Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Спирин, Модули из категорий E_λ над алгебрами Ли $A_n^{(1)}$, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm170>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 15:53:37

МОДУЛИ ИЗ КАТЕГОРИЙ E_λ НАД АЛГЕБРАМИ ЛИ $A_n^{(1)}$

С. А. Спирин

Категории E_λ модулей над алгеброй Каца–Мути были введены в работе [1]. Определение из [1] не распространялось на случай аффинной алгебры $A_n^{(1)}$ при четном n . В настоящей заметке вводится более общее определение категорий E_λ , годное, в частности, для всех аффинных алгебр Каца–Мути. Изложен метод изучения $A_n^{(1)}$ -модулей категорий E_λ , посредством которого получено описание всех $A_n^{(1)}$ -модулей категорий E_λ с однократными весами.

1. Пусть G – алгебра Каца–Мути, $A = (a_{ij})_{i,j \in I}$ – ее матрица Катрана, H – картановская подалгебра, R – система корней, α_i – простые корни, e_i, f_i ($i \in I$) – стандартные образующие. Если $G = A_n^{(1)}$, то примем $I = \{0, 1, \dots, n\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $B \subset R$ и для всех $\beta \in B$ фиксированы ненулевые $X_\beta \in G_\beta$ и $Y_\beta \in G_{-\beta}$. Множество $\{X_\beta, Y_\beta\}_{\beta \in B}$ называется узкой системой, если 1) $[X_\beta, X_{\beta'}] = 0$ для любых $\beta, \beta' \in B$; 2) множество $\{X_\beta, Y_\beta\}_{\beta \in B} \cup H$ порождает алгебру Ли G .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть заданы узкая система $\{X_\beta, Y_\beta\}_{\beta \in B}$ и элемент $\lambda \in H^*$. Будем говорить, что весовой G -модуль V принадлежит категории E_λ , если 1) множество его весов есть $\Lambda = \lambda + P$, где P – решетка, порожденная корнями; 2) индуцируемые элементами X_β отображения весовых подпространств $V_\mu \rightarrow V_{\mu+\beta}$ взаимно однозначны для любых $\mu \in \Lambda, \beta \in B$.

2. Примеры узких систем.

1) Пусть существует разбиение $I = K \sqcup L$ такое, что $a_{kk'} = 0$, если $k, k' \in K$ и $k \neq k'$, и $a_{ll'} = 0$, если $l, l' \in L$ и $l \neq l'$. Положим $B = \{\beta_i\}_{i \in I}$, где $\beta_k = \alpha_k$, если $k \in K$, и $\beta_l = -\alpha_l$, если $l \in L$. Положим также $X_k = e_k, X_l = f_l, Y_k = f_k, Y_l = e_l, k \in K, l \in L$ (мы пишем X_i и Y_i вместо X_{β_i} и Y_{β_i}). Для алгебр $A_n^{(1)}$ указанное разбиение существует лишь при нечетном n . Будем считать, что $K = \{0, 2, \dots, n-1\}, L = \{1, 3, \dots, n\}$.

2) Пусть $G = A_n^{(1)}$ и n четно. Тогда положим $X_0 = [e_0, e_n], Y_0 = [f_n, f_0], X_i = f_i, Y_i = e_i$ при нечетных i и $X_j = e_j, Y_j = f_j$ при четных $j \neq 0$; возьмем $B = \{\beta_i\}_{i=0}^n$, где β_i – корень, отвечающий X_i .

3. Далее мы рассматриваем $A_n^{(1)}$ -модули категорий E_λ , считая заданными описанные в предыдущем пункте $B = \{\beta_i\}, X_i$ и Y_i .

Для каждого $z \in \mathbb{C}$ зафиксируем $\mu_z \in H^*$ такой, чтобы $\mu_z(c) = z$, где c – образующая центра алгебры $A_n^{(1)}$. Пусть V – модуль категории E_λ и $\lambda(c) = z$. Определим числа $\tilde{m}_i \in \mathbb{C}, i = 0, \dots, n$, формулой $\lambda - \mu_z = \sum \tilde{m}_i \beta_i$. Формула $\mu = \mu_z + \sum m_i \beta_i$ задает взаимно однозначное соответствие между весами μ модуля V и наборами $m = (m_i)_{i=0}^n \in \mathbb{C}^{n+1}$ такими, что $m_i - \tilde{m}_i \in \mathbb{Z}, i = 0, \dots, n$. Для таких m будем писать $V_m = V_\mu$, где μ задано приведенной выше формулой. Таким образом, $V = \oplus V_m$, причем $X_i: V_m \rightarrow V_{m+\varepsilon_i}$ изоморфно. (Здесь и далее $\varepsilon_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ – единица на i -м месте.)

