$ – период графа G , и $\text{Fix}_n(G) = \emptyset$, если $n \neq kd$. С учетом этого положим для $B \in \mathcal{B}$

$$(7.4) \quad \begin{aligned} q_B^-(f) &= \varliminf_{k \rightarrow \infty} (kd)^{-1} \ln Q_B(G, f, kd), \\ q_B^+(f) &= \varlimsup_{k \rightarrow \infty} (kd)^{-1} \ln Q_B(G, f, kd). \end{aligned}$$

7.2. ЗАМЕЧАНИЕ. Если $v \in V(G)$, $B = C(v)$, то при каждом n множество $B \cap \text{Fix}_n(G)$ находится во взаимнооднозначном соответствии с множеством $\Gamma_{vv}(G, n)$, а если к тому же $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, то $Q_B(G, f, n) = Q_{vv}(A_f, n)$. Следовательно (см. теорему 4.4 и замечание 2.2),

$$q_B^-(f) = q_B^+(f) = -\ln R(A_f) = P^{\text{int}}(X(G), S, f)$$

и положительность радиуса сходимости $R(A_f)$ гарантирует существование меры $\mu_{nd}^{f, B}$, если n достаточно велико.

7.3. ЛЕММА. Пусть $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $\bar{g} \in C(\overline{X}(G))$, $g = \bar{g}|_{X(G)}$ и $v \in V(G)$. Тогда

$$(7.5) \quad q_{C(v)}^-(f + g) = q_{C(v)}^+(f + g) = P^{\text{int}}(X(G), S, f + g).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (7.1), (7.4) непосредственно вытекает, что величины $q_{C(v)}^-(f + g)$ и $q_{C(v)}^+(f + g)$ при фиксированных f и v непрерывно зависят от $\bar{g}$ как элемента пространства $C(\overline{X}(G))$ и не меняются при замене $\bar{g}$ на $S^*\bar{g}$. То же самое верно и для $P^{\text{int}}(X(G), S, f + g)$, так как $P^{\text{int}}(X(G), S, f + g) = P_f(\bar{g})$ (см. (5.1) и лемму 5.2). Поэтому достаточно доказать (7.5) для функций $\bar{g}$, удовлетворяющих условию $g \in \bigcup_{k \geq 2} \mathcal{F}_0^k(G)$.

Пусть $g \in \mathcal{F}_0^k(G)$, где $k \geq 1$ таково, что $C(v) \cap \text{Fix}_k(G) \neq \emptyset$ (ясно, что это не ограничивает общности). Тогда существует непустой сплошной v -цилиндр $C \subset X(G)$ с

носителем $\{0, \dots, k\}$ (см. определение 5.5). Покажем, что для любого такого цилиндра

$$(7.6) \quad q_C^-(f+g) = q_{C(v)}^-(f+g), \quad q_C^+(f+g) = q_{C(v)}^+(f+g).$$

Очевидно, при некотором $\gamma \in \Gamma_{vv}(G, k)$

$$C = C(\gamma) = \{x \in X(G) : (x_0, \dots, x_k) = \gamma\},$$

и так как $C \subset C(v)$, из (7.1) вытекает, что

$$(7.7) \quad Q_C(G, f+g, n) \leq Q_{C(v)}(G, f+g, n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Пусть $y = (y_i, i \in \mathbb{Z})$ – произвольная точка из $C(v) \cap \text{Fix}_n(G)$, $n \geq k$, и $\gamma_y = (y_0, \dots, y_n)$. В таком случае $y_0 = y_n = v$ и $(y_{mn}, y_{mn+1}, \dots, y_{(m+1)n}) = \gamma_y$ при всех $m \in \mathbb{Z}$. Рассмотрим последовательность $\hat{y} = (\hat{y}_i, i \in \mathbb{Z})$, определяемую условием

$$(\hat{y}_{m(n+k)}, \hat{y}_{m(n+k)+1}, \dots, \hat{y}_{(m+1)(n+k)}) = \gamma_y, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Из предположений $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и $g \in \mathcal{F}_0^k(G)$ следует, что при $n > k$

$$\begin{aligned} & \exp \sum_{i=0}^{n+k-1} [f(S^i \hat{y}) + g(S^i \hat{y})] \\ &= \exp \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} f(S^i \hat{y}) + \sum_{i=0}^{k-1} g(S^i \hat{y}) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=0}^{n-1} [f(S^i y) + g(S^i y)] + \sum_{i=k}^{n+k-1} g(S^i \hat{y}) - \sum_{i=0}^{n-1} g(S^i y) \right\} \\ &= \exp \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} f(S^i \hat{y}) + \sum_{i=0}^{k-1} g(S^i \hat{y}) \right. \\ & \quad \left. + \sum_{i=0}^{n-1} [f(S^i y) + g(S^i y)] + \sum_{i=n+1}^{n+k-1} g(S^i \hat{y}) - \sum_{i=n+1-k}^{n-1} g(S^i \hat{y}) \right\} \\ &\geq Q(A_f, \gamma) \exp(-3k\|\bar{g}\|) \exp \sum_{i=0}^{n-1} [f(S^i y) + g(S^i y)], \end{aligned}$$

а так как, очевидно, $\hat{y} \in C \cap \text{Fix}_{n+k}(S)$ и разным y отвечают разные $\hat{y}$, мы получаем

$$Q_C(G, f+g, n+k) \geq \beta Q_{C(v)}(G, f+g, n), \quad n \geq k,$$

где β не зависит от n . Это неравенство в сочетании с (7.7) приводит к (6.6), так как k кратно d . Поэтому из (7.7), (7.8) вытекает (7.6).

Для завершения доказательства леммы воспользуемся преобразованием Φ_{k+1} , переводящим граф G , пространство $X(G)$ и функции f, g соответственно в G_{k+1} , $X(G_{k+1})$, f_{k+1} и g_{k+1} (см. § 1). Из определения следует, что

$$f_{k+1}, g_{k+1} \in \mathcal{F}_0^0(G_{k+1}), \quad \Phi_{k+1} \text{Fix}_n(G) = \text{Fix}_n(G_{k+1})$$

и $\Phi_{k+1}C$ – цилиндр в $X(G_{k+1})$ с носителем $\{0\}$. Тогда согласно замечанию 7.2

$$q_{\Phi_{k+1}C}^-(f_{k+1} + g_{k+1}) = q_{\Phi_{k+1}C}^+(f_{k+1} + g_{k+1}) = P^{\text{int}}(X(G_{k+1}), S, f_{k+1} + g_{k+1}).$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} q_{\Phi_{k+1}C}^-(f_{k+1} + g_{k+1}) &= q_C^-(f + g), \\ q_{\Phi_{k+1}C}^+(f_{k+1} + g_{k+1}) &= q_C^+(f + g), \\ P^{\text{int}}(X(G_{k+1}), S, f_{k+1} + g_{k+1}) &= P^{\text{int}}(X(G), S, f + g); \end{aligned}$$

первые два соотношения непосредственно следуют из определения, а последнее – из того факта, что Φ_{k+1} – гомеоморфизм. Теперь (7.5) вытекает из (7.6). Лемма доказана.

Изучим поведение при $n \rightarrow \infty$ последовательности S -инвариантных мер $\mu_n^{f, \hat{C}(v)}$, где $\hat{C}(v) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n C(v)$ – наименьшее S -инвариантное множество, содержащее цилиндр $C(v)$. Здесь мы неоднократно будем пользоваться тем, что для любой функции $h: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$

$$(7.8) \quad Q_{C(v)}(G, h, n) \leq Q_{\hat{C}(v)}(G, h, n) \leq nQ_{C(v)}(G, h, n), \quad n \geq 1$$

(это непосредственно вытекает из определения), и, следовательно,

$$(7.9) \quad q_{C(v)}^-(h) = q_{\hat{C}(v)}^-(h), \quad q_{C(v)}^+(h) = q_{\hat{C}(v)}^+(h).$$

Как и в § 6, будем считать все рассматриваемые меры определенными на $\overline{X}(G)$, а их сходимость понимать как слабую сходимость на этом пространстве. Сейчас мы снова воспользуемся субдифференциалом $\partial P_f(g)$, введенным в § 6.

7.4. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $R(A_f) > 0$, $v \in V(G)$ и μ – произвольная предельная точка последовательности мер $\mu_{nd}^{f, \hat{C}(v)}$, где $d = d(G)$, то $\mu \in \partial P_f(0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале заметим, что так как $R(A_f) > 0$, при всех достаточно больших n выполняются неравенства $0 < Q_{\hat{C}(v)}(G, f, nd) < \infty$ (см. (7.8) и замечание 7.2). Следовательно, при таких n определена мера $\mu_{nd}^{f, \hat{C}(v)}$. Пусть

$$\mu = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k d}^{f, \hat{C}(v)}, \quad \bar{g} \in C(\overline{X}(G)), \quad g = \bar{g}|_{\overline{X}(G)}.$$

Положив в (7.3) $Y = \widehat{C}(v)$, $n = n_k$ и перейдя к пределу при $k \rightarrow \infty$, получим

$$(7.10) \quad \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (n_k d)^{-1} \ln Q_{\widehat{C}(v)}(G, f + g, n_k d) \geq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} (n_k d)^{-1} \ln Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, n_k d) + \int_{\overline{X}(G)} \bar{g} d\mu.$$

С учетом (7.9) можно заменить в (7.10) $\widehat{C}(v)$ на $C(v)$, а затем, пользуясь леммой 7.3, получить неравенство

$$P^{\text{int}}(X(G), S, f + g) \geq P^{\text{int}}(X(G), S, f) + \int \bar{g} d\mu.$$

Условие $R(A_f) > 0$ гарантирует, что обе его части конечны (см. замечание 7.2). Но тогда $\mu \in \partial P_f(0)$ (см. (5.1) и определение 5.3), что и требовалось доказать.

Комбинируя предложение 7.4 с теоремой 5.7, моментально получаем следующий результат.

7.5. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $v \in V(G)$ и $d = d(G)$. Предположим, что $R(A_f) > 0$. Тогда:

- 1) если матрица A_f невозвратна или нуль-возвратна, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)} = \delta_\infty$;
- 2) если матрица A_f устойчиво-положительна, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)} = \mu^f$.

В следствии 7.5 не упоминается случай неустойчиво-положительной матрицы A_f , так как для его изучения методы настоящей главы недостаточны. Мы рассмотрим этот случай в гл. 3, посвященной динамическим дзета-функциям.

Перейдем к изучению мер $\mu_n^{f, X(G)}$, для которых мы в дальнейшем будем употреблять сокращенное обозначение μ_n^f .

7.6. ТЕОРЕМА. Пусть $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $d = d(G)$, $R(A_f) > 0$ и $Q_{X(G)}(G, f, nd) < \infty$ при всех достаточно больших n . Предположим, что матрица A_f невозвратна или нуль-возвратна. Тогда

$$(7.11) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{nd}^f = \delta_\infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось, множество $\text{Fix}_{nd}(G)$ непусто при всех достаточно больших n . Поэтому условие $Q_{X(G)}(G, f, nd) < \infty$ гарантирует существование при этих n меры μ_{nd}^f . Из (7.1) и определения множества $\widehat{C}(v)$, $v \in V(G)$, видно, что при всех $v \in V(G)$

$$Q_{\widehat{C}(v) \cap C(v)}(G, f, nd) = Q_{C(v)}(G, f, nd),$$

$$Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd) \leq Q_{X(G)}(G, f, nd),$$

а потому

$$\mu_{nd}^f(C(v)) \leq \mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)}(C(v)),$$

и если матрица A_f невозвратна или нуль-возвратна, то (7.11) вытекает из п. 1 следствия 7.5. Теорема доказана.

В случае, когда матрица A_f положительно-возвратна, мы вынуждены пока ограничиться описанием возможных предельных точек последовательности $\{\mu_{nd}^f\}$. Начнем с известной тауберовой теоремы Эрдеша–Феллера–Полларда [48].

7.7. ЛЕММА. Пусть $\varphi(z)$ и r — соответственно сумма и радиус сходимости степенного ряда с неотрицательными коэффициентами a_n , $n \geq 1$, и пусть $R \in (0, r]$ таково, что $\varphi(R) = 1$. Тогда для коэффициентов b_n разложения в степенной ряд функции $1/(1 - \varphi)$ справедливо соотношение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_{nd} R^{nd} = \frac{d}{R\varphi'(R)},$$

где $d = \text{НОД}\{n : a_n > 0\}$ и $\varphi'(R)$ при $R = r$ понимается как сумма ряда $\sum_{n=1}^{\infty} na_n r^{n-1}$ (конечная или бесконечная).

Следующая теорема до некоторой степени аналогична теореме 6.4.

