Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Классификация многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1724>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 16:01:42

Классификация многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа

О. И. Мохов

В данной работе решена хорошо известная проблема Дубровина–Новикова, поставленная еще в 1984 г., – проблема классификации многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа, т.е. скобок Пуассона вида

$$\{u^i(x), u^j(y)\} = \sum_{\alpha=1}^n (g^{ij\alpha}(u(x))\delta_{\alpha}(x-y) + b_k^{ij\alpha}(u(x))u_{\alpha}^k(x)\delta(x-y)), \quad (1)$$

где $u = (u^1, \dots, u^N)$ – локальные координаты на некотором гладком N -мерном многообразии M или в области $\mathbb{R}^N$, $x = (x^1, \dots, x^n)$, $y = (y^1, \dots, y^n)$ – независимые переменные, $g^{ij\alpha}(u)$, $b_k^{ij\alpha}(u)$ – гладкие функции локальных координат $(u^1, \dots, u^N)$, $1 \leq i, j, k \leq N$, $1 \leq \alpha \leq n$, $u(x) = (u^1(x), \dots, u^N(x))$ – гладкие функции (поля) n независимых переменных $x^1, \dots, x^n$ со значениями в многообразии M , $u_{\alpha}^k(x) = \partial u^k / \partial x^{\alpha}$. Скобки Пуассона вида (1) были введены Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым в [1] (одномерный случай $n = 1$) и [2] (многомерный случай) в связи с гамильтоновой теорией систем гидродинамического типа. В [1] получена полная классификация невырожденных одномерных скобок Пуассона вида (1), а в [2] поставлена задача классификации многомерных скобок Пуассона вида (1) и предпринята попытка получить классификацию этих скобок в первом нетривиальном случае $n = N = 2$ (в [3] было показано, что этот результат работы [2] ошибочен). Классификация двухкомпонентных ($N = 2$, n – любое) невырожденных скобок Пуассона вида (1) получена автором в [3], где получена также классификация для $1 \leq N \leq 4$, для чего пришлось развить мощный алгебраический аппарат. Решить задачу для произвольного числа компонент N алгебраическими методами пока не удастся. В данной работе дифференциально-геометрическими методами получена классификация всех неособых невырожденных многомерных скобок Пуассона вида (1) для любого n и для любого числа компонент N . Напомним, что класс скобок вида (1) инвариантен относительно локальных замен координат $(u^1, \dots, u^N)$. При этом коэффициенты скобки $g^{ij\alpha}(u)$ и $b_k^{ij\alpha}(u)$ преобразуются как дифференциально-геометрические объекты. Для любой скобки (1) коэффициенты $g^{ij\alpha}(u)$, $1 \leq \alpha \leq n$, являются контравариантными тензорами на многообразии M . Если $\det(g^{ij\alpha}(u)) \neq 0$ для всех α , то скобка (1) называется *невырожденной*. В невырожденном случае можно ввести коэффициенты $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ по формулам $b_k^{ij\alpha}(u) = -g^{is\alpha}(u)\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$. При этом коэффициенты $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ преобразуются как коэффициенты аффинной связности на многообразии M . Для любой многомерной скобки Пуассона вида (1) для каждого α соответствующее слагаемое в правой части формулы (1) является одномерной скобкой Пуассона гидродинамического типа и в силу теоремы Дубровина–Новикова для невырожденных одномерных скобок Пуассона вида (1) [1] все невырожденные тензоры $g^{ij\alpha}(u)$ симметричны и являются плоскими метриками (метриками нулевой римановой кривизны), а каждая соответствующая аффинная связность $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ согласована со своей метрикой $g^{ij\alpha}(u)$ и имеет нулевое кручение и нулевую риманову кривизну, т.е. аффинная связность $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ является связностью Леви-Чивиты и однозначно определяется плоской метрикой $g^{ij\alpha}(u)$. Таким образом, любая невырожденная скобка Пуассона вида (1) однозначно определяется плоскими метриками $g^{ij\alpha}(u)$, которые в многомерном случае связаны дополнительными жесткими ограничениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 03-01-00782 и 05-01-00170) и программы поддержки ведущих научных школ (грант № 2185.2003.1).

