Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, Функциональные уравнения, определяющие умножение в непрерывном базисе Кричевера–Новикова, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 1, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1717>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 10:18:05

Функциональные уравнения, определяющие умножение в непрерывном базисе Кричевера–Новикова

В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин

Пусть R – кольцо мероморфных функций на $\mathbb{C}^n$. Рассмотрим R -модуль M с базисом $\{E_{(i,u)}\}$, занумерованным парами (i, u) , где $i \in \mathbb{Z}_+$ и $u \in \mathbb{C}^n$ (предполагается, что $E_{(i,u)}$ гладко зависит от u). Для данного натурального g зададим операцию

$$E_{(i,u)} * E_{(j,v)} = \sum_{k=0}^{g+i+j} C_{(i,u),(j,v)}^{(k,u+v)} E_{(k,u+v)}, \quad C_{(i,u),(j,v)}^{(g+i+j,u+v)} \neq 0, \quad i, j \geq 0. \quad (1)$$

Условие ассоциативности операции $*$ приводит к системе функциональных уравнений на $C_{(i,u),(j,v)}^{(k,u+v)}$ как функции векторных переменных $u, v, w = u + v$:

$$\sum_{\ell=0}^{Q_1(m)} C_{(j,v),(k,w)}^{(\ell,v+w)} C_{(i,u),(l,v+w)}^{(m,u+v+w)} = \sum_{\ell=0}^{Q_2(m)} C_{(i,u),(j,v)}^{(\ell,u+v)} C_{(\ell,u+v),(k,w)}^{(m,u+v+w)}, \quad 0 \leq m \leq Q, \quad (2)$$

где $Q = 2g + i + j + k$, $Q_1(m) = \min(Q - m, g + j + k)$ и $Q_2(m) = \min(Q - m, g + i + j)$.

Пусть D_w – линейный дифференциальный оператор с гладкими по w коэффициентами. Далее мы будем предполагать, что базисные элементы связаны условием

$$E_{(i+1,u)} = D_u E_{(i,u)}, \quad i \geq 0. \quad (3)$$

Из определений вытекает соотношение $E_{(i,u)} * E_{(j,v)} = D_u^i D_v^j (E_{(0,u)} * E_{(0,v)})$. Положим $E(u) = E_{(0,u)}$ и введем линейный дифференциальный оператор $L_{u,v}^w = \sum_{k=0}^g a_k(u, v) D_w^k$ такой, что $E(u) * E(v) = L_{u,v}^w E(w)|_{w=u+v}$. Ясно, что $a_k(u, v) = C_{(0,u),(0,v)}^{(k,u+v)}$, $k = 1, \dots, g$.

Из построения видно, что задание пары $(L_{u,v}^w, D_w)$ однозначно определяет $*$. Коммутативность $*$ означает, что $a_k(u, v) = a_k(v, u)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть D_w – линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами. Тогда пара $(L_{u,v}^w, D_w)$ задает ассоциативное умножение $*$ тогда и только тогда, когда

$$L_{u,v}^v L_{u+v,w}^v - L_{v,w}^v L_{u,v+w}^v = 0. \quad (4)$$

Случай $D_w = \partial/\partial w_1$ важен для задачи об умножении в непрерывном базисе Кричевера–Новикова [1].

Положим $A_{i,k}^j(u, v, w) = a_i(u, v) D_v^j a_k(u + v, w) - a_i(v, w) D_v^j a_k(u, v + w)$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $D_v = \partial/\partial v_1$, тогда (4) представляет собой систему функциональных уравнений $\{K_i = 0 \mid 0 \leq i \leq 2g\}$ относительно функций $a_0(u, v), \dots, a_g(u, v)$, где

$$K_i = \sum_{j=\max(0, i-g)}^{\min(g, i)} \sum_{k=j}^g \binom{k}{j} A_{k-i-j}^{k-j}(u, v, w).$$

Уравнение $K_{2g} = 0$ – это мультипликативное уравнение коцикла:

$$a_g(u, v) a_g(u + v, w) - a_g(u, v + w) a_g(v, w) = 0.$$

Его общее решение имеет вид $a_g(u, v) = b(u)b(v)/b(u + v)$. Преобразование $E(u) \rightarrow \widehat{E}(u) = b(u)E(u)$ индуцирует преобразование $L_{u,v}^w \rightarrow \widehat{L}_{u,v}^w$ такое, что $\widehat{a}_g = 1$. Поэтому далее мы будем считать, что $a_g(u, v) = 1$.