7.8. ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия теоремы 7.6. Предположим, что матрица A_f положительно-возвратна. Тогда для сходимости последовательности мер $\mu_{n_k d}^f$, где $n_k \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, необходимо и достаточно, чтобы существовал предел

$$(7.12) \quad u(f, \{n_k\}) = \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{X(G)}(G, f, n_k d) R^{n_k d},$$

где $R = R(A_f)$. Если это условие выполнено, то

$$(7.13) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k d}^f = \alpha \mu^f + (1 - \alpha) \delta_{\infty},$$

где

$$(7.14) \quad \alpha = \frac{d}{u(f, \{n_k\})}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно замечанию 7.2

$$Q_{C(v)}(G, f, n) = Q_{vv}(A_f, n), \quad n \geq 1, \quad v \in V(G).$$

Значит (см. § 2),

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_{C(v)}(G, f, n) z^n = \varphi_{vv}(A_f, z) = \frac{1}{1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)} - 1.$$

Применив к функции $\varphi(z) = \varphi_{vv}(A_f, z)$ лемму 7.7, получим (см. (4.7), (4.12))

$$(7.15) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{C(v)}(G, f, nd) R^{nd} = \frac{d}{R D_v(A_f)} = d \mu^f(C(v)), \quad v \in V(G).$$

Так как по определению (см. (7.2))

$$\mu_{n_k d}^f(\overline{C}) = \mu_{n_k d}^f(C) = \frac{Q_{C(v)}(G, f, n_k d) R^{n_k d}}{Q_{X(G)}(G, f, n_k d) R^{n_k d}},$$

а множество $\overline{C}(v) \subset \overline{X}(G)$ не только замкнуто, но и открыто, из (7.15) следует, что существование предела $\lim_{k \rightarrow \infty} Q_{X(G)}(G, f, n_k d) R^{n_k d}$ необходимо для сходимости последовательности мер $\mu_{n_k d}^f$. Для доказательства достаточности этого условия заметим, что, пользуясь отображениями Φ_k (см. § 1), можно обобщить (7.15) на все сплошные цилиндры $C \subset X(G)$. Тогда в силу (7.12), (7.14) для любого такого цилиндра

$$(7.16) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k d}^f(\overline{C}) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{n_k d}^f(C) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{Q_C(G, f, n_k d) R^{n_k d}}{Q_{X(G)}(G, f, n_k d) R^{n_k d}} = \alpha \mu^f(C).$$

Пусть ν – произвольная предельная точка последовательности мер $\mu_{n_k d}^f$ (такие точки существуют, так как $\overline{X}(G)$ – компактное пространство). В силу (7.16) $\nu(\overline{C}) = \alpha \mu^f(C)$, если C – сплошной цилиндр в $X(G)$. Равенство (7.13) выводится отсюда точно так же, как это было сделано (пусть и для других ν и α) в конце доказательства теоремы 6.4. Теорема доказана.

7.9. СЛЕДСТВИЕ. *Для сходимости $\mu_{k d}^f$ к μ^f (при $k \rightarrow \infty$) необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение*

$$(7.17) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} Q_{X(G)}(G, f, k d) R^{k d} = d.$$

Теоремы 7.6 и 7.8 говорят о том, что меры $\mu_{k d}^f$ при $k \rightarrow \infty$ ведут себя во многом так же, как изученные в § 6 равновесные меры, отвечающие ограничениям функции f на пространства путей конечных подграфов графа G : всякая предельная точка последовательности $\{\mu_{k d}^f\}$ имеет вид, указанный в правой части (7.13) (ср. (6.2)), а в случае невозвратной или нуль-возвратной матрицы A_f имеет место сходимость к δ_∞ . Однако, как мы увидим в гл. 3, на случай положительно-возвратных матриц A_f эта аналогия не распространяется. Сейчас мы получим одно достаточное условие сходимости $\mu_{k d}^f$ к μ^f , которое будет использоваться в гл. 3.

7.10. ТЕОРЕМА. *Пусть $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, $d = d(G)$ и найдутся такие $t > 0$, $v \in V(G)$, что*

$$(7.18) \quad q_{X(G)}^+(f - t \mathbf{1}_{C(v)}) < q_{X(G)}^+(f).$$

Тогда

$$(7.19) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{n d}^f = \mu^f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Вначале покажем, что при условии (7.18) матрица A_f устойчиво-положительна. Обозначим через G^v главный подграф графа G (см. § 3), множеством вершин которого служит $V(G) \setminus \{v\}$. Из (7.1) непосредственно вытекает, что для любой функции $h: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$ и любого $n \geq 1$

$$Q_{X(G)}(G, h, n) = Q_{\widehat{C}(v)}(G, h, n) + Q_{X(G^v)}(G, h, n),$$

где, как и раньше, $\widehat{C}(v) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} S^k C(v)$. Поэтому

$$(7.20) \quad q_{X(G)}^+(h) = \max\{q_{\widehat{C}(v)}^+(h), q_{X(G^v)}^+(h)\}.$$

Положив здесь $h = f - s\mathbf{1}_{C(v)}$, $0 \leq s < \infty$, и заметив, что $q_{X(G^v)}^+(f - s\mathbf{1}_{C(v)})$ не зависит от s , получим с учетом (7.18) неравенства

$$(7.21) \quad q_{X(G^v)}^+(f) < q_{\widehat{C}(v)}^+(f),$$

$$(7.22) \quad q_{\widehat{C}(v)}^+(f - s\mathbf{1}_{C(v)}) < q_{\widehat{C}(v)}^+(f).$$

Привсяком $s \in [0, \infty)$ функция $-s\mathbf{1}_{C(v)}$ есть, очевидно, ограничение на $X(G)$ функции $-s\mathbf{1}_{\widehat{C}(v)} \in C(\overline{X}(G))$. Поэтому в силу (7.9) и леммы 7.3

$$(7.23) \quad \begin{aligned} q_{\widehat{C}(v)}^+(f - s\mathbf{1}_{C(v)}) &= q_{C(v)}^+(f - s\mathbf{1}_{C(v)}) \\ &= P^{\text{int}}(X(G), S, f - s\mathbf{1}_{C(v)}), \quad s \in [0, \infty). \end{aligned}$$

Взяв $s = t$ и $s = 0$, перепишем (7.22) в виде

$$(7.24) \quad P^{\text{int}}(X(G), S, f - t\mathbf{1}_{C(v)}) < P^{\text{int}}(X(G), S, f).$$

По теореме 4.4

$$P^{\text{int}}(X(G), S, h) = -\ln R(A_h)$$

для любой функции $h \in \mathcal{F}_0^1(G)$. Поэтому из (7.23) (при $s = 0$) и условия $R(A_f) > 0$ вытекает, что $q_{X(G^v)}^+(f) < \infty$, а (7.24) (с учетом (7.23) и замечания 3.16) позволяет заключить, что матрица A_f устойчиво-положительна.

Вернемся теперь к неравенству (7.21). Положив

$$\delta = q_{\widehat{C}(v)}^+(f) - q_{X(G^v)}^+(f),$$

непосредственно убеждаемся, что если $\overline{g} \in C(\overline{X}(G))$, $\|\overline{g}\| < \delta/2$ и $g = \overline{g}|_{X(G)}$, то

$$q_{X(G^v)}^+(f + g) < q_{\widehat{C}(v)}^+(f + g).$$

Это значит (см. (7.9), (7.20) и лемму 7.3), что для таких g

$$(7.25) \quad q_{X(G)}^+(f + g) = P^{\text{int}}(X(G), S, f + g).$$

Подставив те же f и g вместе с $Y = X(G)$ в (7.3) и перейдя к пределу при $n = kd \rightarrow \infty$, получим (с учетом (7.25) и аналогичного равенства для f)

$$P^{\text{int}}(X(G), S, f + g) \geq P^{\text{int}}(X(G), S, f) + \int g \, d\nu,$$

где ν — любая предельная точка последовательности $\{\mu_{nd}^f\}$. Стало быть, ν служит $\delta/2$ -субградиентом функции $P_f(g) = P^{\text{int}}(X(G), S, f + g)$ в точке $g \equiv 0$ (см. §5). В таком случае согласно лемме 5.4 $\nu \in \partial P_f(0)$. Но так как по доказанному выше матрица A_f устойчиво-положительна, мы знаем из теоремы 5.9, что $\partial P_f(0) = \{\mu^f\}$. Отсюда следует доказываемое утверждение.

7.11. СЛЕДСТВИЕ. Если граф G конечен и $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, то имеет место предельное соотношение (7.19), понимаемое в смысле слабой сходимости мер на $X(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку для конечного G пространство $X(G)$ компактно, его можно отождествить с $\overline{X}(G)$. Очевидно, для любой функции $h: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q_{X(G)}(G, h, n) = \sum_{v \in V(G)} Q_{C(v)}(G, h, n),$$

а при $h \in \mathcal{F}_0^1(G)$ в силу леммы 7.3 и теоремы 4.4

$$(7.26) \quad q_{X(G)}^+(h) = \max_{v \in V(G)} q_{C(v)}^+(h) = P^{\text{int}}(X(G), S, h) = -\ln R(A_h).$$

Так как конечная матрица всегда устойчиво-положительна (см. предложение 3.1.), справедливо неравенство

$$R(A_{f-t\mathbf{1}_{C(v)}}) > R(A_f), \quad v \in V(G), \quad t \in (0, 1).$$

Поэтому из (7.26) видно, что выполняется условие (7.18), которое по теореме 7.10 влечет за собой (7.19). Следствие доказано.

Глава 3.

Динамические дзета-функции, связанные с СЦМ

Динамические дзета-функции, которым посвящена эта глава, служат наряду с дискретными инвариантными мерами, важной характеристикой множества периодических точек любой динамической системы. Обе указанные характеристики содержат существенную информацию об этом множестве и, тем самым, друг о друге. Мы, в частности, используем эту связь для более точного, чем в предыдущей главе, описания асимптотики дискретных инвариантных мер. Заметим, что в случае конечных СЦМ эта задача решается без привлечения дзета-функций, причем не только для функций $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, к которым относится следствие 7.11, но и для функций более общего вида (см. [43]).

§ 8. Теорема факторизации и некоторые ее следствия

Пусть $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$, $B \subset X(G)$ и $Q_B(G, f, n) < \infty$ при всех $n \geq 1$. Тогда можно определить степенной ряд

$$(8.1) \quad \psi_{f,B}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Q_B(G, f, n)}{n} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \sum_{x \in B \cap \text{Fix}_n(G)} \exp \sum_{i=0}^{n-1} f(S^i x).$$

Если этот ряд имеет ненулевой радиус сходимости $r(G, f, B)$, то можно говорить о $\psi_{f,B}$ как о функции, аналитической в круге $|z| < r(G, f, B)$.

8.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию

$$\zeta_{f,B}(z) = \exp \psi_{f,B}(z)$$

будем называть *локальной динамической дзета-функцией* (ζ -*функцией*), отвечающей паре (f, B) .

Эпитет “локальная”, конечно, связан с множеством B , которое не обязательно совпадает со всем пространством $X(G)$. При $B = X(G)$ будем опускать как этот эпитет, так и указание на множество B во всех обозначениях, относящихся к динамической дзета-функции; в частности, будем писать ψ_f , ζ_f и $r(G, f)$ вместо $\psi_{f, X(G)}$, $\zeta_{f, X(G)}$ и $r(G, f, X(G))$ соответственно.

Функция ζ_f при $f \equiv 0$ (для произвольной динамической системы) была введена Е. Артином и Б. Мазуром [37], а в общем случае – Д. Рюэлем [38].

Следующая важная теорема устанавливает связь между локальными ζ -функциями и производящими функциями, изучавшимися в гл. 1. Хотя по существу она не является новой (ср. [39]), нам не удалось найти в литературе ее подробного доказательства. В формулировке будут фигурировать уже встречавшееся в гл. 2 множество $\widehat{C}(v) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n C(v)$ и функция $f^v = f|_{X(G^v)}$, где G^v – главный подграф графа G с множеством вершин $V(G^v) = V(G) \setminus \{v\}$ (введенный при доказательстве теоремы 7.10).

8.2. ТЕОРЕМА. Пусть G – конечный или счетный ориентированный граф (не обязательно связный), $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и A_f – соответствующая матрица Больцмана. Тогда для произвольной вершины $v \in V(G)$ выполняются тождества

$$(8.2) \quad \zeta_{f, \widehat{C}(v)}(z) = [1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)]^{-1}, \quad |z| < R(A_f),$$

$$(8.3) \quad \zeta_f(z) = [1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)]^{-1} \zeta_{f^v}(z), \quad |z| < r(G, f).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом $n \geq 1$ будем считать последовательности $x, y \in \text{Fix}_n(G)$ эквивалентными и писать $x \sim y$, если найдется такое $k \in \mathbb{Z}$, что $S^k x = y$. Легко понять, что если $x = (x_i, i \in \mathbb{Z}) \in \widehat{C}(v) \cap \text{Fix}_n(G)$, то $x_i = v$ при бесконечно многих $i < 0$ и бесконечно многих $i > 0$. Каждой такой последовательности x поставим в соответствие числа

$$i^-(x) = \max\{i \leq 0 : x_i = v\}, \quad i^+(x) = i^-(x) + n, \\ k(x) = \#\{i : i^-(x) \leq i < i^+(x), x_i = v\}.$$

Очевидно, $k(x) = k(y)$, если $x \sim y$. Поэтому множество тех $x \in \widehat{C}(v) \cap \text{Fix}_n(G)$, для которых $k(x) = k$, разбивается на описанные только что классы эквивалентности. Совокупность этих классов обозначим через $\mathcal{F}_{n,k}$.

Пусть $x \in \widehat{C}(v) \cap \text{Fix}_n(G)$, $k(x) = k$ и $i_0, \dots, i_{k-1}$ определяются условиями: $i^-(x) = i_0 < i_1 < \dots < i_{k-1} < i^+(x)$, $x_i = v$ при $i = i_r$, $1 \leq r \leq k-1$. Тогда по x можно построить последовательность $(\gamma_1, \dots, \gamma_k) = \tilde{\gamma}(x)$, где $\gamma_r = (x_{i_r}, \dots, x_{i_{r+1}})$ – цикл из $\Gamma_{vv}^0(G)$, $r = 0, \dots, k-1$.