ТЕОРЕМА 1 [3]. Плоские невырожденные метрики $g^{ij\alpha}(u)$ определяют многомерную скобку Пуассона вида (1) тогда и только тогда, когда выполнены соотношения 1) $T^{ijk\alpha\beta}(u) = T^{kji\alpha\beta}(u)$, 2) $\sum_{(i,j,k)} T^{ijk\alpha\beta}(u) = 0$, 3) $T^{ijs\alpha\beta}(u)T_{st}^{r\alpha\beta}(u) = T^{irs\alpha\beta}(u)T_{st}^{j\alpha\beta}(u)$, 4) $\nabla_r^\alpha T^{ijk\alpha\beta}(u) = 0$, где $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u) = \Gamma_{jk}^{i\beta}(u) - \Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$ – препятствующий тензор, $T^{ijk\alpha\beta}(u) = -g^{ks\beta}(u)g^{ira}(u)T_{rs}^{j\alpha\beta}(u)$, знак $\sum_{(i,j,k)}$ означает суммирование по всем циклическим перестановкам индексов (i, j, k) , ∇_r^α – ковариантная производная, задаваемая связностью $\Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$, $\Gamma_{jk}^{i\alpha}(u)$ – связность Леви-Чивиты, порождаемая метрикой $g^{ij\alpha}(u)$.

Тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta}(u)$ являются препятствиями к приведению невырожденных многомерных скобок Пуассона вида (1) к постоянному виду, т.е. невырожденная скобка Пуассона вида (1) приводится локальной заменой координат к постоянной скобке тогда и только тогда, когда все препятствующие тензоры $T^{ijk\alpha\beta}(u)$ тождественно равны нулю. Напомним, что две псевдоримановы контравариантные метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называются согласованными, если для любой линейной комбинации этих метрик $g^{ij}(u) = \lambda_1 g_1^{ij}(u) + \lambda_2 g_2^{ij}(u)$, где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, коэффициенты соответствующих связностей Леви-Чивиты и компоненты соответствующих тензоров римановой кривизны связаны тем же самым линейным соотношением: $\Gamma_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 \Gamma_{kl}^{ij}(u) + \lambda_2 \Gamma_{kl}^{ij}(u)$, $R_{kl}^{ij}(u) = \lambda_1 R_{kl}^{ij}(u) + \lambda_2 R_{kl}^{ij}(u)$ [4]. Теория согласованных метрик построена в работе автора [4].

ТЕОРЕМА 2 [5]. Метрики $g^{ij\alpha}(u)$, определяющие многомерную скобку Пуассона вида (1), согласованы.

Пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ называется неособой, если собственные значения этой пары метрик, т.е. корни уравнения $\det(g_1^{ij}(u) - \lambda g_2^{ij}(u)) = 0$, различны (ситуация пары метрик общего положения).

ТЕОРЕМА 3 [4]. Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то эти метрики согласованы тогда и только тогда, когда тензор Нейенхейса аффинора $v_j^i(u) = g_1^{is}(u)g_{2,sj}(u)$ тождественно равен нулю ($g_{2,sj}(u)$ – ковариантная метрика: $g_2^{is}(u)g_{2,sj}(u) = \delta_j^i$).

В этом случае существуют локальные координаты, в которых аффинор $v_j^i(u)$ является диагональным. В этих локальных координатах обе метрики $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ также обязаны быть диагональными. Более того, имеет место следующая важная теорема.

ТЕОРЕМА 4 [4]. Если пара метрик $g_1^{ij}(u)$ и $g_2^{ij}(u)$ является неособой, то эти метрики согласованы тогда и только тогда, когда существуют локальные координаты $u = (u^1, \dots, u^N)$ такие, что $g_2^{ij}(u) = g^i(u)\delta^{ij}$ и $g_1^{ij}(u) = f^i(u^i)g^i(u)\delta^{ij}$, где $f^i(u^i)$, $i = 1, \dots, N$, – функции одной переменной.

ТЕОРЕМА 5. Если для невырожденной многомерной скобки Пуассона вида (1) одна из метрик $g^{ij\alpha}(u)$ образует неособые пары со всеми остальными метриками скобки, то эта скобка Пуассона приводится к постоянному виду локальной заменой координат.

Список литературы

- [1] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **270**:4 (1983), 781–785.
 [2] Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **279**:2 (1984), 294–297. [3] О. И. Мохов, Функци. анализ и его прил., **22**:4 (1988), 92–93. [4] О. И. Мохов, Функци. анализ и его прил., **35**:2 (2001), 24–36. [5] О. И. Мохов, Симплектическая и пуассонова геометрия на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые уравнения, ИКИ, М.–Ижевск, 2004.

О. И. Мохов (O. I. Mokhov)

Центр нелинейных исследований

при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

E-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@bk.ru

Представлено С. П. Новиковым

Принято редколлегией

21.12.2005