Пусть δ_1 и δ_2 – дифференциалы в стандартном коцепном комплексе функций, а именно, $(\delta_1 a)(u, v) = a(u) + a(v) - a(u + v)$ и $(\delta_2 a)(u, v, w) = -a(u + v, w) + a(v, w) + a(u, v + w) - a(u, v)$. Уравнения $K_{g+j} = 0$ при $0 \leq j < g$ записываются в следующем виде: $(\delta_2 a_j)(u, v, w) = \sum_{k=0}^{g-j-1} \sum_{\ell=0, k+\ell>0}^{g-j-k} \binom{j+k+\ell}{j+k} A_{j+k+\ell, g-k}^\ell(u, v, w)$. Так как $\delta_2 \delta_1 = 0$,

то, ввиду линейности оператора δ_2 , общее решение системы $\{K_{g+j} = 0 \mid 0 \leq j < g\}$ зависит от g произвольных функций $h_1(u), \dots, h_g(u)$ из R .

ТЕОРЕМА 3. Пусть $h_1(u), \dots, h_g(u)$ – дифференцируемые функции, $u \in \mathbb{C}^n$. Тогда рекуррентные формулы

$$a_{g-k}(u, v) = (\delta_1 h_k)(u, v) + \sum_{\ell=1}^{k-1} h_\ell(u) h_{k-\ell}(v) - \sum_{\ell=0}^{k-1} \sum_{m=1}^{k-\ell-1} \binom{g-\ell}{k-\ell-m} a_{g-\ell}(u, v) D_v^{(k-\ell-m)} h_m(u+v) \quad (5)$$

при $k = 1, \dots, g$ дают общее решение системы $\{K_{g+j} = 0 \mid 0 \leq j < g\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $\Psi(\xi, u) = \xi^{-g} \exp\{u_1/\xi\} \sum_{i \geq 0} h_i(u) \xi^i$, где $h_0(u) = 1$. Используем функцию $\Psi(\xi, u)$ как модель генератора базиса $E(u)$ и обычное умножение как модель ассоциативной и коммутативной операции $*$. Формула умножения $\Psi(\xi, u) \Psi(\xi, v) = L_{u,v}^v \Psi(\xi, u+v)$ должна быть справедлива при всех значениях ξ , следовательно, функции $a_i(u, v)$, $0 \leq i < g$, и $h_j(u)$, $j > 0$, должны быть связаны системой соотношений $\mathcal{B} = \{B_s = 0 \mid s > 0\}$, где

$$B_s = \left(\sum_{j=q(s)}^g \sum_{k=j}^g \binom{k}{j} a_k(u, v) D_v^{k-j} h_{s+j-g}(u+v) \right) - \sum_{\ell=0}^s h_\ell(u) h_{s-\ell}(v)$$

и $q(s) = \max(0, g-s)$. Взяв систему $\mathcal{B}_1 = \{B_s = 0 \mid s \leq g\}$, получаем в точности систему (5). Теорема доказана.

С учетом (5) система уравнений $\mathcal{B}_1 = \{B_s = 0 \mid s > g\}$ принимает вид $(\delta_1 h_j)(u, v) = F_j(h_k, k < j)$ и тем самым определяет коэффициенты $h_j(u)$, $j > g$, как функции от $h_1(u), \dots, h_g(u)$. С другой стороны, подставляя (5) в K_i из следствия 2, мы получаем систему функциональных уравнений $\tilde{K} = \{K_j = 0 \mid 0 \leq j < g\}$ относительно $h_1(u), \dots, h_g(u)$.

ТЕОРЕМА 4. Условия $\delta_2 F_j(h_k, k < j) = 0$ совместности системы $\mathcal{B}_1$ вытекают из системы $\tilde{K}$.

Пусть $p(\tilde{u}, t)$ – некоторая функция, линейная по $\tilde{u} = (u_2, \dots, u_n)$ и полиномиальная по t степени не выше $(2g-1)$.

СЛЕДСТВИЕ 5. Функция $\phi(\xi, u) = \xi^{-g} \exp\{u_1/\xi\} (1 + \sum_{k=1}^g \eta_k(u) \xi^k)$ является (с точностью до множителя $\exp(\tilde{u}, \xi^{-1})$) ростком функции из непрерывного базиса Кричевера–Новикова на некоторой плоской алгебраической кривой рода не выше g тогда и только тогда, когда набор функций $\{h_k(u) = \eta_k(u)\}$, $k = 1, \dots, g$, удовлетворяет системе функциональных уравнений $\tilde{K}$.

Теоремы сложения из [2] позволяют эффективно строить явные решения системы $\tilde{K}$.

Список литературы

- [1] P.G. Grinevich, S.P. Novikov, *Comm. Pure Appl. Math.*, **56:7** (2003), 956–978; <http://arXiv.org/math-ph/0111039>. [2] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Труды МИАН*, **251** (2005), 1–72.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: buchstab@mendeleev.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
19.12.2005

Д. В. Лейкин (D. V. Leikin)
Институт магнетизма, Киев, Украина,
Manchester Institute for Mathematical Sciences, UK
E-mail: dile@imag.kiev.ua