Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. М. Варфоломеев, О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.253.173

26 апреля 2023 г., 06:39:33

О нормальности некоторых эллиптических функционально-дифференциальных операторов второго порядка

Е. М. Варфоломеев

В нелинейных оптических системах с преобразованием поля в двумерной обратной связи возникают различные регулярные периодические явления, которые называют “многолепестковыми волнами” [1], [2]. Эти световые структуры используются в современных компьютерных технологиях для создания оптических аналогов нейронных сетей. Математическая модель указанной системы описывается бифуркацией периодических решений квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения с преобразованием пространственных переменных $g(x)$. В работах [3], [4] эта задача рассматривалась в случае, когда область Q – круг или кольцо, а преобразование g – вращение на некоторый угол θ . Случай, когда область $Q \subset \mathbb{R}^2$ и преобразование g произвольны, рассматривался в работах [5], [6]. В этих статьях предполагалось, что линеаризованный эллиптический функционально-дифференциальный оператор – нормальный. В работе [7] были получены необходимые и достаточные условия нормальности указанного оператора в терминах области $Q \subset \mathbb{R}^n$ и преобразования g . Более общий случай без предположения нормальности линеаризованного эллиптического оператора рассмотрен в работе [8].

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия нормальности линеаризованного оператора в случае двух преобразований пространственных переменных.

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, $n \geq 2$. Пусть g, f – взаимно однозначные преобразования класса C^3 такие, что

$$\begin{aligned} g: V \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow g(V) \subset \mathbb{R}^n, & |J_g(x)| &\neq 0, & x \in V; \\ f: V \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow f(V) \subset \mathbb{R}^n, & |J_f(x)| &\neq 0, & x \in V. \end{aligned}$$

Здесь V – ограниченная область, $\bar{Q} \subset V$, $J_g(x) = [\partial g_i / \partial x_j]_{i,j=1}^n$ – матрица Якоби преобразования g , $|J_g(x)| = |\det J_g(x)|$. Пусть также выполнено $g(Q) \subset Q$ и $f(Q) \subset Q$.

Рассмотрим неограниченный оператор $A_0: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ с областью определения

$$\mathcal{D}(A_0) = \{v \in W_2^2(Q) : Bv = 0\},$$

действующий по формуле $A_0 v = \Delta v$, $v \in \mathcal{D}(A_0)$. Здесь $W_2^k(Q)$ – пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(Q)$ вместе со всеми обобщенными производными до порядка k включительно, $Bv = v|_{\partial Q}$ или $Bv = (\partial v / \partial \nu)|_{\partial Q}$, ν – единичный вектор внутренней нормали к ∂Q в точке $x \in \partial Q$. Как известно, A_0 – самосопряженный оператор. Положим $A: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $A = A_0 + A_1 + A_2$, где A_1, A_2 – линейные ограниченные операторы, определенные на всем пространстве $L_2(Q)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} A_1: L_2(Q) &\rightarrow L_2(Q), & A_1 v(x) &= a_1 v(g(x)), \\ A_2: L_2(Q) &\rightarrow L_2(Q), & A_2 v(x) &= a_2 v(f(x)), \end{aligned}$$

где $a_1 \neq 0$, $a_2 \neq 0$ – вещественные числа.

Оператор A называется нормальным, если $\mathcal{D}(AA^*) = \mathcal{D}(A^*A)$ и $AA^*v = A^*Av$ для любого $v \in \mathcal{D}(A^*A)$. Положим $D(A) = D(A_0)$.

Определим множества $G_g^m = \{x \in Q : g^m(x) \neq x\}$, $m = 1, 2, \dots$. Здесь $g^m(x)$ обозначает преобразование g , примененное m раз. Обозначим $\tilde{G}_g^m = Q \setminus G_g^m$. Будем также записывать суперпозицию преобразований в виде $f g(x)$, $g^{-1} f(x)$ и т. п.

ТЕОРЕМА 1.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 04-01-00256) и Министерства образования и науки РФ (грант № УР.04.01.129).

Основными результатами данной работы являются следующие теоремы.

Пусть $G_g^2 \neq \emptyset$, $G_f^2 \neq \emptyset$. Кроме того, пусть $g(Q) = f(Q) = Q$ и $|a_1| \neq |a_2|$. Тогда для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы:

$$\begin{aligned} g(x) &= Kx + b, & f(x) &= Cx + d, & x &\in Q, \\ gf(x) &= fg(x), & x &\in Q, \end{aligned}$$

где K, C – ортогональные матрицы порядка $n \times n$, $K^2 \neq E$, $C^2 \neq E$, $b, d \in \mathbb{R}^n$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G_g^2 = \emptyset$, $G_f^2 = \emptyset$. Тогда $g(Q) = f(Q) = Q$, а также:

1) если оператор A – нормальный и выполнено $a_1 + a_2 \neq 0$, то

$$\begin{cases} a_1^2(|J_g(x)| - |J_g(x)|^{-1}) + a_2^2(|J_f(x)| - |J_f(x)|^{-1}) = 0, & x \in G_g^1 \cap G_f^1, \\ |J_g(x)| = |J_f(x)| = 1, & x \in Q \setminus (G_g^1 \cap G_f^1); \end{cases}$$

2) если $|J_g(x)| = |J_f(x)| = 1$, $x \in Q$, то A – нормальный самосопряженный оператор.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $G_g^2 \neq \emptyset$, $G_f^2 = \emptyset$. Кроме того, пусть $g(Q) = Q$. Тогда $f(Q) = Q$, и для нормальности оператора A необходимо и достаточно, чтобы

$$\begin{aligned} g(x) &= Kx + b, & |J_f(x)| &= 1, & x &\in Q, \\ gf(x) &= fg(x), & x &\in Q, \end{aligned}$$

где K – ортогональная матрица порядка $n \times n$, $K^2 \neq E$, $b \in \mathbb{R}^n$.

Автор глубоко благодарен профессору А.Л. Скубачевскому за внимание к этой работе и ценные советы.

Список литературы

- [1] М.А. Воронцов, Ю.Д. Думаревский, Д.В. Пруидзе, В.И. Шмальгаузен, *Изв. АН СССР. Сер. физ.*, **52**:2 (1988), 374–376. [2] М.А. Vorontsov, N.G. Iroshnikov, R.L. Abernathy, *Chaos Solitons Fractals*, **4**:8–9 (1994), 1701–1716. [3] А.В. Разгулин, *Журн. вычисл. матем. и матем. физики*, **33**:1 (1993), 69–80. [4] A. V. Razgulin, “Rotational multipetal waves in optical system with 2D feedback”, *Chaos in Optics*, Proc. SPIE, **2039**, ed. R. Roy, 1993, 342–352. [5] А.Л. Скубачевский, *УМН*, **51**:1 (1996), 169–170. [6] A. L. Skubachevskii, *Nonlinear Anal.*, **32**:2 (1998), 261–278. [7] А.Л. Скубачевский, *Функц. анализ и его прил.*, **31**:4 (1997), 60–65. [8] А.Л. Скубачевский, *Дифференц. уравнения*, **34**:10 (1998), 1394–1401.

Е. М. Варфоломеев (E. M. Varfolomeev)
Российский университет дружбы народов
E-mail: varfolomeyev@mail.ru

Представлено Л. Р. Волевичем
Принято редколлегией
26.01.2006