Две последовательности элементов множества $\Gamma_{vv}^0(G)$ будем считать эквивалентными, если они получаются друг из друга циклической перестановкой. Очевидно, у эквивалентных последовательностей совпадают число и суммарная длина входящих в них циклов. Так же легко проверить, что $\tilde{\gamma}(x)$ и $\tilde{\gamma}(x')$ эквивалентны в том и только

том случае, когда $x \sim x'$. Поэтому, поставив в соответствие каждому классу эквивалентности $F \in \mathcal{F}_{n,k}$ класс эквивалентности $\alpha(F) = H(\tilde{\gamma}(x))$, содержащий последовательность $\tilde{\gamma}(x)$, где x — любая точка из F , мы получим обратимое отображение α множества $\mathcal{F}_{n,k}$ на множество $\mathcal{H}_{n,k}$ классов эквивалентности последовательностей $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in (\Gamma_{vv}^0(G))^k$ с $l(\gamma_1) + \dots + l(\gamma_k) = n$.

Сравним мощности множеств $F \in \mathcal{F}_{n,k}$ и $\alpha(F) \in \mathcal{H}_{n,k}$. Пусть $\alpha(F) = H$, $\tilde{\gamma} \in H$ и $m(\gamma)$ — наименьшее из таких натуральных m , что $\tilde{\gamma}$ можно разбить на m одинаковых блоков. Очевидно, $m(\tilde{\gamma})$ будет одним и тем же для всех $\tilde{\gamma} \in H$ и $\#H = k/m(\tilde{\gamma})$, $\#F = n/m(\tilde{\gamma})$. Следовательно,

$$(8.4) \quad \frac{\#F}{\#\alpha(F)} = \frac{n}{k}, \quad F \in \mathcal{F}_{n,k}.$$

Теперь заметим, что если $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и $A = A_f$, то для любых $n \geq 1$, $k = 1, \dots, n$, $F \in \mathcal{F}_{n,k}$, $x \in F$ и любой последовательности $\tilde{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \alpha(F)$ выполняется равенство

$$(8.5) \quad \exp \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x) = \prod_{r=1}^k Q(A, \gamma_r).$$

Поэтому, введя обозначения

$$\Gamma(n, k) = \left\{ (\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in (\Gamma_{vv}^0(G))^k : \sum_{r=1}^k l(\gamma_r) = n \right\},$$

$$\tilde{Q}(A_f, \tilde{\gamma}) = \prod_{r=1}^k Q(A, \gamma_r), \quad \tilde{\gamma} \in \Gamma(n, k),$$

получим (см. (8.4))

$$(8.6) \quad \begin{aligned} Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, n) &= \sum_{x \in \widehat{C}(v) \cap \text{Fix}_n(G)} \exp \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{F \in \mathcal{F}_{n,k}} \sum_{x \in F} \exp \sum_{j=0}^{n-1} f(S^j x) \\ &= \sum_{k=1}^n \sum_{F \in \mathcal{F}_{n,k}} \#F \sum_{\tilde{\gamma} \in \alpha(F)} \tilde{Q}(A_f, \tilde{\gamma}) / \#\alpha(F) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{n}{k} \sum_{H \in \mathcal{H}_{n,k}} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in H} \prod_{r=1}^k Q(A_f, \gamma_r) \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{(\gamma_1, \dots, \gamma_k) \in \Gamma(n, k)} \prod_{r=1}^k Q(A_f, \gamma_r) \\ &= n \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \sum_{l_1 + \dots + l_k = n} \prod_{r=1}^k Q_{vv}^0(A_f, l_r). \end{aligned}$$

Внутренняя сумма в последнем выражении есть, очевидно, коэффициент при z^n в разложении функции $(\varphi_{vv}^0(A_f, z))^k$ по степеням z .

Заметим, что

$$(8.7) \quad |\varphi_{vv}^0(A_f, z)| < 1, \quad |z| < R(A_f).$$

Если граф G связан, это вытекает из п. 2 леммы 2.6, а если G несвязен, те же соображения надо применить к его связной компоненте G_v , содержащей вершину v , и к функции $f_v = f|_{X(G_v)}$ (может случиться, что эта связная компонента пуста, но в таком случае $\varphi_{vv}^0(A_f, z) \equiv 0$).

Из (8.1), (8.6) с учетом (8.7) получаем

$$\psi_{f, \widehat{C}(v)}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} [\varphi_{vv}^0(A_f, z)]^k = -\ln[1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)], \quad |z| < R(A_f).$$

Отсюда сразу следует (8.2) (см. определение 8.1), а для доказательства (8.3) достаточно заметить, что $r(G, f) \leq R(A_f)$ и справедливо тождество

$$\psi_f(z) = \psi_{f, \widehat{C}(v)}(z) + \psi_{f^v}(z), \quad |z| < r(G, f).$$

Теорема доказана.

8.3. СЛЕДСТВИЕ [5, добавление 4]. *Если граф G конечен и $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, то ζ_f продолжается на всю комплексную плоскость как рациональная функция. При этом $r(G, f) = R(A_f)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применив формулу (8.3) к функции ζ_f и произвольной вершине $v = v_1 \in V(G)$, можно затем заменить v_1 на любую вершину v_2 графа G^{v_1} и снова применить (8.3), но уже к $\zeta_{f^{v_1}}$ и v_2 . Продолжая эту процедуру, мы в конце концов получим тождество

$$(8.8) \quad \zeta_f(z) = \prod_{i=1}^N (1 - \varphi_{v_i v_i}^0(A_{f_i}, z))^{-1},$$

где $N = \#V(G)$, $v_1, \dots, v_N$ – занумерованные в произвольном порядке элементы множества $V(G)$ и f_i – ограничение функции f на пространство путей $X(G(i))$ графа $G(i)$, полученного из G удалением всех вершин v_j с $j < i$. Остается вспомнить, что согласно предложению 3.1 все функции $\varphi_{v_i v_i}^0(A_{f_i}, \cdot)$ рациональны (в случае, когда граф $G(i)$ несвязен, предложение 3.1 надо применить к его связной компоненте, содержащей вершину v_i ; если эта компонента пуста, отвечающая ей ζ -функция равна единице).

В § 10 мы приведем другое, более явное выражение для ζ_f в случае конечного графа G и функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ (см. теорему 10.1).

8.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что как формула (8.8), так и ее доказательство сохраняются и для некоторых бесконечных графов, а именно, для тех из них, где имеется конечное множество вершин V' , через которое проходят все циклы. При этом роль N в тождестве (8.8) должно играть число $\#V'$. Указанным свойством обладают, в частности, все лепестковые графы (см. определение 5.14).

Теорема 8.2 позволяет вернуться к вопросу о предельном поведении последовательности S -инвариантных мер $\mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)}$, дополнив следствие 7.5 и теорему 7.8 следующим утверждением.

8.5. СЛЕДСТВИЕ. Если $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и матрица A_f положительно-возвратна, то при всех $v \in V(G)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)} = \mu^f.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже было отмечено при доказательстве предложения 7.4, мера $\mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)}$ определена при всех достаточно больших n . Согласно (7.2) для любого борелевского множества $B \subset X(G)$

$$(8.9) \quad \begin{aligned} \mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)}(B) &= \frac{Q_{B \cap \widehat{C}(v)}(G, f, nd)}{Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd)} \\ &= \frac{Q_{B \cap \widehat{C}(v)}(G, f, nd) R^{nd}}{Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd) R^{nd}}, \end{aligned}$$

где $R = R(A_f)$. Найдем пределы числителя и знаменателя в правой части последней дроби. Начнем со знаменателя.

Из (8.1) видно, что $Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd)$ есть коэффициент при z^{nd} в разложении по степеням z функции $z\zeta'_{f, \widehat{C}(v)}(z)/\zeta_{f, \widehat{C}(v)}(z)$. В силу (8.2), (2.10)

$$\frac{z\zeta'_{f, \widehat{C}(v)}(z)}{\zeta_{f, \widehat{C}(v)}(z)} = z\varphi'(z)(1 + \psi(z)),$$

где $\varphi(z) = \varphi_{vv}^0(A_f, z)$, $\psi(z) = \varphi_{vv}(A_f, z)$. Поэтому

$$(8.10) \quad Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd) R^{nd} = d \sum_{k=1}^n k Q_{vv}^0(A_f, kd) R^{kd} Q_{vv}(A_f, (n-k)d) R^{(n-k)d},$$

где $Q_{vv}(A_f, 0)$ принимается равным нулю. Поскольку матрица A_f положительно-возвратна,

$$(8.11) \quad \sum_{k=1}^{\infty} k d Q_{vv}^0(A_f, kd) R^{kd} = R\varphi'(R) < \infty$$

(см. § 2). По той же причине и в силу леммы 7.7

$$(8.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{vv}(A_f, nd) R^{nd} = \frac{d}{R\varphi'(R)}.$$

Из (8.10)–(8.12) легко выводится, что

$$(8.13) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd) R^{nd} = d.$$

Теперь обратимся к числителю дроби в правой части (8.9). Пусть $B \subset X(G)$ – произвольный v -цилиндр с носителем $\{0, \dots, l\}$ (см. определение 5.5). Если $l = 0$, то $B = C(v)$ и

$$(8.14) \quad Q_{B \cap \widehat{C}(v)}(G, f, nd) = Q_{C(v)}(G, f, nd) = Q_{vv}(A_f, nd).$$

Если же $l > 0$, то $l = kd$, $k \in \mathbb{N}$, $B = C(\gamma)$, где $\gamma \in \Gamma_{vv}(G, l)$, и при $n > k$

$$(8.15) \quad Q_B(G, f, nd) = Q(A_f, \gamma)Q_{C(v)}(G, f, (n-k)d) = Q(A_f, \gamma)Q_{vv}(A_f, (n-k)d).$$

В силу (8.12), (8.14), (8.15)

$$(8.16) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{C(v) \cap \widehat{C}(v)}(G, f, nd)R^{nd} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{C(v)}(G, f, nd)R^{nd} = \frac{d}{R\varphi'(R)},$$

(8.17)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{C(\gamma) \cap \widehat{C}(v)}(G, f, nd)R^{nd} = \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{C(\gamma)}(G, f, nd)R^{nd} = \frac{Q(A_f, \gamma)R^l d}{R\varphi'(R)}.$$

Правые части (8.16), (8.17) равны соответственно $d\mu^f(C(v))$ и $d\mu^f(C(\gamma))$ (см. теорему 4.6 и предложение 4.7). Возвращаясь к (8.13), (8.9), получаем отсюда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)}(B) = \mu^f(B)$$

для любого v -цилиндра $B \subset X(G)$. Значит, для любой предельной точки ν последовательности мер $\mu_{nd}^{f, \widehat{C}(v)}$ и любого такого цилиндра выполняется равенство $\nu(B) = \mu^f(B)$. Ссылка на лемму 5.8 завершает доказательство.

8.6. СЛЕДСТВИЕ. Пусть $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и матрица A_f положительно-возвратна. Тогда:

1) если при некотором $v \in V(G)$ выполняется соотношение

$$(8.18) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{X(G^v)}(G^v, f^v)[R(A_f)]^n = 0,$$

то $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{nd}^f = \mu^f$;

2) если $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_{nd}^f = \mu^f$, то (8.18) имеет место при любом $v \in V(G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу теоремы 7.8 сходимость μ_{nd}^f к μ^f равносильна соотношению

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{X(G)}(G, f, nd)[R(A_f)]^{nd} = d,$$

которое заведомо будет выполняться, если в его левой части заменить $Q_{X(G)}(G, f, nd)$ на $Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd)$ при любом $v \in V(G)$ (см. (8.13)). Отсюда вытекают оба доказываемые утверждения, так как, очевидно, имеют место тождества

$$\begin{aligned} Q_{X(G)}(G, f, nd) &= Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd) + Q_{X(G) \setminus \widehat{C}(v)}(G, f, nd) \\ &= Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd) + Q_{X(G^v)}(G^v, f^v, nd), \quad v \in V(G). \end{aligned}$$

§ 9. Мероморфное продолжение дзета-функций и поведение дискретных инвариантных мер

Согласно следствию 8.3 в случае конечного графа G и произвольной функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ динамическая ζ -функция ζ_f рациональна. При переходе к бесконечным графам это свойство, вообще говоря, не сохраняется, и самое большее, на что можно рассчитывать в сколько-нибудь общем случае, – это наличие у ζ_f мероморфного продолжения в некоторый круг, содержащий круг сходимости ряда (8.1). Последнее свойство допускает уточнение.

9.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что функция $\zeta_{f,B}$, где $B \subset X(G)$, в частности, функция $\zeta_f(z)$ допускает *простейшее мероморфное продолжение* (ПМП), если она продолжается в некоторый круг $|z| < r$, где $r > R(A_f)$, как мероморфная функция, у которой нет нулей, а особенности исчерпываются простыми полюсами в точках $z_k = R(A_f) \exp(2\pi i k/d)$, $0 \leq k \leq d-1$, где $d = d(G)$.

Проще всего обстоит дело с мероморфным продолжением локальных ζ -функций $\zeta_{f,\widehat{C}(v)}$, $v \in V(G)$.

