Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Тарасов, Многогранники, не допускающие натуральных разверток, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 185–186

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm171>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:33:10

МНОГОГРАННИКИ, НЕ ДОПУСКАЮЩИЕ НАТУРАЛЬНЫХ РАЗВЕРТОК

А. С. ТАРАСОВ

В настоящее время неизвестно, можно ли разрезать любой выпуклый многогранник по ребрам так, чтобы он развернулся на плоскость в виде самонепересекающегося многоугольника [1], [2]. Аналогичный вопрос имеет место и для невыпуклых многогранников. В случае, когда многогранник имеет неодносвязную грань, отрицательный ответ очевиден. Достаточно легко также привести пример невыпуклого многогранника с односвязными, но не выпуклыми гранями, который не допускает натуральной развертки. Возьмем правильную пирамиду с правильным невыпуклым двенадцатиугольником в основании, углы которого попеременно равны, скажем, 280° и 20° . Тогда если вершина пирамиды проектируется в центр основания, то при разрезании все боковые грани должны быть отрезаны от основания, иначе возникнет самопересечение.

Для случая, когда все грани невыпуклого многогранника являются выпуклыми, вопрос оставался открытым. В настоящей заметке построен пример невыпуклого многогранника с выпуклыми гранями, который не допускает натуральной развертки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Разверткой многогранника M называется множество многоугольников на плоскости с отождествленными (изометрично) границами так, что эта развертка изоморфна внутренней геометрии многогранника [3].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Натуральной разверткой называется развертка, состоящая из одного простого многоугольника (самонепересекающегося), причем стороны многоугольника являются ребрами многогранника M .

ТЕОРЕМА 1. *Существует невыпуклая поллиэдральная сфера с выпуклыми гранями, не допускающая ни одной натуральной развертки.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем единичный куб. От каждой его вершины V_i , $i \in \{1, \dots, 8\}$, отложим на расстоянии $d < 1/2$ на ребрах по точке — A_i^1, A_i^2, A_i^3 . Проведем через эти три точки плоскость. Она отсекает от куба правильную пирамиду. Заменяем эту пирамиду другой правильной пирамидой с тем же основанием, но с плоскими углами при основании $\alpha > 45^\circ$. Вершину новой пирамиды обозначим через B_i , $i \in \{1, \dots, 8\}$. Позднее значения α и d будут уточнены. Получился многогранник M с $8 \times 4 = 32$ вершинами, 60 ребрами и с $6 + 8 \times 3 = 30$ гранями.

Докажем теперь, что этот многогранник не имеет ни одной натуральной развертки. Приведем необходимые свойства многогранника M .

1. Все грани многогранника M выпуклы. Они либо треугольники, либо восьмиугольники (усеченные грани куба).
2. По построению, у восьмиугольных граней все углы равны 135° . Поэтому, так как к вершине A_i^j подходят две восьмиугольные грани и две треугольные, то сумма углов в вершине A_i^j больше $135^\circ + 135^\circ + 2 \times 45^\circ = 360^\circ$.

Покажем что каждая связная реберная развертка должна самопересекаться. Для того чтобы реберная развертка была связной, необходимо и достаточно, чтобы граф Γ ребер многогранника M , по которым производится разрезание, был деревом. Причем граф Γ должен содержать все вершины многогранника M . Напомним, что степень $\deg v$ вершины v в графе Γ называется количеством ребер графа, сходящихся в этой вершине.

Всего вершин в многограннике — 32. Так как граф Γ есть дерево, то количество ребер в графе Γ — 31, а $\sum_{v \in \Gamma} \deg v = 62$. Если в хотя бы одной вершине A_i^j при основании пирамиды $\deg A_i^j = 1$, то, так как сумма при этой вершине больше 360° , развертка имеет самопересечение.

Рассмотрим теперь только такие развертки, что для любой вершины $\deg A_i^j \geq 2$. Сумма $\deg P_i = \sum_{v \in P_i} \deg v$ степеней всех вершин в пирамиде P_i не меньше $7 = 3 \times 2 + 1$.

