Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Б. И. Голубов, С. М. Никольский, С. А. Теляковский,
П. Л. Ульянов, Карой Тандори (некролог), *УМН*, 2006,
том 61, выпуск 1, 165–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 10:30:54

Карой Тандори

На 80-м году жизни скончался выдающийся венгерский математик крупный специалист по математическому анализу академик Венгерской Академии наук Карой Тандори (1925–2005).

Вся жизнь К. Тандори была связана с университетом им. Йозефа Аттилы в Сегеде. Здесь он был студентом, а затем преподавал на математическом факультете, был деканом.

Многие годы Тандори был главным редактором журнала “Acta Mathematica Hungarica” и членом редколлегии журнала “Acta Scientiarum Mathematicarum (Szeged)”, имеющего высокий международный авторитет.

К. Тандори принимал активное участие в организации советско-венгерского (ныне российско-венгерского) журнала “Analysis Mathematica” и с начала выхода журнала в 1975 г. до своей кончины Тандори был заместителем главного редактора венгерской секции редколлегии.

Основные работы Тандори относятся к теории ортогональных и тригонометрических рядов и более общих разложений. Его научные результаты отличаются большой глубиной проникновения в суть изучаемых проблем. Он был виртуозным мастером построения “контрпримеров”.

Согласно классической теореме Меньшова–Радемахера ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x), \quad x \in [0, 1], \quad (1)$$

по ортонормированной системе $\{\varphi_n(x)\}$ сходится почти всюду, если его коэффициенты удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \log^2(n+1) < +\infty. \quad (2)$$

При этом Д. Е. Меньшов установил, что в условии (2) множители при a_n^2 нельзя заменить невозрастающими величинами ω_n , для которых $\omega_n = o(\log^2 n)$ при $n \rightarrow \infty$.

В 1957 г. К. Тандори доказал, что если последовательность $\{|a_n|\}$ монотонно убывает, то условие (2) не только достаточно, но и необходимо, для того чтобы ряды (1) с коэффициентами a_n по всем ортонормированным системам сходились почти всюду.

Уточнив указанный результат, Б. С. Кашин доказал, что для любой последовательности $\{a_n\}$, для которой последовательность $\{|a_n|\}$ монотонно убывает и $\sum a_n^2 \log^2 n = +\infty$, найдется такая ортонормированная на $[0, 1]$ система $\{\varphi_n(x)\}$, удовлетворяющая условию $\varphi_n(x) = \pm 1$ почти всюду на $[0, 1]$, что ряд (1) расходится почти всюду.

Затем К. Тандори распространил это утверждение на системы $\{\Phi_n(x)\}$ попарно независимых функций на $[0, 1]$. Именно, он доказал, что для любой последовательности $\{a_n\}$, для которой последовательность $\{|a_n|\}$ монотонно убывает и $\sum a_n^2 \log^2 n = +\infty$, найдется такая система $\{\Phi_n(x)\}$ попарно независимых функций, что ряд $\sum a_n \Phi_n(x)$ расходится почти всюду.

В этом же направлении К. Тандори установил, что всякая возрастающая к бесконечности последовательность $\{\omega_n\}$ такая, что $\omega_n = O(\log^2 n)$, $n \rightarrow \infty$, является точным множителем Вейля для некоторой ортонормированной системы $\{\varphi_n(x)\}$.

Глубокие результаты получены К. Тандори в проблеме о безусловной сходимости ортогональных рядов почти всюду, т.е. о сходимости их почти всюду при любой перестановке членов.

Д. Е. Меньшов доказал, что условие $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{2-\varepsilon} < +\infty$, где $0 < \varepsilon < 2$, достаточно для безусловной сходимости почти всюду ортонормированного ряда (1). Затем В. Орлич ослабил это условие на коэффициенты, а П. Л. Ульянов показал, что условие Орлича равносильно существованию неубывающей последовательности $\{\omega_n\}$ положительных чисел такой, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n \log(n+1)} < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \omega_n \log^2(n+1) < +\infty. \quad (3)$$

К. Тандори доказал окончательность этой теоремы. Именно, если неубывающая последовательность $\{\omega_n\}$ такова, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\omega_n \log(n+1)} = +\infty,$$

то существует ряд (1) по ортонормированной системе, который не сходится безусловно почти всюду на $[0, 1]$, причем второе из условий (3) выполнено.

Отсюда вытекает принципиально важный качественный вывод – не существует точного множителя Вейля для безусловной сходимости почти всюду ортогональных рядов.

Согласно другой теореме Тандори условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=n_k+1}^{n_{k+1}} a_n^2 \log^2 n \right)^{1/2} < +\infty,$$

где $n_k = 2^{2^k}$, достаточно для безусловной сходимости почти всюду рядов (1) по ортонормированным системам, а если последовательность $\{|a_n|\}$ убывает, то это условие и необходимо для безусловной сходимости почти всюду всех рядов (1) с данной последовательностью коэффициентов $\{a_n\}$.

Большой цикл работ К. Тандори посвящен суммируемости ортогональных рядов методами Чезаро.