9.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть G – связный граф и $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$. Тогда:

- 1) если матрица A_f устойчиво-положительна, то при любом $v \in V(G)$ функция $\zeta_{f,\widehat{C}(v)}$ допускает простейшее мероморфное продолжение;
- 2) если $R(A_f) > 0$ и хотя бы при одном $v \in V(G)$ функция $\zeta_{f,\widehat{C}(v)}$ допускает простейшее мероморфное продолжение, то матрица A_f устойчиво-положительна.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) В силу (8.2) и (2.10) при любом $v \in V(G)$ справедливы тождества

$$\zeta_{f,\widehat{C}(v)}(z) = [1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)]^{-1} = 1 + \varphi_{vv}(A_f, z), \quad |z| < R(A_f),$$

первое из которых показывает, что $\zeta_{f,\widehat{C}(v)}(z)$ продолжается в круг $|z| < R_{vv}^0(A_f)$ как мероморфная функция, не имеющая нулей. Если матрица A_f устойчиво-положительна, то $R_{vv}^0(A_f) > R(A_f)$ (см. (2.12)) и согласно п. 1 предложения 3.5 найдется такое $r \in (R(A_f), R_{vv}^0(A_f))$, что функция $\varphi_{vv}(A_f, \cdot)$ продолжается до мероморфной в круге $|z| < r$ функции, особенности которой исчерпываются простыми полюсами в точках $z_k = R(A_f) \exp(2\pi i k/d(G))$, $k = 0, \dots, d(G) - 1$. Но в силу второго из приведенных тождеств $\zeta_{f,\widehat{C}(v)}$ имеет в круге $|z| < r$ те же особенности, что и $\varphi_{vv}(A_f, \cdot)$. Значит, она допускает ПМП.

2) Достаточно применить п. 2 предложения 3.5. Предложение доказано.

Изучение функции ζ_f начнем с простого вспомогательного утверждения.

9.3. ЛЕММА. Пусть функция φ регулярна в круге $|z| < r$, $0 < r < \infty$, и

$$(9.1) \quad z\varphi'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{nd} z^{nd}, \quad |z| < r,$$

где $d \in \mathbb{N}$. Тогда следующие два утверждения равносильны:

1) существуют такие $u \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$ и $q \in (0, 1)$, что

$$(9.2) \quad |b_{nd}r^{nd} - u| < cq^{nd}, \quad n \geq 1;$$

2) существуют число $r_1 > r$ и функция h , регулярная и не имеющая нулей в круге $|z| < r_1$, для которых выполняется тождество

$$(9.3) \quad e^{\varphi(z)} = (r^d - z^d)^{-u/d} h(z), \quad |z| < r,$$

где $(r^d - z^d)^{-u/d}$ понимается как та ветвь степенной функции, которая в нуле равна $1/r^u$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть

$$(9.4) \quad \varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \quad |z| < r.$$

Из (9.1) видно, что $a_n = b_n/n$ при $n = kd$, $k \in \mathbb{N}$ и $a_n = 0$ при остальных $n \in \mathbb{N}$. Поэтому (9.2) можно переписать в виде

$$|a_{kd} - u/(kdr^{kd})| < cq^{kd}/(kdr^{kd}), \quad k \geq 1,$$

а (9.4) – в виде

$$(9.5) \quad \begin{aligned} \varphi(z) &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (u/(kd))(z/r)^{kd} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kd} z^{kd} \\ &= a_0 - (u/d) \ln[1 - (z/r)^d] + \sum_{k=1}^{\infty} c_{kd} z^{kd} \\ &= a_0 - (u/d) \ln[1 - (z/r)^d] + g(z), \quad |z| < r, \end{aligned}$$

где $|c_{kd}| < (c/kd)(q/r)^{kd}$, $k \geq 1$. Следовательно, функция g регулярна в круге $|z| < r_1$ при некотором $r_1 > r$, и мы приходим к (9.3).

Обратно, пользуясь неравенствами Коши для коэффициентов степенного ряда, нетрудно вывести (9.2) из представления (9.5), которое, в свою очередь, получается из (9.3). Лемма доказана.

Связь между существованием ПМП функции ζ_f и поведением последовательности дискретных инвариантных мер μ_n^f (см. § 7) видна из следующего утверждения.

9.4. ТЕОРЕМА. Если для функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ матрица A_f положительно-возвратна и функция ζ_f допускает простейшее мероморфное продолжение, то последовательность мер μ_n^f сходится к равновесной мере μ^f .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положив $\varphi(z) = \psi_f(z)$, $r = R(A_f)$, $b_{nd} = Q_{X(G)}(G, f, nd)$ и воспользовавшись определениями 8.1, 9.1 и определением функции ζ_f (см. (8.1)), легко убедиться в справедливости равенства (9.3) с $u = d$. Согласно лемме 9.3 отсюда следует (9.2) и остается применить следствие 7.9. Теорема доказана.

Сформулируем теперь критерий существования ПМП функции ζ_f .

9.5. ТЕОРЕМА. Пусть G – связный ориентированный граф и $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$. Тогда:

1) если при некоторых $v \in V(G)$ и $t > 0$ выполняется неравенство

$$(9.6) \quad r(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}) > r(G, f),$$

то функция ζ_f допускает простейшее мероморфное продолжение;

2) если ζ_f допускает простейшее мероморфное продолжение и при некоторых $w \in V(G)$, $s > 0$ то же самое верно для функции $\zeta_{f-s\mathbf{1}_{C(w)}}$, то для всех $v \in V(G)$, $t > 0$ выполняется (9.6).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Очевидно, при любых $v \in V(G)$ и $t > 0$

$$(9.7) \quad \varphi_{vv}^0(A_{f-t\mathbf{1}_{C(v)}}, z) = e^{-t} \varphi_{vv}^0(A_f, z), \quad |z| < R_{vv}^0(A_f).$$

Поэтому формула (8.3) для функции $f - t\mathbf{1}_{C(v)}$ принимает вид

$$(9.8) \quad \zeta_{f-t\mathbf{1}_{C(v)}}(z) = [1 - e^{-t} \varphi_{vv}^0(A_f, z)]^{-1} \zeta_{f^v}(z).$$

Оба сомножителя в ее правой части разлагаются в степенные ряды, коэффициенты которых неотрицательны, а радиусы сходимости соответственно равны $R(A_{f-t\mathbf{1}_{C(v)}})$ и $r(G^v, f^v)$ (где G^v – граф, впервые введенный в доказательстве теоремы 7.10). Отсюда следует, что

$$(9.9) \quad r(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}) = \min\{R(A_{f-t\mathbf{1}_{C(v)}}), r(G^v, f^v)\} \quad \text{при } t \geq 0.$$

Пусть теперь для некоторых $v = v_0 \in V(G)$ и $t = t_0 > 0$ выполняется неравенство (9.6). Тогда, используя (9.9) при этих v и t , а затем при $v = v_0$, $t = 0$, получаем

$$(9.10) \quad r(G, f) = R(A_f) < r(G^v, f^v).$$

Кроме того, можно утверждать, что матрица A_f устойчиво-положительна, так как в противном случае при всех v и t выполнялись бы равенства $R(A_{f-t\mathbf{1}_{C(v)}}) = R(A_f)$ (см. (9.7) и п. 2 леммы 2.6) и $r(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}) = r(G, f)$ (см. (9.9)), что по условию невозможно. Следовательно, $R_{vv}^0(A_f) > R(A_f)$ и к функции $\varphi(\cdot) = \varphi_{vv}^0(A_f, \cdot)$ можно применить лемму 3.4, в силу которой функция $[1 - \varphi_{vv}^0(A_f, \cdot)]^{-1}$ допускает ПМП в некоторый круг $|z| < r$, где $R(A_f) < r < R_{vv}^0(A_f)$, причем функция $\zeta_{f^v}(\cdot)$ регулярна и не обращается в нуль (очевидно, всегда можно считать, что $r \leq r(G^v, f^v)$). Отсюда следует доказываемое утверждение.

2) Вначале покажем, что матрица A_f устойчиво-положительна. Из условия вытекает, что $r(G, f) = R(A_f)$, так как в противном случае $r(G, f) < R(A_f)$ (см. (9.9)) и функция ζ_f имела бы особенности в круге $|z| < R(A_f)$, что невозможно при наличии ПМП. Точно так же доказывается, что $r(G, f - s\mathbf{1}_{C(w)}) = R(A_{f-s\mathbf{1}_{C(w)}})$. Кроме того, $R(A_{f-s\mathbf{1}_{C(w)}}) \geq R(A_f)$ (так как $f - s\mathbf{1}_{C(w)} \leq f$ при $s \geq 0$). Поэтому из (9.8) и (8.3) получаем

$$(9.11) \quad \frac{\zeta_f(z)}{\zeta_{f-s\mathbf{1}_{C(w)}}(z)} = \frac{1 - e^{-s} \varphi_{ww}^0(A_f, z)}{1 - \varphi_{ww}^0(A_f, z)}, \quad |z| < R(A_f).$$

Обозначим левую часть (9.11) через $g(z)$. Наличие ПМП у ζ_f и $\zeta_{f-s1_{C(w)}}$ приводит к тому, что функция g аналитична в круге $|z| < R(A_f)$ и допускает мероморфное продолжение в круг $|z| < r$ при некотором $r > R(A_f)$. Так как функция $\varphi_{ww}^0(A_f, \cdot)$, а вслед за ней и $\varphi_{ww}(A_f, \cdot)$ рационально выражаются через g , обе эти функции допускают мероморфное продолжение в круг $|z| < r$ (см. (9.11) и (2.10)). Но в силу п. 2 предложения 3.5 это влечет за собой устойчивую положительность матрицы A_f .

Вследствие только что доказанного при всех $v \in V(G)$ выполняется неравенство $R(A_f) < R_{vv}^0(A_f)$. Применив к функции $\varphi_{ww}^0(A_f, \cdot)$ лемму 3.4 и предположение о наличии ПМП у функции ζ_f , можно утверждать, что при некотором $r_v > R(A_f)$ функция ζ_{f^v} при некотором $r_v > R(A_f)$ допускает не имеющее нулей аналитическое продолжение в круг $|z| < r_v$. В сопоставлении с установленным выше равенством $r(G, f) = R(A_f)$ это означает, что $r(G^v, f^v) > r(G, f)$. Еще раз воспользовавшись устойчивой положительностью A_f и равенством (9.8), отсюда уже легко вывести, что $r(G, f - t1_{C(v)}) > r(G, f)$ при всех $t \geq 0$. Теорема доказана.

9.6. ЗАМЕЧАНИЕ. Легко видеть, что если для данных $f = f_1$ и $t = t_1$ выполняется неравенство (9.6), то при достаточно малом $\varepsilon > 0$ оно будет выполняться для того же v и всех $t > 0$, $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, удовлетворяющих условию $|t - t_1| < \varepsilon$, $\|f - f_1\| < \varepsilon$, где $\|\cdot\|$ – норма в $C(X(G))$. В таком случае согласно п. 1 теоремы 9.5 функция ζ_f при всех упомянутых f будет обладать ПМП.

В связи с теоремой 9.5 естественно возникают два связанных друг с другом вопроса: 1) можно ли обратить утверждение из п. 1 этой теоремы? 2) можно ли доказать, что устойчивая положительность матрицы A_f (вытекающая, как мы убедились, из условий обоих пунктов теоремы) в действительности эквивалентна существованию ПМП у функции ζ_f ? Сейчас мы увидим, что ответы на оба эти вопроса – отрицательные, а заодно выясним, каким реально может быть предел последовательности дискретных инвариантных мер μ_n^f в случае, когда матрица A_f устойчиво-положительна (см. теорему 7.8).

Начнем с одной общей конструкции. Пусть при $n = 1, 2, \dots$ задан конечный граф G_n с множеством вершин V_n , причем все V_n имеют общую точку v и $V_i \cap V_j = \{v\}$ при любых $i \neq j$. Объединение всех G_n будем называть *обобщенным лепестковым графом* с центральной вершиной v и обобщенными лепестками $G_1, G_2, \dots$. Для этого графа введем обозначение $(\{G_n\}, v)$. В частном случае, когда все G_n – простые циклы, мы получим обычный лепестковый граф (см. определение 5.14).