Положим $W = V_{\tilde{m}}$ и отождествим все V_m с W посредством изоморфизмов

$$\Phi_m = \prod_{i=0}^n X_i^{\tilde{m}_i - m_i}: V_m \rightarrow W.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. V как G -модуль однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется следующей системой линейных операторов на W :

$$Y_i^{(m)} = \Phi_{m-\varepsilon_i} \circ Y_i \circ \Phi_m^{-1}, \quad i = 0, \dots, n, \quad m \in \tilde{m} + \mathbb{Z}^{n+1}.$$

Для всех $i, j \in \{0, \dots, n\}, i \neq j$, введем числа $b_{ij} = b_{ji} \in \{0, 1, 2\}$ по следующим правилам: 1) если $n = 1$, то $b_{01} = 2$; 2) если $n = 2$, то $b_{01} = 2, b_{02} = b_{12} = 1$; 3) если $n \geq 3$, то $b_{i, i+1} = 1$ для всех $i = 0, \dots, n-1$ и $b_{0n} = 1$; кроме того, если n четно, то $b_{0, n-1} = 1$; остальные b_{ij} с $i < j$ равны 0.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Операторные функции $Y_i^{(m)}$ имеют следующий вид:

$$Y_i^{(m)} = P_i(m) - \left(m_i^2 + \sum_{j \neq i} b_{ij} m_i m_j + \gamma_i m_i \right) \cdot \text{Id}_W,$$

где $\gamma_i = \mu_z([X_i, Y_i]) - 1$, а $P_i(m)$ есть некоторый многочлен от m с операторными коэффициентами, причем P_i не зависит от m_i , а степень P_i по m_j , $j \neq i$, не превышает b_{ij} .

Соотношения на элементы X_i, Y_i алгебры G влекут некоторые соотношения на многочлены $Y_i^{(m)}$. Все такого рода следствия всех соотношений на X_i, Y_i равносильны некоторому конечному множеству соотношений на коэффициенты операторных многочленов $P_i(m)$. Этот последнее множество будем называть полным набором соотношений.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\lambda \in H^*$, $\lambda(c) = z$, и пусть $\{Y_i^{(m)}\}$ — некоторая система линейных операторов на пространстве W , причем $i = 0, \dots, n$, а $m = (m_0, \dots, m_n)$ пробегает $\tilde{m} + \mathbb{Z}^{n+1}$, где $\sum \tilde{m}_i \beta_i = \lambda - \mu_z$. Эти операторы отвечают некоторому G -модулю категории E_λ по формулам предложения 1 тогда и только тогда, когда операторы $Y_i^{(m)}$ имеют вид, указанный в предложении 2, и выполнен полный набор соотношений на коэффициенты многочленов $P_i(m)$.

ЗАМЕЧАНИЯ. 1) Полный набор соотношений на коэффициенты многочленов $P_i(m)$ определяют (так же, как в [1]) ассоциативную алгебру $Q_z(A_n^{(1)})$, которая зависит от z , но с точностью до изоморфизма не зависит от выбора μ_z . Если $\lambda(c) = z$, то $E_\lambda \simeq Q_z(A_n^{(1)}) \pmod{\cdot}$. 2) Из результатов работы [2] следует, что если $\lambda(c) \neq 0$, то категория E_λ не содержит модулей с конечной ненулевой кратностью весов. Равносильное утверждение: алгебра $Q_z(A_n^{(1)})$ при $z \neq 0$ не имеет конечномерных представлений.

4. Следующая теорема описывает все $A_n^{(1)}$ -модули категорий E_λ с одномерными весовыми подпространствами. Для случая $n = 2$ этот результат получен в работе [3]. Ввиду последнего замечания можно считать, что $z = 0$, и писать μ_0 вместо μ_z .

ТЕОРЕМА 2. Если кратность весов модуля V равна 1, то при надлежащем выборе μ_0 верны следующие формулы. Если n нечетно, то (положив для удобства записи $m_{-1} = m_n, m_{n+1} = m_0$)

$$Y_i^{(m)} = (\nu + (-1)^i (m_i + m_{i+1})) (\nu - (-1)^i (m_i + m_{i-1})), \quad i = 0, \dots, n.$$

Если n четно, то

$$Y_{n-1}^{(m)} = (\nu + m_{n-1} + m_{n-2})(\nu - m_0 - m_{n-1} + m_n),$$

$$Y_n^{(m)} = (\nu + m_n)(\nu - m_0 - m_{n-1} + m_n),$$

$$Y_0^{(m)} = (\nu + m_0 + m_1)(\nu - m_0 - m_{n-1} - m_n);$$

остальные $Y_i^{(m)}$ задаются теми же формулами, что для нечетных n . Здесь $\nu \in \mathbb{C}$, а $m_i \in \mathbb{Z} + \tilde{m}_i$, где $\sum \tilde{m}_i \beta_i = \lambda - \mu_0$. Наоборот, каждому числу ν и каждому $\lambda \in H^*$ такому, что $\lambda(c) = 0$, эти формулы сопоставляют по $A_n^{(1)}$ -модулю категории E_λ с одномерными весовыми подпространствами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Спирин С. А. // Функци. анализ и его прил. 1993. Т. 27. № 1. С. 88–91. [2] Britten D. J., Lemire F. W. // Canad. Math. Bull. 1994. V. 37. № 3. Р. 310–314. [3] Спирин С. А. // Функци. анализ и его прил. 1987. Т. 21. № 1. С. 84–85.

Институт физико-химической биологии им. А. Н. Белозерского;
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.04.1999