Д. Е. Меньшов и С. Качмаж доказали, что если коэффициенты ряда (1) по ортонормированной системе удовлетворяют условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\log \log(n+2))^2 < +\infty, \quad (4)$$

то ряд (1) почти всюду $(C, 1)$ -суммируем. При этом Меньшов установил, что в (4) множитель при a_n^2 нельзя заменить на неубывающие величины ω_n , если $\omega_n = o((\log \log n)^2)$ при $n \rightarrow \infty$.

Усилив этот результат, К. Тандори установил, что если последовательность $\{\sqrt{n}|a_n|\}$ не возрастает, то условие (4) также и необходимо для сходимости почти всюду всех рядов (1) по ортонормированным системам.

Тандори нашел необходимое и достаточное условие на последовательность $\{a_n\}$, при котором все ортогональные ряды (1) абсолютно $(C, 1)$ -суммируемы почти всюду. Это условие имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}} a_k^2 \right]^{1/2} < \infty.$$

Существенные результаты получены К. Тандори в вопросе о максимальном порядке роста функций Лебега $L_n(x)$ ортонормированных систем $\{\varphi_k(x)\}$.

Как доказал С. Качмаж, если монотонно возрастающая последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию $\sum \lambda_n^{-2} < +\infty$, то для любой ортонормированной системы $\{\varphi_k(x)\}$ почти всюду справедлива оценка $L_n(x) = o_x(\lambda_n)$ при $n \rightarrow \infty$. Если же система $\{\varphi_k(x)\}$ на множестве $E \subset [0, 1]$ удовлетворяет условию $\sum_{k=1}^n \varphi_k^2(x) = O_x(n)$, то в точках $x \in E$ справедлива оценка $L_n(x) = O_x(\sqrt{n})$.

Тандори доказал, что если монотонно возрастающая последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{-2} = +\infty$, то существует такая ортонормированная на $[0, 1]$ система функций $\{\varphi_k(x)\}$, что для ее функций Лебега $L_n(x)$ почти всюду на $[0, 1]$ выполняются условия

$$L_n(x) = O_x(\lambda_n), \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} L_n(x) \lambda_n^{-1} > 0.$$

После работы А. Н. Колмогорова 1923 г., в которой была построена функция из L , ряд Фурье которой по тригонометрической системе расходится почти всюду, встал вопрос, существуют ли функции из более узких классов, обладающие таким свойством. В 1969 г. Тандори установил, что для любой неубывающей неотрицательной на $[0, \infty)$ функции ψ при условии $\psi(x) = o(x \log \log x)$, $x \rightarrow \infty$, в классе $\psi(L)$ существуют функции с почти всюду расходящимися рядами Фурье. В частности, при каждом $\varepsilon > 0$ классы $L(\log \log L)^{1-\varepsilon}$ содержат функции, ряды Фурье которых расходятся почти всюду (этот последний факт доказали и другие авторы). Только в 1999 г. этот результат Тандори о сходимости почти всюду был улучшен в работе С. В. Конягина.

Из результатов Лебега следует, что для частных сумм $S_n(x)$ тригонометрического ряда Фурье произвольной функции класса L справедлива оценка

$$S_n(x) = o(\log n), \quad n \rightarrow \infty,$$

почти всюду. До сих пор остается открытым вопрос о точности этой оценки.

К. Тандори установил, что для частных сумм рядов Фурье (даже функций класса L^2) по ограниченным в совокупности ортонормированным системам оценка Лебега является точной. Именно, для любой положительной неубывающей последовательности $\{\omega(n)\}$, удовлетворяющей условию

$$\omega(n) = o(\log n), \quad n \rightarrow \infty,$$

найдутся такая ограниченная в совокупности на $[0, 1]$ ортонормированная система $\{\varphi_n(x)\}$ и такая последовательность $\{a_n\} \in l^2$, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\omega(n)} \left| \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right| = +\infty$$

почти всюду на $[0, 1]$.

Кроме того, К. Тандори доказал, что никакая положительная неубывающая последовательность $\{\omega(n)\}$ такая, что

$$\omega(n) = o(\log \log n), \quad n \rightarrow \infty,$$

не может быть почти всюду мажорантой для последовательности (C, α) -средних, $\alpha > 0$, всех рядов Фурье функций класса L^2 по ограниченным в совокупности ортонормированным системам.

Для систем попарно независимых случайных величин $\{X_n\}$ Тандори совместно с С. Чёрго и В. Тотиком установил следующий вариант усиленного закона больших чисел: если

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^2 X_n}{n^2} < \infty, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n E|X_k - EX_k| = O(1), \quad (5)$$

то почти наверное

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (X_k - EX_k) = 0,$$

где EX – математическое ожидание, а DX – дисперсия случайной величины X . При этом второе из условий (5) опустить нельзя. Существенно, что здесь предполагается попарная, а не обычная независимость случайных величин.

Светлая память о талантливом математике, ярком представителе венгерской школы теории ортогональных рядов, исключительно скромном и обаятельном человеке Карое Тандори навсегда сохранится в сердцах всех, кто его знал.

Б. И. Голубов, С. М. Никольский, С. А. Теляковский, П. Л. Ульянов