9.7. ПРИМЕР. Рассмотрим обобщенный лепестковый граф $(\{G_n\}, v)$, в котором каждый обобщенный лепесток G_n – это обычный лепестковый граф с центральной вершиной $v_n \neq v$, состоящий из двух лепестков; предположим, что их длины равны соответственно l_n и $2l_n$, причем v принадлежит второму из этих лепестков и служит его серединой, т.е. имеет номер l_n при естественной нумерации вершин вдоль лепестка. Очевидно, в этом случае граф $(\{G_n\}, v)$ однозначно определяется последовательностью $\{l_n\}$, а поскольку нумерация обобщенных лепестков G_n никакой роли не играет, для задания $(\{G_n\}, v)$ достаточно указать числа

$$h(k) = \#\{n : l_n = k\}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Зафиксировав произвольное $\beta > 0$ и произвольные целые $m, r > 1$, положим

$$(9.12) \quad h(k) = \begin{cases} 0, & 1 \leq k \leq r-1, \\ \lfloor \beta m^k / k \rfloor, & k \geq r, \end{cases}$$

(здесь $[\cdot]$ – целая часть числа) и полученный таким образом граф обозначим через $G_{\beta, m, r}$. В качестве f возьмем функцию f_0 , тождественно равную нулю на $X(G_{\beta, m, r})$. Соответствующая ей матрица Больцмана есть, очевидно, матрица смежности графа $G_{\beta, m, r}$. Обозначим ее через $A_{\beta, m, r}$. Легко проверить, что

$$(9.13) \quad \varphi_{vv}^0(A_{\beta, m, r}, z) = \sum_{k=1}^{\infty} h(k) \frac{z^{2k}}{1-z^k} = \sum_{k=r}^{\infty} \left[\frac{\beta m^k}{k} \right] \frac{z^{2k}}{1-z^k},$$

$$(9.14) \quad R_{vv}^0(A_{\beta, m, r}) = m^{-1/2}.$$

Пользуясь тем, что в точке $z = 1/m$ ряд (9.13) сходится, подберем (при фиксированных β, m) значение параметра r так, чтобы разность $\Delta = 1 - \varphi_{vv}^0(A_{\beta, m, r}, 1/m)$ была положительна. Разложив Δ по степеням $1/m$:

$$(9.15) \quad \Delta = \sum_{n=1}^{\infty} p_n m^{-n}, \quad p_n \in \mathbb{Z}^+, \quad 0 \leq p_n < m,$$

построим лепестковый граф с центральной вершиной v (той же, что и у $G_{\beta, m, r}$), в котором число лепестков длины 2 равно $mp_1 + p_2$ (напомним, что по определению в лепестковом графе нет лепестков длины 1), число лепестков длины $n > 2$ равно p_n и нет общих с $G_{\beta, m, r}$ вершин, отличных от v . Объединение построенного графа с $G_{\beta, m, r}$ обозначим через G . Очевидно, G будет по-прежнему обобщенным лепестковым графом с центральной вершиной v . Пусть A – его матрица смежности (матрица Больцмана функции $f_0 \equiv 0$) и $\zeta_A = \zeta_{f_0}$ (здесь мы несколько отступаем от принятых ранее обозначений; поскольку и в дальнейшем, до конца этого параграфа, будут встречаться лишь функции f , тождественно равные нулю, мы будем всюду заменять f и пару (f, G) соответствующей матрицей смежности).

Из построения (см. также (9.12)) непосредственно вытекает, что

$$(9.16) \quad \begin{aligned} \varphi_{vv}^0(A, z) &= \sum_{k=r}^{\infty} \left[\frac{\beta m^k}{k} \right] \frac{z^{2k}}{1-z^k} + \sum_{k=1}^{\infty} p_k z^k, \\ R_{vv}^0(A) &= \frac{1}{\sqrt{m}}, \quad R(A) = \frac{1}{m}, \quad d(G) = 1, \end{aligned}$$

откуда, в частности, видно, что матрица A устойчиво-положительна.

Вычислим $\zeta_A(z)$. Пусть, аналогично предыдущему, A^v – матрица смежности графа G^v , полученного из G в результате удаления вершины v и всех связанных с ней ребер. Используя обозначения $[c]$ и $\{c\}$ соответственно для целой и дробной частей числа

$c \in \mathbb{R}$, получаем

$$\begin{aligned}
 (9.17) \quad \psi(A^v, z) &= \sum_{k=r}^{\infty} \left[\frac{\beta m^k}{k} \right] \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{n} \\
 &= \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\beta m^k}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{n} - \sum_{k=r}^{\infty} \left\{ \frac{\beta m^k}{k} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{n} \\
 &= \beta \sum_{k=r}^{\infty} \frac{m^k}{k} z^k + \beta \sum_{k=r}^{\infty} \frac{m^k}{k} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^{nk}}{n} - \sum_{k=r}^{\infty} \left\{ \frac{\beta m^k}{k} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{n} \\
 &= -\beta \ln(1 - mz) - \beta \sum_{k=1}^{r-1} \frac{m^k}{k} z^k \\
 &\quad + \beta \sum_{k=r}^{\infty} \frac{m^k}{k} z^{2k} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{nk}}{n+2} - \sum_{k=r}^{\infty} \left\{ \frac{\beta m^k}{k} \right\} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{nk}}{n}.
 \end{aligned}$$

Нетрудно проверить, что последние три из четырех слагаемых в правой части (9.17) представляют собой аналитические функции в круге $|z| < m^{-1/2}$. Поэтому (см. (9.16), (8.3) и лемму 3.4)

$$(9.18) \quad \zeta_A(z) = (1 - mz)^{-1-\beta} u(z),$$

где функция u регулярна и не обращается в нуль в круге $|z| < m^{-1/2}$. Таким образом, в этом примере функция ζ_A , несмотря на устойчивую положительность матрицы A , может иметь в точке $R(A) = 1/m$ как полюс произвольного порядка > 1 (при натуральном β), так и изолированную особенность многозначного характера. Очевидно, такая функция не допускает ПМП.

Из (9.18) с помощью леммы 9.3 (см. также доказательство теоремы 9.4) получаем

$$(9.19) \quad |Q(A, n)m^{-n} - 1 - \beta| < cq^n, \quad n \geq 1,$$

где $c > 0$, $q \in (0, 1)$. Согласно теореме 7.8 это означает, что последовательность мер μ_n^A сходится к мере $\alpha\mu^A + (1 - \alpha)\delta_\infty$, где $\alpha = (1 + \beta)^{-1}$ можно сделать произвольным числом из $(0, 1)$, выбрав подходящее β .

Несложное видоизменение описанной только что конструкции, а именно, замена в (9.12) $[\beta m^k/k]$ на m^k , приводит к устойчиво-положительной матрице A_1 , для которой $d(A_1) = 1$, $R(A_1) = 1/m$ и

$$\psi_{A_1}(z) = (1 - mz)^{-1} + \eta(z), \quad |z| < m^{-1/2},$$

где функция η регулярна в круге $|z| < m^{-1/2}$. С помощью леммы 3.4 и теоремы 8.2 можно убедиться, что функция ζ_{A_1} имеет в точке $1/m$ существенную особенность и что

$$z\psi'_{A_1}(z) = mz(1 - mz)^{-2} + mz(1 - mz)^{-1} + \eta_1(z),$$

где функция η_1 регулярна в круге $|z| < r$ при некотором $r > 1/m$. Это позволяет, рассуждая аналогично предыдущему, прийти к равенству

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q(A_1, n)m^{-n} = \infty,$$

из которого согласно теореме 7.8 следует, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_n^{A_1} = \delta_\infty$. Таким образом, в классе устойчиво-положительных матриц A_f последовательность мер μ_n^f может сходиться к любой из мер вида $\alpha \mu^f + (1 - \alpha) \delta_\infty$, где $\alpha \in [0, 1]$.

Теперь приведем пример, показывающий, что функция ζ_f может иметь простейшее мероморфное продолжение и в том случае, когда матрица A_f не является положительно-возвратной и тем более – устойчиво-положительной.

9.8. ПРИМЕР. Пусть A_2 – матрица смежности ориентированного графа G_2 с множеством вершин $V_2 = \mathbb{Z}^+$ и множеством ребер

$$E_2 = \{(0, 1), (i, i - 1), (i, i + 1), i = 1, 2, \dots\}$$

(очевидно, G_2 описывает простейшее случайное блуждание на $\mathbb{Z}^+$ с отражением в нуле). Пользуясь тождеством (2.10), легко получить соотношение

$$\varphi_{00}^0(A_2, z) = z^2(1 + \varphi_{00}(A_2, z)) = \frac{z^2}{1 - \varphi_{00}^0(A_2, z)},$$

вследствие которого,

$$\varphi_{00}^0(A_2, z) = \frac{1}{2}(1 - (1 - 4z^2)^{1/2})$$

(выбор знака перед корнем определяется условием $\varphi_{00}^0(A_2, 0) = 0$).

Рассмотрим лепестковый граф G_3 с центральной вершиной w , в котором число лепестков длины n равно $2Q_{00}^0(A_2, n)$, $n = 1, 2, \dots$ (напомним, что $Q_{00}^0(A_2, n)$ – коэффициент при z^n в разложении $\varphi_{00}^0(A_2, z)$ по степеням z). Пусть A_3 – матрица смежности этого графа. Из построения видно, что $d(G_3) = 2$ и

$$(9.20) \quad \varphi_{ww}^0(A_3, z) = 1 - (1 - 4z^2)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$(9.21) \quad R(A_3) = 1/2, \quad \varphi_{ww}^0(A_3, R(A_3)) = 1, \quad \frac{d}{dz} \varphi_{ww}^0(A_3, z)|_{z=R(A_3)} = \infty,$$

и в силу (9.20), (8.3)

$$(9.22) \quad \zeta_{A_3}(z) = (1 - \varphi_{ww}^0(A_3, z))^{-1} = (1 - 4z^2)^{-1/2}.$$

Пусть A_4 – матрица смежности тензорного произведения $G_4 = G \otimes G_3$ (напомним, что тензорное произведение $G' \otimes G''$ графов G' и G'' определяется как граф с множеством вершин $V(G') \times V(G'')$, ребрами которого служат пары $((v'_1, v''_1), (v'_2, v''_2))$, где $(v'_1, v'_2) \in E(G')$, $(v''_1, v''_2) \in E(G'')$, и что матрица смежности тензорного произведения графов равна тензорному произведению матриц смежности сомножителей, см. [51]). Легко проверить, что граф G_4 связан, $d(G_4) = 2$ и

$$(9.23) \quad Q_{(v,w)(v,w)}(A_4, n) = Q_{vv}(A, n)Q_{ww}(A_3, n), \quad n \geq 1.$$

Поскольку матрица A устойчиво-положительна и $d(G) = 1$, $R(A) = 1/m$ (см. пример 9.7), из теоремы 2.7 и леммы 7.7 вытекает, что последовательность

$\{Q_{vv}(A, n)m^{-n}, n = 1, 2, \dots\}$ имеет положительный предел. Тогда (см. (9.23), а затем (9.15) и (9.21))

$$\begin{aligned} (9.24) \quad \frac{1}{R(A_4)} &= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Q_{(v,w)(v,w)}(A_4, n))^{1/n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (Q_{vv}(A, n))^{1/n} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (Q_{ww}(A_3, n))^{1/n} \\ &= \frac{1}{R(A)R(A_3)} = 2m, \end{aligned}$$

т.е. $R(A_4) = 1/(2m)$. Еще раз используя лемму 7.7 (вместе с (9.21)), получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{(v,w)(v,w)}(A_4, n)(2m)^{-n} = 0,$$

откуда следует, что матрица A_4 не является положительно-возвратной.

Исследуем функцию ζ_{A_4} . Для этого прежде всего заметим, что в силу (9.22)

$$z \frac{\zeta'_{A_3}(z)}{\zeta_{A_3}(z)} = z \psi'_{A_3}(z) = \frac{4z^2}{1-4z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} 4^n z^{2n},$$

т.е. (см. (8.1))

$$(9.25) \quad Q(A_3, 2n) = 4^n, \quad Q(A_3, 2n+1) = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Очевидно, для коэффициентов $Q(A_4, 2n)$ справедливо тождество, аналогичное (9.23), а именно:

$$Q(A_4, 2n) = Q(A, 2n)Q(A_3, 2n), \quad n = 1, 2, \dots$$

Вместе с (9.19) и (9.25) оно дает:

$$|Q(A_4, 2n)(2m)^{-2n} - (1 + \beta)| < cq^n, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $c > 0$, $q \in (0, 1)$. Положим теперь $\beta = 1$. Так как по доказанному $d(G_4) = 2$, $R(A_4) = 1/(2m)$, можно применить лемму 9.3, в силу которой функция ζ_{A_4} допускает ПМП за пределы круга $|z| < 1/(2m)$ (это продолжение имеет простые полюса в точках $1/(2m)$ и $-1/(2m)$).

§ 10. Дзета-функция и спектральные свойства неотрицательных матриц

Основные результаты этого параграфа были опубликованы без доказательства в [49].

В § 8 мы упомянули явную формулу для рациональной функции, которая служит продолжением на всю комплексную плоскость функции ζ_f в случае, когда граф G конечен и $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$. Она имеет следующий вид.

10.1. ТЕОРЕМА [40]. *В указанных условиях*

$$(10.1) \quad \zeta_f(z) = [\det(I - zA_f)]^{-1}, \quad |z| < r(G, f),$$

где I – единичная матрица того же порядка, что и A_f .

Сравнивая формулы (10.1) и (8.3), нетрудно заметить, что если конечный граф G связен, то множество собственных чисел матрицы A_f , лежащих на окружности $|z| = \lambda(A_f) = 1/R(A_f)$ (см. замечание 2.3), совпадает с множеством нулей каждой из функций $z \mapsto 1 - \varphi_{vv}^0(A_f, 1/z)$, $v \in V(G)$, лежащих на той же окружности. Структура первого из этих множеств хорошо известна (см., например, [18]): оно состоит из точек $z_k = R(A_f) \exp(2\pi i k/d(G))$, $k = 0, \dots, d(G) - 1$, и все эти собственные числа – простые. Лемма 3.4 показывает, что точно так же выглядит множество нулей функции $z \mapsto 1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)$ в случае любой (не обязательно конечной) неразложимой неотрицательной матрицы A_f .

Следующее утверждение вытекает из теорем 8.2 и 10.1.

