Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Выдрин, Об оценке степени регулярности стохастических матриц, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.81.137.203

26 апреля 2023 г., 06:48:56

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Об оценке степени регулярности стохастических матриц

А. С. Выдрин

Цель данной работы – дать оценку сверху на степень регулярности стохастической матрицы. Автору удалось получить универсальную оценку, зависящую только от размера стохастической матрицы, и доказать, что данная оценка в общем случае является наилучшей.

Стохастические матрицы широко применяются в теории марковских цепей (подробно рассмотренных в монографии [1]) и в теории вероятностных автоматов (изложение данной теории содержится в монографии [2]).

Для начала дадим определение стохастической матрицы.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Квадратная матрица $A \in M_n(\mathbb{R})$ размера $n \times n$ с вещественными элементами называется *стохастической*, если все ее элементы неотрицательны и сумма всех элементов в каждой строке равна 1.

Непосредственно проверяется, что произведение стохастических матриц является стохастической матрицей.

В данной работе будут рассматриваться специальные классы стохастических матриц, именуемые регулярными стохастическими матрицами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Стохастическая матрица A называется *регулярной*, если существует такое натуральное число m , что матрица A^m состоит из строго положительных элементов. *Степенью регулярности* $\text{rd}(A)$ данной матрицы назовем минимальное значение натурального параметра m , для которого выполнено это свойство.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – стохастическая матрица и пусть для некоторого натурального m матрица A^m состоит из строго положительных элементов. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$, $k > m$, матрица A^k также состоит из строго положительных элементов.

Доказательство данного предложения основывается на очевидном утверждении: если стохастическая матрица является регулярной, то она не может иметь полностью нулевых строк. Из предложения 1 следует, что все степени регулярной матрицы с показателями, превышающими ее степень регулярности, состоят из строго положительных элементов.

Получение основного результата работы основано на использовании свойств некоторых специальных объектов – булевых матриц.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. *Булевой матрицей* называется матрица, состоящая из нулей и единиц. При этом операция умножения $\otimes$ двух булевых матриц $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ и $B = (b_{ij})_{i,j=1}^n$ размера $n \times n$ определяется аналогично определению “обычного” умножения матриц с использованием логических операций: $(A \otimes B)_{ij} = \bigvee_{k=1}^n a_{ik} \wedge b_{kj}$.

Используя технику теории графов, автору удалось доказать следующий результат.

ТЕОРЕМА 1. Пусть булева матрица B имеет степенной предел, т.е. существует такое натуральное число m , что верно равенство $B^{m+1} = B^m$, где степень определена относительно операции умножения булевых матриц. Тогда для минимального m , обладающего данным свойством, верна оценка сверху $m \leq (n-1)^2 + 1$.

Также автором получен следующий результат, свидетельствующий о том, что эта оценка неулучшаема.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для булевой матрицы, у которой единицы стоят только под главной диагональю и на двух верхних позициях в крайнем правом столбце, неравенство из теоремы 1 превращается в равенство, т.е. для любого $m < (n-1)^2 + 1$ $B^{m+1} \neq B^m$.

Основной результат данной работы можно сформулировать в виде следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Для любой регулярной стохастической матрицы A размера $n \times n$ верно неравенство $\text{rd}(A) \leq (n-1)^2 + 1$, причем существует регулярная стохастическая матрица, для которой оценка достигается.

Для доказательства данного утверждения поставим в соответствие каждой стохастической матрице A булеву матрицу $\varphi(A)$ того же размера по следующему правилу: $(\varphi(A))_{ij} = 1$, если $a_{ij} > 0$, и $(\varphi(A))_{ij} = 0$ иначе. Несложно установить, что данное отображение является гомоморфизмом, т.е. $\varphi(AB) = \varphi(A) \otimes \varphi(B)$. На основании данного факта, предложения 1 и теоремы 1 несложно получить доказательство основного утверждения. Для построения примера, показывающего достижимость оценки, можно взять матрицу из предложения 2, предварительно разделив вторую строку матрицы на 2 (для того, чтобы получить стохастическую матрицу).

Список литературы

[1] Е. Б. Дынкин, *Марковские процессы*, Физматгиз, М., 1963. [2] Р. Г. Бухараев, *Основы теории вероятностных автоматов*, Наука, М., 1985.

А. С. Выдрин (A. S. Vydrin)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: alexvydrin@mail.ru

Представлено А. В. Михалевым

Принято редколлегией
01.12.2005