Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ф. Б. Гусейнов, Б. А. Искендеров, О смешанной задаче для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в цилиндрической по пространственным переменным области, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 07:27:05

О смешанной задаче для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной в цилиндрической по пространственным переменным области

Ф. Б. Гусейнов, Б. А. Искендеров

В данной работе изучена смешанная задача для уравнения Баренблатта–Желтова–Кочиной [1] в многомерной цилиндрической области.

Пусть $R_m(y)$ ($m \geq 1$) – m -мерное евклидово пространство с элементами $y = (y_1, \dots, y_m)$, а $R_n(x)$ ($n \geq 1$) – такое же пространство с элементами $x = (x_1, \dots, x_n)$. Обозначим через $\Pi = R_n(x) \times \Omega$ цилиндрическую область в $R_n(x) \times R_m(y)$, где Ω – ограниченная область в $R_m(y)$ с достаточно гладкой границей.

Пусть $C^{(0,0,0)}(\Pi \times [0, \infty))$ – пространство непрерывных в $\Pi \times [0, \infty)$ функций, а $C^{(\alpha, \beta, \mu)}(\Pi \times [0, \infty))$ – пространство функций, для которых $D_x^\alpha D_y^\beta D_t^\mu u(x, y, t) \in C^{(0,0,0)}(\Pi \times [0, \infty))$. Аналогичным образом определяется пространство $C^{(\alpha, \beta)}(\Pi)$.

Рассмотрим в $\Pi \times (0, \infty)$ следующую задачу:

$$u_t(x, y, t) - \Delta_{n+m} u_t(x, y, t) = \Delta_{n+m} u(x, y, t) \quad (1)$$

с начальным условием

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y) \quad (2)$$

и с краевым условием

$$u(x, y, t)|_{\partial \Pi} = 0, \quad t > 0, \quad (3)$$

где Δ_{n+m} – оператор Лапласа по (x, y) , $\varphi(x, y) \in C^{(2,2)}(\Pi)$, $\partial \Pi = \partial \Omega \times R_n \times (0, \infty)$.

Обозначим через $C_{\gamma_0, \gamma_1}^{(2,2,1)}(\Pi \times [0, \infty))$ пространство функций из $C^{(2,2,1)}(\Pi \times [0, \infty))$, для которых выполняется неравенство

$$\|D_{x_j}^{\alpha_j} D_{y_\nu}^{\beta_\nu} D_t^\mu u(x, y, t)\|_{C(\Pi)} \leq C e^{-\gamma_0 t} \quad (4)$$

равномерно по $y \in \bar{\Omega}$, где $|x|$ – евклидова норма в R_n , $\gamma_0, \gamma_1 > 0$ – некоторые постоянные, $0 \leq \alpha_j \leq 2$, $0 \leq \beta_\nu \leq 2$, $0 \leq \mu \leq 1$ – целые числа и если $\alpha_j + \beta_\nu \neq 0$, $j = 1, \dots, n$, $\nu = 1, \dots, m$, то только одно из этих чисел отлично от нуля.

Через $H_D^\nu(\Omega)$ ($\nu \geq 1$) будем обозначать подпространство пространства Соболева $H^\nu(\Omega)$ [2; с. 252], для элементов которого выполняются условия

$$F(x)|_{\partial \Omega} = 0, \quad \Delta F(x)|_{\partial \Omega} = 0, \quad \dots, \quad \Delta^{\left[\frac{\nu-1}{2}\right]} F(x)|_{\partial \Omega} = 0,$$

где $[\nu]$ обозначает целую часть ν .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Функцию $u(x, y, t)$ будем называть классическим решением задачи (1)–(3), если $u(x, y, t) \in C_{\gamma_0, \gamma_1}^{(2,2,1)}(\Pi \times [0, \infty)) \cap C_{\gamma_0, \gamma_1}^{(1,1,1)}(\bar{\Pi} \times [0, \infty))$ и удовлетворяет уравнению, начальному и граничному условиям в обычном смысле.

ТЕОРЕМА 1. Классическое решение задачи (1)–(3) единственно, если оно существует.

Учитывая оценку (4), совершим преобразование Лапласа по t в задаче (1)–(3). Тогда получим

$$k(1 - \Delta_{n+m})V(x, y, k) = \Delta_{n+m}V(x, y, k) + \varphi(x, y) + \Delta\varphi(x, y), \quad (5)$$

$$V(x, y, k)|_{\partial \Pi} = 0, \quad (6)$$

где $\text{Re } k > 0$.