10.2. СЛЕДСТВИЕ. *Если G – конечный связный граф и $f \in \mathcal{F}_0^1(X(G))$, то для любой вершины $v \in V(G)$ множество собственных чисел матрицы A_f , лежащих в области $|z| > 1/R_{vv}^0(A_f)$, переводится в множество нулей функции $1 - \varphi_{vv}^0(A_f, \cdot)$ преобразованием $z \rightarrow 1/z$, причем кратности соответствующих друг другу собственных чисел и нулей совпадают.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из (10.1) видно, что множество ненулевых собственных чисел матрицы A_f совпадает с множеством полюсов функции $z \mapsto \zeta_f(1/z)$ и кратность каждого собственного числа равна порядку отвечающего ему полюса. Поэтому с учетом теоремы 8.2 и отсутствия нулей у функции ζ_{f^v} в круге $|z| < r(G^v, f^v)$ достаточно доказать, что

$$(10.2) \quad r(G^v, f^v) \geq R_{vv}^0(A_f).$$

Так как граф G^v (как и G) конечен, из сравнения формул (2.1), (2.3) и (8.1) получаем равенство $r(G^v, f^v) = \min_{A'} R(A')$, где минимум берется по всем неразложимым подматрицам матрицы A^v . Если таких подматриц нет, то $\lambda(A_{f^v}) = 0$ и (10.2), очевидно, выполняется. Предположив, что неразложимые подматрицы $A' \subset A_{f^v}$ существуют, зафиксируем любую из них. Пусть γ^- – кратчайший G -путь, ведущий из v в множество вершин $V(G')$ графа G' , отвечающего подматрице A' , и $v' \in V(G')$ – конец этого пути. Пусть, далее, γ^+ – кратчайший G -путь, ведущий из v' в v . Поставив в соответствие каждому пути $\gamma' \in \Gamma_{v'v'}(G')$ путь $\pi(\gamma') = \gamma^- \gamma' \gamma^+$, мы получим, как легко понять, обратимое отображение $\pi: \Gamma_{v'v'}(G') \rightarrow \Gamma_{vv}^0(G)$, удовлетворяющее условиям

$$l(\pi(\gamma')) = l(\gamma') + l(\gamma^-) + l(\gamma^+), \quad Q(A_f, l(\pi(\gamma'))) = Q(A_f, \gamma^-)Q(A', \gamma')Q(A_f, \gamma^+).$$

Отсюда следует, что

$$Q_{v'v'}(A', n) \leq \frac{Q_{vv}^0(A, n + l(\gamma^-) + l(\gamma^+))}{Q(A_f, \gamma^-)Q(A_f, \gamma^+)},$$

а потому

$$R_{vv}^0(A_f) \leq R(A')$$

и, значит, $r(G^v, f^v) \geq R_{vv}^0(A_f)$, т.е. (10.2) выполняется и в этом случае. Следствие доказано.

Напомним, что в §3 устойчиво-положительные матрицы были охарактеризованы в терминах максимальных собственных чисел их подматриц. При этом для любой бесконечной неотрицательной матрицы A мы определили величину $\lambda(A)$ как точную верхнюю грань максимальных собственных чисел $\lambda(A')$ конечных подматриц $A' \subset A$. Следующая теорема показывает, что в этом случае в спектре матрицы A' между собственными числами, лежащими на окружности $|z| = \lambda(A')$ (заметим, что множество таких собственных чисел не обязательно сводится к одному $\lambda(A')$), и остальным спектром имеется зазор, величина которого отделена от нуля равномерно по тем $A' \subset A$, для которых $\lambda(A')$ близко к $\lambda(A)$.

10.3. ТЕОРЕМА (о щели в спектре). *Для всякой неразложимой устойчиво-положительной бесконечной матрицы A найдется такое $\delta > 0$, что все собственные числа λ любой конечной подматрицы $A' \subset A$, удовлетворяющие условию $|\lambda| < |\lambda(A')|$, лежат в круге $|z| < \lambda(A) - \delta$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что утверждение теоремы достаточно доказать для неразложимых подматриц матрицы A , так как спектр всякой матрицы есть объединение спектров ее неразложимых компонент.

Зафиксируем произвольную вершину v графа $G = G_A$. По определению $R_{vv}^0(A)$ функция $\varphi_{vv}^0(A, \cdot)$ аналитична в круге $|z| < R_{vv}^0(A)$, причем устойчивая положительность матрицы A влечет за собой неравенство $R_{vv}^0(A) > R(A)$. По той же причине $\varphi_{vv}^0(A, R(A)) = 1$ (см. п. 2 леммы 2.6), а так как коэффициенты $Q_{vv}^0(A, n)$ неотрицательны, функция $1 - \varphi_{vv}^0(A, \cdot)$ не обращается в нуль в круге $|z| < R(A)$. Поэтому найдется такое $r \in (R(A), R_{vv}^0(A))$, что множество нулей этой функции в круге $|z| \leq r$ исчерпывается нулями, лежащими на окружности $|z| = R(A)$. Отсюда, в частности, следует, что число

$$(10.3) \quad \varepsilon = \min_{|z|=r} |1 - \varphi_{vv}^0(A, z)|$$

положительно.

Воспользуемся теперь представлением

$$(10.4) \quad \varphi_{vv}^0(A, z) = \sum_{\gamma \in \Gamma_{vv}^0(G)} Q(A, \gamma) z^{l(\gamma)}, \quad |z| < R_{vv}^0(A)$$

(см. (2.7)), чтобы найти конечный набор путей $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_k\} \subset \Gamma_{vv}^0(G)$, для которого

$$(10.5) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma_{vv}^0(G) \setminus \Gamma} Q(A, \gamma) r^{l(\gamma)} < \varepsilon.$$

Пусть $\mathcal{A}$ – множество всех неразложимых конечных подматриц $A' \subset A$ и $\mathcal{A}'$ состоит из тех $A' \in \mathcal{A}$, для которых все $\gamma \in \Gamma$ являются G' -путями, где $G' = G_{A'}$. Если $A' \in \mathcal{A}'$, то $\Gamma_{vv}^0(G') \setminus \Gamma \subset \Gamma_{vv}^0(G) \setminus \Gamma$ и вследствие (10.5)

$$(10.6) \quad \max_{|z|=r} |(1 - \varphi_{vv}^0(A', z)) - (1 - \varphi_{vv}^0(A, z))| < \varepsilon.$$

Поскольку функция $1 - \varphi_{vv}^0(A', \cdot)$ аналитична в круге $|z| < R_{vv}^0(A')$ и $R_{vv}^0(A') \geq R_{vv}^0(A')$, по теореме Руше из (10.3), (10.6) следует, что функции $1 - \varphi_{vv}^0(A, \cdot)$ и $1 - \varphi_{vv}^0(A', \cdot)$ имеют в круге $|z| < r$ одинаковое число нулей. В силу леммы 3.4 и выбора r множество нулей первой из них исчерпывается $d(G)$ нулями первого порядка, лежащими на окружности $|z| = R(A)$. По той же лемме вторая функция имеет $d(G')$ простых нулей, лежащих на окружности $|z| = R(A')$, и не имеет нулей в круге $|z| < R(A')$. Так как, очевидно, $d(G') \geq d(G)$, отсюда следует, что $R(A') \leq r$, $d(G') = d(G)$ и все нули функции $1 - \varphi_{vv}^0(A', \cdot)$ в круге $|z| \leq r$ лежат на окружности $R(A')$. Согласно следствию 10.2 это значит, что если λ – собственное число матрицы A' , удовлетворяющее условию $1/r \leq |\lambda| < \lambda(A)$, то $|\lambda| = \lambda(A')$. Так как $\lambda(A') < \lambda(A)$, отсюда следует, что если $|\lambda| < \lambda(A')$, то $|\lambda| < 1/r = \lambda(A) - \delta_0$, где $\delta_0 > 0$.

Рассмотрим теперь множество $\mathcal{A}_j$, $j = 1, \dots, k$, состоящее из всех $A' \in \mathcal{A}$, для которых $v \in V(G')$, но путь $\gamma_j \in \Gamma$ не является G' -путем. При любом $z > 0$

$$\varphi_{vv}^0(A', z) \leq \varphi_{vv}^0(A, z) - Q(A, \gamma)z^{l(\gamma)}, \quad A' \in \mathcal{A}_j,$$

и в то же время

$$\varphi_{vv}^0(A, R(A)) = \varphi_{vv}^0(A', R(A')) = 1, \quad A' \in \mathcal{A}_j.$$

Поэтому существует такое $\delta_j > 0$, что при всех $A' \in \mathcal{A}_j$ выполняется неравенство $R(A') > R(A) + \delta_j$. Следовательно, при всех $A' \in \mathcal{A}_j$ функция $1 - \varphi_{vv}^0(A', \cdot)$ не имеет нулей в круге $|z| \leq R(A) + \delta_j$ и согласно следствию 10.2 все собственные числа матрицы A' лежат в круге

$$|z| < \lambda(A) - (\lambda(A))^2 \delta_j / (1 + \lambda(A) \delta_j).$$

Пусть, наконец, множество $\mathcal{A}_{k+1}$ состоит из тех $A' \in \mathcal{A}$, для которых $v \notin V(G')$. Если $A' \in \mathcal{A}_{k+1}$, то $A' \subset A^v$ (напомним, что A^v получается из A удалением строки и столбца с индексом v). В силу теоремы 3.15 и замечания 3.16 $\lambda(A^v) < \lambda(A) - \delta_{k+1}$, где $\delta_{k+1} > 0$. Следовательно, все собственные числа матриц $A' \in \mathcal{A}_{k+1}$ лежат в круге $|z| < \lambda(A) - \delta_{k+1}$.

Поскольку $\mathcal{A} = \bigcup_{j=0}^{k+1} \mathcal{A}_j$, доказанное можно подытожить следующим образом: все собственные числа λ любой матрицы $A' \in \mathcal{A}$, за исключением, быть может, тех, для которых $|\lambda| = \lambda(A')$, лежат в круге $|z| < \lambda(A) - \delta$, где

$$\delta = \min\{\delta_0, \delta_{k+1}, (\lambda(A))^2 \delta_j / (1 + \lambda(A) \delta_j), 1 \leq j \leq k\}.$$

Теорема доказана.

В некоторых случаях теорему о щели в спектре можно доказать и для бесконечной матрицы, рассматривая ее как линейный оператор в соответствующем пространстве последовательностей. Мы ограничимся случаем, когда A – бесконечная симметрическая матрица. Легко видеть, что если $\lambda(A) < \infty$, то A порождает ограниченный линейный оператор в пространстве $l^2(\mathbb{N})$, состоящем из функций $\xi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию $\sum_{n \in \mathbb{N}} \xi^2(n) < \infty$; для этого оператора также будем употреблять обозначение A .

10.4. ТЕОРЕМА. Если бесконечная симметрическая матрица A с $\lambda(A) < \infty$ устойчиво-положительна, то в интервале $(\lambda(A) - \delta, \lambda(A))$, где δ – константа из теоремы 10.3, нет точек спектра оператора A .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{G^{(n)}\}$ – исчерпывающая последовательность конечных главных подграфов графа $G = G_A$ (см. определение 3.9). Заменив в матрице A все элементы a_{ij} , для которых $(i, j) \notin E(G^{(n)})$, нулями, мы получим последовательность бесконечных матриц $A^{(n)}$. Отвечающие им операторы (которые мы отождествляем с $A^{(n)}$), как легко понять, сходятся в сильной операторной топологии к A . Тогда всякий интервал, имеющий непустое пересечение со спектром A , должен обладать аналогичным свойством и по отношению к спектру $A^{(n)}$ при достаточно большом n (см., например, [49, гл. 10, § 7]). Но спектр оператора $A^{(n)}$ вне точки $z = 0$ есть не что иное, как множество ненулевых собственных чисел конечной матрицы, полученной из $A^{(n)}$ удалением всех нулевых строк и столбцов. Поэтому ссылка на теорему 10.3 завершает доказательство.

Глава 4.

Некоторые специальные классы СЦМ

Предыдущие главы содержали ряд теорем, условия которых довольно трудно проверить в случае СЦМ, отвечающей произвольному графу G . Цель данной главы – указать классы графов, для которых эта задача существенно облегчается.

§ 11. СЦМ с регулярным множеством периодических орбит

11.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что множество $\text{Per}(G)$ периодических точек СЦМ $(X(G), S)$ регулярно относительно семейства $\mathcal{F}$, состоящего из функций $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$, если $r(G, f) = R(G, f, v)$ для всех $f \in \mathcal{F}$ и $v \in V(G)$.

Если для G , $\mathcal{F}$ выполняются условия, сформулированные в определении 11.1, и $f \in \mathcal{F}$, то вместо $R(G, f, v)$, $v \in V(G)$, можно писать $R(G, f)$, что мы в дальнейшем и будем делать, не оговаривая этого каждый раз специально.

Как и в предыдущих главах, будем употреблять обозначение $\mathcal{F}_0^m(G)$ для множества функций $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$, постоянных на цилиндрах с носителем $[0, m]$, $m \in \mathbb{Z}^+$ (см. определение 1.10). Все функции из $\mathcal{F}_0^m(G)$, очевидно, непрерывны. Множество непрерывных функций f , постоянных на “цилиндрах с носителем $[0, \infty)$ ”, т.е. таких, что $f(x) = f(x')$, если $x, x' \in X(G)$ и $x_i = x'_i$ при $i \geq 0$, обозначим через $\mathcal{F}_0^\infty(G)$. Потребовав дополнительно, чтобы все рассматриваемые функции были ограничены сверху, получим соответственно множества $\mathcal{B}\mathcal{F}_0^m(G)$ и $\mathcal{B}\mathcal{F}_0^\infty(G)$.