Каждое ребро разреза, принадлежащее пирамиде P_i , дает вклад в $\deg P_i$, равный 2, а каждое “длинное” ребро (остаток ребра куба), подходящее к пирамиде, если это — ребро разреза, дает

вклад 1. Так как длинных ребер, подходящих к пирамиде, три, то в самой пирамиде должно быть не менее двух ребер разреза.

Предположим, что хотя бы в одной пирамиде P_i имеется лишь два ребра разреза. Тогда $\text{Deg } P_i = 7$, и все подходящие длинные ребра являются ребрами разреза. Так как $\text{Deg } P_i = 7$, то в каждой вершине A_i^j ровно 2 ребра разреза, а в вершине B_i ровно один разрез. Поэтому ребра разреза, принадлежащие пирамиде, противоположны друг другу.

Но тогда, при условии, что $(1 - 2d) \sin(45 + 2\alpha) \geq d/2$, две восьмиугольные грани должны пересекаться. Получаем и в этом случае самопересечение.

Так как граф Γ – дерево, то ни в какой пирамиде не может быть более трех ребер разреза. Иначе бы имелся в пирамиде цикл из ребер Γ .

Итак, осталось рассмотреть случай, когда во всем пирамидах P_i имеется ровно три ребра разреза. Обозначим через l_i количество длинных ребер разреза, подходящих к пирамиде P_i , $i \in \{1, \dots, 8\}$. Тогда $\text{Deg } P_i = l_i + 6$. Поэтому $\sum_i \text{Deg } P_i = \sum l_i + 6 \times 8$. Отсюда $L := \sum_i l_i = \sum \text{Deg } P_i - 48 = 62 - 48 = 14$. Из того, что граф Γ связан следует, что $l_i \geq 1$.

Так как $\sum_i l_i = 14 \geq 16$, то хотя бы для одного i $l_i = 1$. Рассмотрим поведение развертки около пирамиды P_i с $l_i = 1$. Пусть этот разрез подходит к вершине A_i^1 .

При развертывании восьмиугольных граней вершины A_i^2, A_i^3 и $A_i^{1'}, A_i^{1''}$ образуют квадрат (так как разрез проходит по A_i^1 , эта точка появляется дважды).

Так как развертка связна, то к одному из трех отрезков – $A_i^{1'} A_i^2, A_i^2 A_i^3, A_i^3 A_i^{1''}$ – должна примыкать боковая грань пирамиды. Если $\text{tg } \alpha > 2$, то боковая грань может примыкать без самопересечения только к стороне $A_i^2 A_i^3$. Однако тогда две другие боковые грани пирамиды пересекают восьмиугольные грани.

Таким образом, многогранник M не имеет натуральной развертки, если d и α удовлетворяют упоминавшимся ранее условиям

$$\begin{aligned} d &< \frac{1}{2}, \\ \alpha &> 45^\circ, \\ (1 - 2d) \sin(45 + 2\alpha) &\geq d/2, \\ \text{tg } \alpha &> 2. \end{aligned}$$

Очевидно, что при достаточно маленьком d и при α , достаточно близком к 90 градусам, все четыре условия выполняются.

Аналогичные примеры невыпуклых многогранников можно строить на других выпуклых многогранниках, отличных от куба. Для этого выпуклый многогранник должен удовлетворять следующим условиям.

1. Во всех вершинах должно сходиться по три ребра.
2. В каждой вершине сходятся три угла: α, β, γ такие, что $\alpha + \beta + \gamma \geq 180^\circ + \max\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Автор выражает благодарность Н. П. Долбилину за постановку задачи и Н. Г. Мошевитину за внимание к данной работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Shephard G. G. Abstracts of the conference Discrete Geometry // Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1991. [2] Fukuda K. Abstracts of the conference Discrete Geometry // Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1997. P. 27–28. [3] Александров А. Д. Выпуклые многогранники. М.–Л.: Гостехиздат, 1950.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
23.04.1999