Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. М. Алиашвили, Г. Н. Химшиашвили, Об эйлеровой характеристике пересечения квадратик, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1700>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 13:10:56

Об эйлеровой характеристике пересечения квадрик

Т. М. Алиашвили, Г. Н. Химшиашвили

1. Пусть $\chi(n, m, d)$ обозначает совокупность всевозможных значений эйлеровой характеристики непустых компактных алгебраических множеств в $\mathbb{R}^n$, представимых как пересечение m алгебраических гиперповерхностей степени d . Под алгебраической гиперповерхностью степени d в $\mathbb{R}^n$, как обычно, понимается множество всех вещественных нулей некоторого многочлена степени d от n переменных с вещественными коэффициентами [1].

В ряде вопросов вещественной алгебраической геометрии, связанных с 16-й проблемой Гильберта и неравенствами Петровского–Олейник, возникает задача описания множеств $\chi(n, m, d)$ для различных значений параметров n , m , d , которая остается нерешенной как в общем виде, так и для сравнительно небольших значений параметров [1]. Представляет интерес также описание множеств вида $\chi(n, d)$ ($\chi_{\Phi}(n, d)$), возникающих при рассмотрении пересечений (трансверсальных) гиперповерхностей степени d , взятых в произвольном конечном числе [2]–[5]. Каждое из полученных множеств будем называть χ -спектром соответствующего типа.

Мы приводим оценки спектра $\chi(n, 2)$ всевозможных значений эйлеровой характеристики непустого компактного пересечения вещественных квадрик в евклидовом пространстве заданной размерности n . Из общих результатов вещественной алгебраической геометрии следует, что множество $\chi(n, 2)$ конечно, и поэтому представляет интерес нахождение как можно более точных верхней и нижней оценок для $\chi(n, 2)$ и $\chi_{\Phi}(n, 2)$. Точную (т.е. достижимую) оценку снизу (сверху) будем называть левой (правой) границей. Удобно говорить об оценках границ снаружи и изнутри. Оценки снаружи могут быть выведены из результатов работ [6] и [7], тогда как получение оценок изнутри требует рассмотрения конкретных примеров, что являлось прерогативой первого автора.

2. Приведем вначале общую оценку эйлеровой характеристики, применимую к пересечениям алгебраических гиперповерхностей произвольных степеней. Напомним, что для натуральных $n, k_1, \dots, k_n$ число Петровского $P(n; k_1, \dots, k_n)$ определяется как число всех целых точек в параллелепипеде $B = \prod [0, k_i - 1]$, лежащих на гиперплоскости $\{2(x_1 + \dots + x_n) = k_1 + \dots + k_n - n\}$ [3], [7]. Если все числа k_i равны некоторому числу k , то соответствующее число Петровского обозначается $P(n; k)$. Согласно основному результату [7], абсолютная величина топологической степени полиномиального эндоморфизма, компоненты которого имеют алгебраические степени $k_1, \dots, k_n$, не превосходит $P(n; k_1, \dots, k_n)$.

ТЕОРЕМА 1. *Удвоенная абсолютная величина эйлеровой характеристики компактного пересечения произвольного числа вещественных гиперповерхностей степени d в $\mathbb{R}^n$ не превосходит увеличенного на единицу числа Петровского $P(n + 1; 2d + 3)$.*

Это следует из явной формулы для эйлеровой характеристики, полученной в [6], и вышеупомянутого результата работы [7].

СЛЕДСТВИЕ 1. *Абсолютная величина любого элемента спектра $\chi(n, 2)$ не превосходит половины увеличенного на единицу числа сочетаний из $4n + 3$ по n .*

3. Для уточнения структуры χ -спектров можно также использовать результаты [8]–[11]. Рассмотрим собственное квадратичное отображение $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и обозначим через $\chi(Q)$ множество значений эйлеровой характеристики непустых слоев Q . Ясно, что $\chi(n, m, 2)$ является объединением множеств типа $\chi(Q)$. Это обстоятельство полезно, поскольку из результатов [8]–[10] следует, что $\chi(Q)$ может быть эффективно

найден по коэффициентам Q . Следующие два предложения получаются из результатов [11] и [12].

ТЕОРЕМА 2. *Для любого невырожденного квадратичного отображения $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ существуют вещественные многочлены f_j от m переменных в четном числе s такие, что спектр $\chi(Q)$ совпадает с множеством значений суммы их знаков по всем точкам $\mathbb{R}^m$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Обе границы спектра $\chi(n, 2)$ четны.*

Очевидно, что $\chi(n, 2) \subseteq \chi(n+1, 2)$ и правая граница спектра $\chi(n, 2)$ заведомо не меньше 2^n (достаточно взять n пар параллельных гиперплоскостей общего положения). Для всех известных нам χ -спектров данная оценка точна.

Легко показать, что спектр $\chi(n, 2)$ всегда содержит целочисленный сегмент $[0, 2^n] \cap \mathbb{Z}$. По-видимому, такой спектр всегда совпадает с целочисленным сегментом. Комбинируя приведенные факты и результаты [2], [4], [12], можно оценить и вычислить спектры $\chi(n, 2)$ при малых n . Например:

$$\begin{aligned}\chi(2, 2) &= [0, 4] \cap \mathbb{Z}, & \chi(3, 2) &= [-2, 8] \cap \mathbb{Z}, & \chi(4, 2) &\supseteq [-2, 16] \cap \mathbb{Z}, \\ \chi(5, 2) &\supseteq [-4, 32] \cap \mathbb{Z}, & \chi(6, 2) &\supseteq [-6, 64] \cap \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] L. Blum, F. Cucker, M. Shub, S. Smale, *Complexity and real computation*, Springer-Verlag, New York, 1998. [2] А. А. Аграчев, Р. В. Гамкрелидзе, *Итоги науки. Соврем. проблемы матем. Новейшие достижения*, **35**, 1989, 179–239. [3] В. И. Арнольд, *Функц. анализ и его прил.*, **12**:1 (1978), 1–14. [4] G. N. Khimshiashvili, *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, **125** (2001), 1–121. [5] G. N. Khimshiashvili, *Georgian Math. J.*, **11**:4 (2004), 759–770. [6] J. Bruce, *Bull. London Math. Soc.*, **22**:6 (1990), 547–552. [7] А. Г. Хованский, *Функц. анализ и его прил.*, **13**:1 (1979), 49–58. [8] Г. Н. Химшиашвили, *Сообщ. АН ГССР*, **85**:2 (1977), 309–312. [9] D. Eisenbud, H. I. Levine, *Ann. of Math. (2)*, **106**:1 (1977), 19–44. [10] Т. Алиашвили, *J. Math. Sci. (New York)*, **118**:5 (2003), 5325–5346. [11] A. Parusiński, Z. Szafraniec, *Banach Center Publ.*, **44** (1998), 175–182. [12] Y. Kamiyama, *Kyushu J. Math.*, **54**:2 (2000), 333–369.

Т. М. Алиашвили (T. M. Aliashvili)

Математический институт им. А. М. Размадзе АН Грузии

Представлено С. М. Гусейн-Заде

Принято редколлегией

01.12.2005

Г. Н. Химшиашвили (G. N. Khimshiashvili)

Математический институт им. А. М. Размадзе АН Грузии

E-mail: gogikhim@yahoo.com, khimsh@rmi.acnet.ge