Пусть, далее, Reg_0^m (соответственно $\mathcal{B}\text{Reg}_0^m$), $m \in \mathbb{Z}^+ \cup \{\infty\}$, – совокупность графов G , для которых множество $\text{Per}(G)$ регулярно относительно $\mathcal{F}_0^m(G)$ (соответственно $\mathcal{B}\mathcal{F}_0^m(G)$).

Введение понятия регулярности оправдывается следующим утверждением.

11.2. ТЕОРЕМА. Если (а) $G \in \text{Reg}_0^1$ (соответственно $G \in \mathcal{B}\text{Reg}_0^1$) и $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ (соответственно $f \in \mathcal{B}\mathcal{F}_0^1(G)$), то функция $1/\zeta_f$ аналитически продолжается в круг $|z| < R^*(A_f)$, где $R^*(A_f) = \sup_{v \in V(G)} R_{vv}^0(A_f)$ (см. (3.2)); если, кроме того, (б) матрица A_f устойчиво-положительна, то эта функция имеет в точках

$$z_k = R(A_f) \exp(2\pi i k / d(G)), \quad k = 0, \dots, d(G) - 1,$$

нули первого порядка.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ (соответственно $f \in \mathcal{BF}_0^1(G)$). Тогда это верно и для $f - t\mathbf{1}_{C(v)}$ при любых $v \in V(G)$ и $t \in \mathbb{R}$. Значит, по условию регулярности мы имеем

$$r(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}) = R(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}), \quad v \in V(G), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Очевидно также, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}) \leq r(G^v, f)$$

и, следовательно,

$$(11.1) \quad r(G^v, f) \geq \lim_{t \rightarrow \infty} R(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}).$$

В силу предложения 3.2 найдется такое $v = v^* \in V(G)$, что $R^*(A_f) = R_{v^*v^*}^0(A_f)$. С помощью соотношения (9.7) и леммы 2.6 легко понять, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} R(G, f - t\mathbf{1}_{C(v^*)}) = R_{v^*v^*}^0(A_f) = R^*(A_f).$$

Используя (11.1), получаем отсюда неравенство

$$r(G^{v^*}, f) \geq R^*(A_f),$$

из которого видно, что функция $1/\zeta_{f,v^*}$ аналитична в круге $|z| < R^*(A_f)$. По определению в этом круге аналитична и функция $1 - \varphi_{v^*v^*}^0(A_f, \cdot)$. Вследствие (8.3) отсюда вытекает первое утверждение теоремы. Что же касается второго, то оно моментально получается из леммы 3.4. Теорема доказана.

11.3. ЗАМЕЧАНИЕ. С помощью отображения m -редукции утверждение доказанной теоремы легко обобщить на функции из $\mathcal{F}_0^m(G)$ (соответственно из $\mathcal{BF}_0^m(G)$) при любом $m \in \mathbb{N}$.

11.4. СЛЕДСТВИЕ. Если выполнены условия (а) и (б) теоремы 11.2, то функция ζ_f допускает ПМП и $\mu_n^f \rightarrow \mu^f$ (см. теорему 9.4).

Теперь попытаемся сформулировать условия регулярности, которые были бы более наглядными, чем ее определение. Для всякого G -пути γ обозначим через $V(\gamma)$ множество вершин, составляющих этот путь. Пусть $\Gamma_n(G)$, $n \in \mathbb{Z}$, – совокупность G -циклов длины n . Для всякого $n \in \mathbb{N}$, при котором $\Gamma_n(G) \neq \emptyset$, введем множество $\mathcal{D}_n(G)$, состоящее из всех таких подмножеств $D \subset V(G)$, что $D \cap V(\gamma) \neq \emptyset$ для любого $\gamma \in \Gamma_n(G)$. Положим

$$b_n(G) = \min\{\#D : D \in \mathcal{D}_n(G)\},$$

$$b(G) = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \ln b_n(G).$$

Очевидно, $b(G)$ принимает значения в $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$.

11.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем $b(G)$ *показателем роста области прохождения циклов* графа G . Будем говорить, что эта область растет медленно, если $b(G) = 0$.

Следующее предложение обобщает теорему 1 из [51].

11.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если область прохождения циклов связного графа G растет медленно, то $G \in \text{Reg}_0^1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При каждом n , для которого $b_n(G) \neq \emptyset$, зафиксируем какое-нибудь множество $D_n \in \mathcal{D}_n(G)$, удовлетворяющее условию $\#D_n = b_n(G)$. Если $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$, то, очевидно,

$$(11.2) \quad Q_{X(G)}(G, f, n) \leq \sum_{v \in D_n} Q_{\hat{C}(v)}(G, f, n) \leq \sum_{v \in D_n} n Q_{C(v)}(G, f, n).$$

При всех v и n справедливо также неравенство

$$(11.3) \quad Q_{C(v)}(G, f, n) \leq [R(A_f)]^{-n}.$$

В самом деле, из определения легко выводится, что

$$Q_{C(v)}(G, f, kn) \geq [Q_{C(v)}(G, f, n)]^k, \quad k \in \mathbb{N},$$

и если бы нашлись v и n , для которых $Q_{C(v)}(G, f, n) > [R(A_f)]^{-n}$, это привело бы к противоречию:

$$\begin{aligned} [R(A_f)]^{-1} &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} [Q_{C(v)}(G, f, m)]^{1/m} \\ &\geq \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} [Q_{C(v)}(G, f, kn)]^{1/kn} \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} [Q_{C(v)}(G, f, n)]^{1/n} > [R(A_f)]^{-1}. \end{aligned}$$

Подставив (11.3) в (11.2), после очевидных преобразований и взятия верхнего предела получим

$$-\ln r(G, f) \leq b(G) - \ln R(A_f),$$

а так как по условию $b(G) = 0$ (см. определение 11.5), это означает, что $r(G, f) \geq R(A_f)$. С другой стороны, всегда справедливо обратное (нестрогое) неравенство. В результате мы убеждаемся, что $r(G, f) = R(A_f)$. Предложение доказано.

Наложив дополнительное условие на геометрию графа G , можно получить гораздо более сильное свойство регулярности.

Пусть, как и раньше, $V(G)$ и $E(G)$ – соответственно множество вершин и множество ребер ориентированного графа G . Положим

$$e^+(G) = \sup_{v \in V(G)} \# \{v' \in V(G) : (v, v') \in E(G)\}.$$

Если $e^+(G) < \infty$, граф G называется *равномерно локально-конечным вперед*.

11.7. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если связный граф G равномерно локально-конечен вперед и $b(G) = 0$, то $G \in \text{Reg}^\infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если функции $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$ и $g: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяют условию $\sup_{x \in X(G)} |f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$, то $|\ln r(G, f) - \ln r(G, g)| \leq \varepsilon$ и $|\ln R(G, f, v) - \ln R(G, g, v)| \leq \varepsilon$ при всех $v \in V(G)$. Поэтому достаточно доказать, что $G \in \text{Reg}_0^m$ при всех $m \in \mathbb{N}$. Но для $m = 1$ это уже доказано (см. предложение 11.6), а в случае $m > 1$ можно применить отображение Φ_m (см. §§ 1, 2). Легко понять, что

$$b_n(\Phi_k G) \leq e^+(G) b_n(\Phi_{k-1} G), \quad k \geq 2, \quad n \geq 1.$$

Следовательно,

$$b_n(\Phi_m G) \leq [e^+(G)]^{m-1} b_n(G),$$

откуда с учетом условий $e^+(G) < \infty$ и $b(G) = 0$ получаем $b(\Phi_m G) = 0$. Теперь воспользуемся предложением 11.6, согласно которому $\Phi_m G \in \text{Reg}_0^1$. Чтобы вывести отсюда интересующее нас включение $G \in \text{Reg}_0^m$, достаточно заметить, что

$$\Phi_m \mathcal{F}_0^m(G) = \mathcal{F}_0^1(\Phi_m G)$$

и что для всякой функции $f \in \mathcal{F}_0^m(G)$ выполняются соотношения

$$R(\Phi_m G, \Phi_m f) = R(G, f, v), \quad v \in V(G), \quad r(\Phi_m G, \Phi_m f) = r(G, f);$$

по поводу первого из них см. следствие 2.14, а второе вытекает из определения. Предложение доказано.

§ 12. СЦМ с конечной областью прохождения циклов

В этом параграфе мы будем пользоваться некоторыми понятиями и обозначениями, введенными в § 11. При одном существенном, но зато вполне наглядном ограничении на геометрию графа G мы усилим ряд утверждений, доказанных выше. При этом G будет всегда предполагаться связным.

12.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Будем говорить, что граф G имеет *конечную область прохождения циклов*, если найдется конечное множество $V \subset V(G)$, которое содержит хотя бы одну вершину из каждого G -цикла. Всякое такое V будем называть *областью прохождения циклов* графа G .

Примером графа с конечной областью прохождения циклов может служить любой лепестковый граф (см. определение 5.14).

Предложение 11.6 показывает, что все графы с конечной областью прохождения циклов регулярны относительно $\mathcal{F}_0^1(G)$. Легко понять, что если G не является локально-конечным вперед, то $\Phi_m G$ при некотором $m > 1$ уже не будет иметь конечной области прохождения циклов. Тем не менее, справедливо следующее утверждение.

12.2. ТЕОРЕМА. *Всякий граф с конечной областью прохождения циклов регулярен относительно $\mathcal{B}\mathcal{F}_0^m(G)$ при всех $m \geq 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $V = \{v_1, \dots, v_k\}$ – любая область прохождения циклов графа G . Из ее определения следует, что при всяком $n \geq 1$

$$\text{Fix}_n(G) = \bigcup_{i=1}^k (\widehat{C}(v_i) \cap \text{Fix}_n(G)),$$

где, как и раньше, $\widehat{C}(v_i) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} S^n C(v_i)$. Поэтому для всякой функции $f: X(G) \rightarrow \mathbb{R}$

$$Q_{X(G)}(G, f, n) \leq \sum_{i=1}^k Q_{\widehat{C}(v_i)}(G, f, n) \leq \sum_{i=1}^k n Q_{C(v_i)}(G, f, n).$$

Если $f \in \mathcal{BF}_0^m(G)$, $m > 1$, то согласно предложению 2.13

$$Q_{C(v_i)}(G, f, n) \leq B_i Q_{C(\gamma_i)}(G, f, n + b_i), \quad i = 1, \dots, k,$$

где γ_i – произвольный G -путь длины m , выходящий из v_i , а B_i и b_i могут зависеть от этого пути, но не от n . Поэтому

$$r(G, f) \geq \min_{1 \leq i \leq k} R(\Phi_m G, \Phi_m f, \tilde{v}_i),$$

где $\tilde{v}_i$ – вершина графа $\Phi_m G$, отождествляемая с путем γ_i . Но в силу предложения 2.13

$$R(\Phi_m G, \Phi_m f, \tilde{v}_i) = R(G, f, v)$$

при всех $i = 1, \dots, k$ и $v \in V(G)$. Следовательно,

$$r(G, f) \geq R(G, f, v), \quad v \in V(G).$$

Так как обратное неравенство очевидно, отсюда вытекает доказываемое утверждение.

12.3. ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно предложению 11.6 эта теорема останется верной, если в ее формулировке заменить $\mathcal{BF}_0^m(G)$, $m > 1$, на $\mathcal{F}_0^m(G)$ при $m = 1$. Можно показать, однако, что при $m = 2$ это уже не так.

Теорема 12.2 и следствие 11.4 приводят к заключению, что если G – граф с конечной областью прохождения циклов, $f \in \mathcal{BF}_0^m(G)$ и матрица $A_{\Phi_m f}$ устойчиво-положительна, то $\mu_n^f \rightarrow \mu^f$. Сейчас мы обобщим это утверждение, заменив устойчивую положительность положительной возвратностью, которая по теореме 4.6 равносильна существованию меры μ^f . Для этого нам потребуется следующая простая лемма.

12.4. ЛЕММА. Если $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$ и матрица A_f положительно-возвратна, то

$$(12.1) \quad \sum_n n Q_{C(v)}(G, f - t \mathbf{1}_{C(v)}, n) [R(A_f)]^n < \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Левая часть (12.1) лишь множителем отличается от ряда, определяющего производную $\varphi'_{vv}(A_f - t\mathbf{1}_{C(v)}, z)$ в точке $z = R(A_f)$. Если матрица A_f устойчиво-положительна, то $R(A_f - t\mathbf{1}_{C(v)}) > R(A_f)$, т.е. $R(A_f)$ лежит в круге сходимости степенного ряда для $\varphi_{vv}(A_f - t\mathbf{1}_{C(v)}, z)$. Поэтому выполняется (12.1). Если же A_f неустойчиво-положительна, то

$$\varphi_{vv}^0(A_f, R(A_f)) = 1, \quad \left. \frac{d}{dz} \varphi_{vv}^0(A_f, z) \right|_{z=R(A_f)} < \infty$$

(см. § 2), а так как

$$\varphi_{vv}^0(A_f - t\mathbf{1}_{C(v)}, z) = e^{-t} \varphi_{vv}^0(A_f, z),$$

где $e^{-t} < 1$, из (2.10) следует, что $\varphi'_{vv}(A_f - t\mathbf{1}_{C(v)}, R(A_f)) < \infty$, и мы снова приходим к (12.1). Предложение доказано.

