Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Д. Тюрина, Диаграммные формулы типа Виро–Поляка для инвариантов конечного порядка, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 187–188

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm172>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:08:48

ДИАГРАММНЫЕ ФОРМУЛЫ ТИПА ВИРО–ПОЛЯКА ДЛЯ ИНВАРИАНТОВ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

С. Д. Тюрин

Большинство работ по современной теории инвариантов узлов посвящено описанию структуры пространства инвариантов конечного типа в целом и изучению аналитической и комбинаторной структуры универсального инварианта Васильева. В настоящее время известны несколько явных формул, с помощью которых можно вычислять базисные инварианты второго и третьего порядков по диаграмме узла – это формулы Ж. Ланна (см. [1]) и М. Поляка и О. Виро (см. [2]). В [2] авторы получили также диаграммную формулу для аддитивного четного инварианта четвертого порядка V_4^1 .

В настоящей заметке получена диаграммная формула для двух базисных инвариантов четвертого порядка, которые вместе с инвариантом V_4^1 образуют базис в пространстве инвариантов Васильева порядка 4.

Инварианты Васильева конечного порядка. Мы будем рассматривать ориентированные узлы $K: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – гладкие вложения окружности S^1 в пространство $\mathbb{R}^3$ и сингулярные узлы $K^{\text{sing}}: S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ – погружения, допускающие конечное число двойных точек трансверсального самопересечения. Любой инвариант узла можно распространить индуктивно на сингулярные узлы по формуле:

$$f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \\ \searrow \\ \nearrow \end{array}\right) - f\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \\ \searrow \end{array}\right).$$

Инвариант f , принимающий нулевое значение на любом сингулярном узле с числом двойных точек, большим n , называется *инвариантом Васильева порядка не выше n* .

Хордовой диаграммой D_n порядка n называется ориентированная окружность S^1 с выделенным набором из n неупорядоченных пар точек, рассматриваемых с точностью до диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ее ориентацию. Обозначим через $\mathcal{D}_n$ пространство хордовых диаграмм, состоящее из формальных линейных комбинаций хордовых диаграмм с рациональными коэффициентами.

Весовой системой называется гомоморфизм $W: \mathcal{D}_n \rightarrow \mathbb{Q}$, который удовлетворяет двум линейным соотношениям: одночленному и четырехчленному (см. [3]).

Каждому инварианту f порядка n со значениями в $\mathbb{Q}$ можно сопоставить гомоморфизм $W_f: \mathcal{D}_n \rightarrow \mathbb{Q}$ по формуле $W_f = f|_{\mathcal{H}_n^{\text{sing}}}$. Этот гомоморфизм W_f является весовой функцией.

Диаграммой Гаусса G узла K называется ориентированная окружность с отмеченными на ней прообразами двойных точек плоской проекции этого узла. Каждая пара точек соединена стрелкой, направленной от прообраза верхней ветви узла к прообразу нижней. Эта стрелка наделяется знаком в зависимости от типа перекрестка в двойной точке диаграммы узла, соответствующего этой стрелке. Знак диаграммы определяется как произведение знаков ее стрелок.

Формула типа Виро–Поляка для инварианта Васильева четвертого порядка.

Пусть K – некоторый узел и G – его диаграмма Гаусса. Зафиксируем A – поддиаграмму G . Обозначим через $\langle A, G \rangle$ сумму знаков всех поддиаграмм G , имеющих комбинаторный тип A . По определению для целочисленной формальной линейной комбинации поддиаграмм $\sum_{i=1}^k n_i A_i$ выполняется равенство: $\langle \sum_{i=1}^k n_i A_i, G \rangle = \sum_{i=1}^k n_i \langle A_i, G \rangle$.

ТЕОРЕМА.

Пусть W_4 – произвольная весовая система 4-го порядка, принимающая нулевое значение на хордовой диаграмме . Тогда следующая формула задает инвариант Васильева 4-го порядка:

$$\begin{aligned}
 V_4(K) = & \frac{1}{2}W_4(\text{diag}_1)(\text{diag}_2, G) \\
 & + \frac{1}{4}W_4(\text{diag}_3)(\text{diag}_4 + \text{diag}_5, G) \\
 & + \frac{1}{2}W_4(\text{diag}_6)(\text{diag}_7 + \text{diag}_8, G) \\
 & + \frac{1}{4}W_4(\text{diag}_9)(\text{diag}_{10} + \text{diag}_{11} + \text{diag}_{12} + \text{diag}_{13}, G) \\
 & + \frac{1}{4}W_4(\text{diag}_{14})(\text{diag}_{15} + \text{diag}_{16} + \text{diag}_{17} + \text{diag}_{18}, G) \\
 & + \frac{1}{4}W_4(\text{diag}_{19})(\text{diag}_{20} + \text{diag}_{21}, G),
 \end{aligned}$$

где G – диаграмма Гаусса узла K .

Доказательство заключается в проверке независимости правой части при движениях Рейдемейстера.

В качестве W_4 рассмотрим две весовые системы, удовлетворяющие условию теоремы. Соответствующие инварианты обозначим через V_4^2 и V_4^3 . Вместе с V_4^1 (см. [2; теорема 4]) эти инварианты образуют базис в пространстве инвариантов четвертого порядка.

Интеграл Концевича дает разложение любого узла в пополнении алгебры хордовых диаграмм. Дуализируя полученные формулы для инвариантов Васильева и сравнивая их с однородными слагаемыми ряда Концевича, можно получить комбинаторные формулы, дающие значения интегрированных интегралов от логарифмических форм вида $\omega_{ij} = \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lannes J. // Enseign. Math. 1993. V. 39. P. 295–316. [2] Polyak M., Viro O. // Internat. Math. Res. Notices. 1994. V. 11. P. 445–453. [3] Васильев В. А. Топология дополнений к дискриминантам. М.: ФАЗИС, 1997. [4] Kontsevich M. // Adv. Soviet Math. 1993. V. 16. P. 137–150.

Коломенский педагогический институт
E-mail: ktti@koloma.ru

Принято редколлегией
23.04.1999