Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Бунина, Элементарные свойства групп Шевалле над локальными кольцами, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1723>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.93.64.190

26 апреля 2023 г., 11:47:26

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Элементарные свойства групп Шевалле над локальными кольцами

Е. И. Бунина

Первые результаты о связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были получены А. И. Мальцевым в 1961 г. в работе [1]. Он доказал, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ (где $G = GL, SL, PGL, PSL$, $n, m \geq 3$, K, L – поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Изучение этих вопросов было продолжено в 1992 г., когда с помощью конструкции ультрарастворения и теоремы об изоморфизме [2] К. И. Бейдар и А. В. Михалев [2] сформулировали общий подход к проблемам элементарной эквивалентности различных алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева на случай, когда K и L – тела и ассоциативные кольца.

В 1998–2004 гг. Е. И. Бунина продолжила изучение некоторых проблем этого типа (см. [4]–[7]). Она обобщила результаты А. И. Мальцева для унитарных линейных групп над телами и ассоциативными кольцами с инволюциями, а также для групп Шевалле над полями.

Последними результатами об элементарных свойствах групп Шевалле является обобщение теорем, полученных в работе [7] для групп Шевалле над полями, для случая групп Шевалле над локальными кольцами.

Кольцо R называется *локальным*, если оно содержит ровно один максимальный идеал.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $G_\pi(\Phi, R)$ и $G_{\pi'}(\Phi', R')$ (или $E_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\pi'}(\Phi', R')$) – две (элементарные) группы Шевалле над бесконечными коммутативными локальными кольцами R и R' , у которых поля вычетов $R/\text{Rad } R$ и $R'/\text{Rad } R'$ имеют характеристику, отличную от двух (а в случае системы корней G_2 – отличную от трех), Φ, Φ' – неприводимые системы корней. Тогда из элементарной эквивалентности этих групп Шевалле следует, что $\Phi \cong \Phi'$ и $R \equiv R'$.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Сначала мы показываем, что в группах Шевалле над локальными кольцами соответствующие элементарные подгруппы Шевалле являются формульными, и поэтому из элементарной эквивалентности групп Шевалле следует элементарная эквивалентность соответствующих элементарных групп Шевалле.

Далее, имея две элементарно эквивалентные элементарные группы Шевалле, мы переходим к двум элементарно эквивалентным присоединенным элементарным группам Шевалле. Имея присоединенную элементарную группу Шевалле над локальным кольцом R , мы показываем формульность подгруппы $E_{ad}(\Phi, R, \text{Rad } R)$, и переходим

к факторгруппе $E_{ad}(\Phi, R)/E_{ad}(\Phi, R, \text{Rad } R) \cong E_{ad}(\Phi, R/\text{Rad } R)$, являющейся элементарной присоединенной группой Шевалле над полем. Имея две элементарно эквивалентные присоединенные группы Шевалле над полями, мы можем воспользоваться работой [7] и сказать, что их системы корней изоморфны.

Чтобы доказать элементарную эквивалентность колец R_1 и R_2 при условии элементарной эквивалентности групп $E_{ad}(\Phi, R_1)$ и $E_{ad}(\Phi, R_2)$, мы пользуемся теоремой Кейслера–Шелаха об изоморфизме [2].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = G_\pi(\Phi, R)$ и $G' = G_{\pi'}(\Phi, R')$ (или $E_\pi(\Phi, R)$ и $E_{\pi'}(\Phi, R')$) – две (элементарные) группы Шевалле над элементарно эквивалентными локальными кольцами R и R' , где представления π и π' имеют изоморфные решетки. Тогда группы G и G' элементарно эквивалентны.

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Данная теорема доказывается с использованием разложения Гаусса для групп Шевалле над локальными кольцами.

Список литературы

- [1] А. И. Мальцев, *Некоторые проблемы математики и механики*, Изд-во СО АН СССР, Новосибирск, 1961, 110–132. [2] Г. Кейслер, Ч. Ч. Чэн, *Теория моделей*, Мир, М., 1977. [3] С. I. Beidar, A. V. Mikhalev, *Contemp. Math.*, **131** (1992), 29–35. [4] Е. И. Бунина, *Фундам. прикл. матем.*, **4**:4 (1998), 1265–1278. [5] Е. И. Бунина, *УМН*, **53**:2 (1998), 137–138. [6] Е. И. Бунина, *УМН*, **56**:1 (2001), 157–158. [7] Е. И. Бунина, *УМН*, **59**:5 (2004), 141–142.

Е. И. Бунина (E. I. Bunina)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: helenbunina@yandex.ru

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией
03.02.2006