12.5. ТЕОРЕМА. Пусть G – граф с конечной областью прохождение циклов и $f \in \mathcal{F}_0^1(G) \cup \mathcal{BF}_0^m(G)$, $m \geq 1$. Тогда:

- 1) $R(G, f, v)$ не зависит от $v \in V(G)$;
- 2) если $0 < R(G, f, v) < \infty$ и существует равновесная мера μ^f , то $\mu_n^f \rightarrow \mu^f$ при $n \rightarrow \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 11.6 и теоремы 12.2 для всякой функции $f \in \mathcal{F}_0^1(G) \cup \mathcal{BF}_0^m(G)$ выполняется равенство $R(G, f, v) = r(G, f)$, $v \in V(G)$, и можно положить $R(G, f) = r(G, f)$.

Пусть сначала $f \in \mathcal{F}_0^1(G)$. Тогда, как мы знаем, существование меры μ^f равносильно положительной возвратности матрицы A_f (см. теорему 4.6), а сходимость μ_n^f к μ^f равносильна соотношению (7.17) (см. следствие 7.9). Из (8.1) и определения 8.1 видно, что $Q_{X(G)}(G, f, nd)$, где d – период графа G , есть не что иное, как коэффициент при z^{nd} в разложении функции $z \mapsto z(\ln \zeta_f(z))'$ по степеням z . В силу (8.3) $Q_{X(G)}(G, f, nd)$ можно представить в виде суммы аналогичных коэффициентов для функций $z \mapsto z(\ln[1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)]^{-1})'$ и $z \mapsto z(\ln \zeta_{f^v}(z))'$, где v – произвольная вершина графа G . Эти коэффициенты соответственно равны $Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd)$ и $Q_{X(G) \setminus \widehat{C}(v)}(G, f, nd)$. Поскольку

$$(\ln[1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)]^{-1})' = [\varphi_{vv}^0(A_f, z)]'[1 - \varphi_{vv}^0(A_f, z)]^{-1},$$

из леммы 7.7 и представления коэффициентов левой части этого тождества в виде свертки коэффициентов двух сомножителей, стоящих в правой части, легко вывести, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{\widehat{C}(v)}(G, f, nd) R^{nd} = d,$$

где $R = R(G, f)$ (нужно воспользоваться тем, что вследствие положительной возвратности матрицы A_f производная $\left. \frac{d}{dz} \varphi_{vv}^0(A_f, z) \right|_{z=R}$ конечна). Поэтому достаточно доказать, что

$$(12.2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} Q_{X(G) \setminus \widehat{C}(v)}(G, f, n) R^n = 0.$$

Из определения ясно, что при $n \geq 1, t > 0$

$$(12.3) \quad Q_{X(G) \setminus \widehat{C}(v)}(G, f, n) \leq Q_{X(G)}(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}, n).$$

Пусть $\{v_1, \dots, v_k\}$ – произвольная область прохождения циклов графа G . Тогда

$$(12.4) \quad Q_{X(G)}(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}, n) \leq \sum_{i=1}^k n Q_{C(v_i)}(G, f - t\mathbf{1}_{C(v)}, n),$$

и с помощью леммы 12.4 мы получаем (12.2).

Пусть теперь $f \in \mathcal{BF}_0^m(G)$ при $m > 1$. Тогда $f_m \in \mathcal{F}_0^1(G_m)$, где $G_m = \Phi_m G$, $f_m = \Phi_m f$, и так как существует мера μ^f , матрица A_{f_m} положительно-возвратна. Взяв в (12.3) (G_m, f_m) вместо (G, f) , получим

$$(12.5) \quad Q_{X(G_m) \setminus \widehat{C}(\tilde{v})}(G_m, f_m, n) \leq Q_{X(G_m)}(G_m, f_m - t\mathbf{1}_{C(\tilde{v})}, n),$$

где $\tilde{v}$ – произвольная вершина графа G_m . Однако мы не можем написать для G_m и f_m аналог оценки (12.4), поскольку G_m уже не имеет, вообще говоря, конечной области прохождения циклов. Поэтому поступим следующим образом. Пусть, как и раньше, $\{v_1, \dots, v_k\}$ – какая-либо область прохождения циклов графа G . Для каждого $i \in [1, k]$ зафиксируем произвольный путь γ_i длины $m - 1$, выходящий из v_i , и обозначим вершину графа G_m , отвечающую этому пути, через $\tilde{v}_i$. В качестве $\tilde{v}$ возьмем, например, $\tilde{v}_1$. По определению

$$(12.6) \quad \begin{aligned} Q_{X(G_m)}(G_m, f_m - t\mathbf{1}_{C(\tilde{v}_1)}, n) &= Q_{X(G)}(G, f - t\mathbf{1}_{C(\gamma_1)}, n) \\ &\leq \sum_{i=1}^k n Q_{C(v_i)}(G, f - t\mathbf{1}_{C(\gamma_1)}, n), \end{aligned}$$

где $C(\gamma_1) = \{x \in X(G) : (x_0, \dots, x_{m-1}) = \gamma_1\}$. Предложение 2.13 позволяет утверждать, что при достаточно большом n

$$(12.7) \quad \begin{aligned} Q_{C(v_i)}(G, f - t\mathbf{1}_{C(\gamma_1)}, n) &\leq B_i Q_{C(\gamma_i)}(G, f - t\mathbf{1}_{C(\gamma_1)}, n + b_i) \\ &= B_i Q_{C(\tilde{v}_i)}(G_m, f_m - t\mathbf{1}_{C(\tilde{v}_1)}, n + b_i), \end{aligned}$$

где B_i и b_i не зависят от n . Неравенство (12.5) после подстановки в него (12.6), куда, в свою очередь, подставлено (12.7), принимает вид

$$Q_{X(G_m) \setminus \widehat{C}(\tilde{v}_1)}(G_m, f_m, n) \leq n \sum_{i=1}^k B_i Q_{C(\tilde{v}_i)}(G_m, f_m - t\mathbf{1}_{C(\tilde{v}_1)}, n + b_i).$$

В силу леммы 12.4 отсюда вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_{X(G_m) \setminus \widehat{C}(\tilde{v}_1)}(G_m, f_m, n) R^n = 0.$$

Тем самым теорема доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Синай Я. Г. Гиббсовские меры в эргодической теории // УМН 1972. Т. 27. № 4. С. 21–64.
- [2] Bowen R. Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms. V. 470. Berlin: Springer-Verlag, 1975 (Lect. Notes in Math.).
- [3] Ruelle D. A variational formulation of equilibrium statistical mechanics and the Gibbs phase rule // Comm. Math. Phys. 1967. V. 5. P. 324–329.
- [4] Ruelle D. Statistical mechanics of a one-dimensional lattice gas // Comm. Math. Phys. 1968. V. 9. P. 267–278.
- [5] Ruelle D. Thermodynamic formalism. Reading, MA: Addison-Wesley, 1978.
- [6] Walters P. A variational principle for the pressure of continuous transformations // Amer. J. Math. 1976. V. 97. P. 937–971.
- [7] Walters P. Ergodic Theory, Introductory Lectures. V. 458. Berlin: Springer-Verlag, 1975 (Lect. Notes Math.).
- [8] Lanford O. E. Entropy and equilibrium states in classical statistical mechanics. Statistical mechanics and mathematical problems // Lect. Notes in Phys. 1973. V. 20. P. 1–113.
- [9] Parry W. Intrinsic Markov chains // Trans. Amer. Math. Soc. 1964. V. 112. P. 55–65.
- [10] Гуревич Б. М. Топологическая энтропия счетной цепи Маркова // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. № 4. С. 715–718.
- [11] Гуревич Б. М. Энтропия сдвига и марковские меры в пространстве путей счетного графа // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 5. С. 963–965.
- [12] Песин Я. Б., Пицкель Б. С. Топологическое давление и вариационный принцип для некомпактных множеств // Функцион. анализ и его прилож. 1984. Т. 18. № 4. С. 50–63.
- [13] Bowen R. Entropy for group endomorphisms and homogeneous spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1971. V. 153. P. 401–414.
- [14] Bowen R. Topological entropy for noncompact sets // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 184. P. 125–136.
- [15] Заргарян А. С. Вариационный принцип для топологического давления в случае цепи Маркова со счетным числом состояний // Матем. заметки. 1986. Т. 40. № 6. С. 749–761.
- [16] Гуревич Б. М. Вариационный принцип для одномерных решетчатых гиббсовских случайных полей со счетным числом состояний // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. С. 749–752.
- [17] Salama I. A. Topological entropy and recurrence of countable chains // Pacific J. Math. 1988. V. 134. № 2. P. 325–341.
- [18] Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967.
- [19] Белман Р. Введение в теорию матриц. М.: Наука, 1969.
- [20] Vere-Jones D. Ergodic properties of nonnegative matrices. I // Pacific J. Math. 1967. V. 22. № 2. P. 361–386.
- [21] Vere-Jones D. Geometric ergodicity in denumerable Markov chains // Quart. J. Math. Oxford. Ser. 2. 1962. V. 13. P. 7–28.
- [22] Гуревич Б. М. Устойчиво-возвратные неотрицательные матрицы // УМН. 1996. Т. 51. № 3. С. 195–196.
- [23] Kendall D. G. Unitary dilations of Markov transition operators and the corresponding integral representations for transition-probability matrices. Probability and statistics. Stockholm: Almqvist and Wiksell, 1959.
- [24] Гуревич Б. М., Заргарян А. С. Об условиях существования максимальной меры для счетной символической цепи Маркова // Вестник МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1988. № 5. С. 14–18.
- [25] Gurevich B. M. A variational characterization of one-dimensional countable state Gibbs random fields // Z. Wahrschein. verw. Geb. 1984. V. 68. P. 205–242.
- [26] Spitzer F. A variational characterization of finite Markov chains // Ann. Math. Statist. 1972. V. 43. P. 303–307.
- [27] Ruelle D. Statistical Mechanics. Rigorous Results. New York: W. A. Benjamin Inc., 1969.
- [28] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980.
- [29] Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М.: Мир, 1969.

- [30] Рохлин В. А. Лекции по энтропийной теории преобразований с инвариантной мерой // УМН. 1967. Т. 22. №5. С. 3–56.
- [31] Ширяев А. Н. Вероятность. М.: Наука, 1980.
- [32] Lanford O. E., Ruelle D. Observables at infinity and states with short range correlations in statistical mechanics // Comm. Math. Phys. 1969. V. 13. P. 194–215.
- [33] Добрушин Р. Л. Гиббсовские случайные поля для решетчатых систем с парным взаимодействием // Функцион. анализ и его прилож. 1968. Т. 2. №4. С. 31–43.
- [34] Kesten H. Existence and uniqueness of countable one-dimensional Markov random fields // Ann. Probab. 1976. V. 4. P. 557–569.
- [35] Гуревич Б. М. Конечные аппроксимации бесконечных неотрицательных матриц и сходимость равновесных распределений // Докл. АН. 1996. Т. 347. №6. С. 732–735.
- [36] Виллингслей П. Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977.
- [37] Artin E., Mazur B. On periodic points // Ann. Math. 1965. V. 81. P. 82–99.
- [38] Ruelle D. Generalized zeta-functions for axiom A basic sets // Bull. Amer. Math. Soc. 1976. V. 82. P. 153–156.
- [39] Takahashi Y. Shift with orbit basis and realization of one dimensional maps // Osaka J. Math. 1983. V. 20. P. 599–629.
- [40] Bowen R., Lanford O. E. Zeta functions of restrictions of the shift transformation // Proc. Sympos. Pure Math. 1968. V. 14. P. 43–49.
- [41] Савченко С. В. Периодические точки счетных топологических марковских цепей // Матем. сб. 1995. Т. 186. №10. С. 103–140.
- [42] Чжун-Кай-Лай. Однородные цепи Маркова. М.: Мир, 1964.
- [43] Ruelle D. Statistical mechanics on a compact set with $\mathbb{Z}^{\nu}$ -action satisfying expansiveness and specification // Trans. Amer. Math. Soc. 1973. V. 185. P. 237–251.
- [44] Алексеев В. М. Символическая динамика. Одиннадцатая математическая школа. Киев: Институт математики АН СССР, 1976.
- [45] Георги Г.-О. Гиббсовские меры и фазовые переходы. М.: Мир, 1990.
- [46] Phelps R. Convex functions, monotone operators and differentiability. V. 1364. Berlin: Springer-Verlag, 1989 (Lect. Notes in Math.).
- [47] Иоффе А. Д., Тихомиров В. М. Теория экстремальных задач. М.: Наука, 1974.
- [48] Erdos P., Feller W., Pollard H. A theorem on power series // Bull. Amer. Math. Soc. 1949. V. 55. P. 201–204.
- [49] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Т. 2. М.: Мир, 1966.
- [50] Савченко С. В. О спектрах конечных подматриц бесконечных неразложимых матриц // УМН. 1997. Т. 52. №3. С. 175–176.
- [51] Галеева Р. Ф., Чернов Н. И. Условия строго экспоненциального роста числа циклов в счетных ориентированных графах // УМН. 1991. Т. 46. №4. С. 143–144.

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова;

Поступила в редакцию

Институт теоретической физики им. Л.Д. Ландау РАН

18.12.1997

E-mail: gurevich@nw.math.msu.su, bmg@gibbs.math.msu.su; savch@icp.ac.ru