ТЕОРЕМА 2. Функция Грина задачи (5)–(6) является аналитической функцией от комплексного параметра k в полуплоскости $\operatorname{Re} k \geq 0$, и для нее имеет место разложение

$$G(x, y, z, k) = \frac{i}{4} \frac{(2\pi)^{-\frac{n}{2}}}{k+1} |x|^{1-\frac{n}{2}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \left(\sqrt{\lambda_{\ell} - \frac{k}{k+1}} \right)^{\frac{n}{2}-1} \times H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)} \left(|x| \sqrt{\lambda_{\ell} - \frac{k}{k+1}} \right) \psi_{\ell}(y) \psi_{\ell}(z), \quad (7)$$

где $H_{\frac{n}{2}-1}^{(1)}(z)$ – функция Ханкеля первого рода порядка $\frac{n}{2}-1$, λ_{ℓ} – собственные значения задачи Дирихле для оператора Лапласа, $\psi_{\ell}(y)$ – соответствующие собственные функции.

При $\operatorname{Re} k \geq 0$, $|x| \geq \delta > 0$ ряд в (7) сходится равномерно относительно k и (x, y, z) в каждом компакте из $\mathbb{C}$. Функция Грина допускает аналитическое продолжение в полуплоскость $\operatorname{Re} k < 0$ с особой точкой $k = -1$, с точками ветвления на отрицательной полуоси

$$k_{\ell} = -\frac{\lambda_{\ell}}{\lambda_{\ell}-1}, \quad \ell = 1, 2, \dots,$$

с предельной точкой $k = -1$.

ТЕОРЕМА 3. Если $\operatorname{Re} k \geq 0$, $\partial\Omega \in C^{\left[\frac{n}{2}\right]+2\left[\frac{m}{2}\right]+3}$, $\varphi(\xi, z) \in H_D^{\frac{n}{2}+2\left[\frac{m}{2}\right]+2}(\Omega) \quad \forall \xi$ и

$$\int_{R_n} e^{2\gamma_1|\xi|} \|D_{\xi}^{\alpha} \varphi(\xi, z)\|_{H^{\frac{n}{2}+2\left[\frac{m}{2}\right]+2}(\Omega)}^2 d\xi < \infty,$$

то для решения задачи (5)–(6) имеет место оценка

$$\|D_x^{\alpha} D_y^{\beta} V(x, y, k)\| \leq \frac{C e^{-\gamma_1|x|}}{|k+1|} \left\{ \int_{R_n} e^{2\gamma_1|\xi|} \|D_{\xi}^{\alpha} \varphi(\xi, z)\|_{H^{\frac{n}{2}+2\left[\frac{m}{2}\right]+|\beta|}(\Omega)}^2 d\xi \right\}^{\frac{1}{2}},$$

где C – константа, $0 \leq |\alpha| \leq 2$, $0 \leq |\beta| \leq 1$, $\gamma_1 < |\lambda_1|^{1/2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $|\beta| = \beta_1 + \dots + \beta_m$.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполняются условия теоремы 3. Тогда для решения задачи (1)–(3) имеет место оценка

$$|D_x^{\alpha} D_y^{\beta} D_t^{\beta} u(x, y, t)| \leq C(n) e^{-\gamma_0 t - \gamma_1 |t|} \left(\int_{R_n} e^{2\gamma_1|\xi_1|} \|D_{\xi}^{\alpha} \varphi(\xi, z)\|_{H^{\frac{n}{2}+2\left[\frac{m}{2}\right]+|\beta|}(\Omega)}^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}$$

($0 \leq |\alpha|, |\beta| \leq 2$, $\mu = 0, 1$; $\gamma_0 = \frac{|\lambda_1|}{|\lambda_1-1|} - \delta$, $\gamma_1 < |\lambda_1|^{1/2}$, δ – достаточно малое число).

Список литературы

- [1] Г. И. Баренблатт, Ю. П. Желтов, И. Н. Кочина, Прикл. матем. мех., 24:5 (1960), 852–864. [2] В. П. Михайлов, Дифференциальные уравнения в частных производных, Наука, М., 1976.

Ф. Б. Гусейнов (F. B. Guseinov)

Институт математики и механики НАН Азербайджана

Представлено А. Г. Костюченко

Принято редколлегией

01.12.2005

Б. А. Искендеров (B. A. Iskenderov)

Институт математики и механики НАН Азербайджана

E-mail: bala_iskenderov@mail.az