Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Т. В. Дудникова, О сходимости к равновесию для волновых уравнений в $\mathbb{R}^n$ с нечетным $n \geq 3$, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1707>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 13:34:19

О сходимости к равновесию для волновых уравнений в $\mathbb{R}^n$ с нечетным $n \geq 3$

Т. В. Дудникова

Рассматривается волновое уравнение в $\mathbb{R}^n$, где $n \geq 3$ и нечетно,

$$\begin{cases} \ddot{u}(x, t) = \sum_{j,k=1}^n \partial_j(a_{jk}(x)\partial_k u(x, t)) - a_0(x)u(x, t), & x \in \mathbb{R}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = u_0(x), \quad \dot{u}|_{t=0} = v_0(x). \end{cases} \quad (1)$$

На уравнение (1) накладываются следующие условия **E1**–**E3**.

E1. $a_{jk}(x) = \delta_{jk} + b_{jk}(x)$, где $b_{jk}(x) \in D$; $a_0(x) \in D \equiv C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

E2. $a_0(x) \geq 0$ и выполнено условие гиперболичности: существует $\alpha > 0$ такое, что

$$H(x, k) \equiv \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)k_i k_j \geq \alpha |k|^2, \quad x, k \in \mathbb{R}^n.$$

E3. Условие неловушечности: для $(x(0), k(0)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ с $k(0) \neq 0$ имеем $|x(t)| \rightarrow \infty$, $t \rightarrow \infty$, где $(x(t), k(t))$ – решение следующей гамильтоновой системы:

$$\dot{x}(t) = \nabla_k H(x(t), k(t)), \quad \dot{k}(t) = -\nabla_x H(x(t), k(t)).$$

Обозначим $Y(t) = (Y^0(t), Y^1(t)) \equiv (u(\cdot, t), \dot{u}(\cdot, t))$, $Y_0 = (Y_0^0, Y_0^1) \equiv (u_0, v_0)$. Тогда задача (1) имеет вид

$$\dot{Y}(t) = \mathcal{A}Y(t), \quad t \in \mathbb{R}; \quad Y(0) = Y_0. \quad (2)$$

Здесь через $\mathcal{A}$ обозначается операторнозначная матрица

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ A & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad A = \sum_{j,k=1}^n \partial_j(a_{jk}(x)\partial_k) - a_0(x).$$

Предполагается, что начальные данные Y_0 принадлежат фазовому пространству $\mathcal{H} \equiv H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^n) \oplus H_{\text{loc}}^0(\mathbb{R}^n)$, т.е. пространству Фреше пар $Y \equiv (u(x), v(x))$ действительных функций $u(x)$, $v(x)$ с локальными энергетическими полунормами

$$\|Y\|_R^2 = \int_{|x| < R} (|u(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 + |v(x)|^2) dx < \infty, \quad \forall R > 0.$$

Мы предполагаем, что начальные данные Y_0 – случайная функция с распределением μ_0 . На меру μ_0 накладываются следующие условия **S0**–**S3**.

S0. Мера μ_0 имеет нулевое математическое ожидание, $EY_0(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^n$.

S1. Корреляционные функции меры μ_0 имеют вид

$$Q_0^{ij}(x, y) \equiv \int Y^i(x)Y^j(y) \mu_0(dY) = \begin{cases} q_-^{ij}(x - y), & x_n, y_n < -a, \\ q_+^{ij}(x - y), & x_n, y_n > a. \end{cases}$$

Здесь $q_\pm^{ij}(x - y)$ – корреляционные функции некоторых трансляционно-инвариантных мер $\mu_\pm$ с нулевым средним значением, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $y = (y_1, \dots, y_n)$ и $a > 0$. Заметим, что мера μ_0 не является трансляционно-инвариантной, если $q_-^{ij} \neq q_+^{ij}$.

S2. Справедливы следующие оценки:

$$|D_{x,y}^{\alpha,\beta} Q_0^{ij}(x, y)| \leq \begin{cases} C\nu_d(|x - y|) & \text{при } d = 0, 1, \dots, n-1, \\ C\nu_{n-1}(|x - y|) & \text{при } d = n-1, n, n+1, \end{cases}$$

где $|\alpha| \leq (n-3)/2 + 2 - i$, $|\beta| \leq (n-3)/2 + 2 - j$ и $d = i + j + |\alpha| + |\beta|$, а через ν_d ($d = 0, 1, \dots, n-1$) обозначаются некоторые непрерывные неотрицательные невозрастающие функции на интервале $[0, \infty)$ с конечными интегралами $\int_0^\infty (1+r)^\kappa \nu_d(r) dr < \infty$, где $\kappa = n-4+d$, если $d = 0, 1, 2$, и $\kappa = d-1$, если $d = 3, \dots, n-1$.

Наконец, предполагается, что мера μ_0 удовлетворяет условию перемешивания. Чтобы сформулировать это условие, обозначим через $O(r)$ множество всех пар открытых подмножеств $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ с $\rho(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \geq r$, а через $\sigma_{i\alpha}(\mathcal{A})$, где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ с целыми $\alpha_i \geq 0$, σ -алгебру подмножеств $\mathcal{H}$, порожденную всеми линейными функциоалами

$$Y \mapsto \langle D^\alpha Y^i, \psi \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} D^\alpha Y^i(x) \psi(x) dx, \quad |\alpha| \leq 1 - i, \quad i = 0, 1,$$

где $\psi \in D$ с $\text{supp } \psi \subset \mathcal{A}$. Для $d = 0, 1$ через σ_d обозначим σ -алгебру, порожденную $\sigma_{i\alpha}$ с $i + |\alpha| \geq d$, т.е. $\sigma_d \equiv \bigvee_{i+|\alpha| \geq d} \sigma_{i\alpha}$, $d = 0, 1$. Определим коэффициент перемешивания $\phi_{d_1, d_2}(r)$ с $d_1, d_2 = 0, 1$, вероятностной меры μ_0 на $\mathcal{H}$ (ср. с определением 17.2.2 из [1]) следующим образом:

$$\phi_{d_1, d_2}(r) \equiv \sup_{(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in O(r)} \sup_{\substack{A \in \sigma_{d_1}(\mathcal{A}), B \in \sigma_{d_2}(\mathcal{B}) \\ \mu_0(B) > 0}} \frac{|\mu_0(A \cap B) - \mu_0(A)\mu_0(B)|}{\mu_0(B)}.$$

S3. Мера μ_0 удовлетворяет равномерно сильному условию перемешивания Ибрагимова, т.е. $\phi_{d_1, d_2}(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Более того, справедлива следующая оценка:

$$\phi_{d_1, d_2}(r) \leq C \nu_d^2(r), \quad d = d_1 + d_2, \quad d_1, d_2 = 0, 1.$$

Обозначим через μ_t , $t \in \mathbb{R}$, меру на $\mathcal{H}$, которая является распределением случайного решения $Y(t)$ задачи (2). Пусть $\mathcal{H}^s \equiv H_{\text{loc}}^{1+s}(\mathbb{R}^n) \oplus H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^n)$, где через $H_{\text{loc}}^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in \mathbb{R}$, обозначаются локальные пространства Соболева. Основным результатом является следующая теорема.

ТЕОРЕМА. Пусть выполнены условия **E1–E3** и **S0–S3**. Тогда меры μ_t слабо сходятся при $t \rightarrow \infty$ на пространстве Фреше $\mathcal{H}^{-\varepsilon}$ с любым $\varepsilon > 0$

$$\mu_t \xrightarrow{\mathcal{H}^{-\varepsilon}} \mu_\infty \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad (3)$$

к предельной мере μ_∞ , которая является гауссовской на $\mathcal{H}$.

Для волнового уравнения в $\mathbb{R}^3$ сходимость (3) была доказана в [2], для гармонических кристаллов – в [3] и для уравнения Клейна–Гордона – в [4].

Список литературы

- [1] И. А. Ибрагимов, Ю. В. Линник, *Независимые и стационарно связанные величины*, Наука, М., 1965. [2] T. V. Dudnikova, A. I. Komech, H. Spohn, *Markov Process. Related Fields*, **8**:1 (2002), 43–80; <http://arXiv.org/math-ph/0508044>. [3] T. V. Dudnikova, A. I. Komech, N. J. Mauser, *J. Statist. Phys.*, **114**:3/4 (2004), 1035–1083; <http://arXiv.org/math-ph/0211017>. [4] Т. В. Дудникова, А. И. Комеч, *Теория вероятн. и ее примен.*, **50**:4 (2005), 675–710.

Т. В. Дудникова (T. V. Dudnikova)
Электростальский политехнический институт
E-mail: dudnik@elsite.ru

Представлено Л. Р. Волевичем
Принято редколлегией
01.12.2005