Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Г. Ильюта, Ряд Ньютона, правило Лейбница и функции конечного порядка, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 189–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1725>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 12:32:08

Ряд Ньютона, правило Лейбница и функции конечного порядка

Г. Г. Ильюта

Схему использования введенных Ю. И. Маниным и В. В. Шехтманом высших порядков Брюа $B(n, k)$ для кодирования стратов, связанных с интерполяцией конфигурационных пространств [1], можно обобщить следующим образом: для набора элементов $A = \{a_1, a_2, \dots\}$ вещественной алгебры L и линейного функционала r на ней поставим в соответствие каждому $b \in L$ набор знаков $A_r(b) = (\text{sign } r(ba_1), \text{sign } r(ba_2), \dots)$. Линейные соотношения между a_i приводят к соотношениям между $r(ba_i)$, которые налагают условия на $A_r(b)$: если сумма равна 0, то среди ненулевых слагаемых есть положительные и отрицательные. Наборы знаков из $B(n, k)$ получаются для алгебры функций одной переменной, функционала разделенных разностей (р.р.) в $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ и $A = \{(x - x_{i_1}) \cdots (x - x_{i_{n-k+1}}) : i_1, \dots, i_{n-k+1} \in \bar{n} = \{1, \dots, n\}\}$. Мы изучаем частный случай этой конструкции, связанный с обобщением интерполяционного ряда и р.р. Ньютона

$$g(Y) = c_0 + \sum_{i \geq 1} c_i \prod_{1 \leq j \leq i} u(Y, x_j), \quad \Delta[f(Y); X_n] = \sum_I f(X_I) \Big/ \prod_{j \in \bar{n} \setminus I} u(X_I, x_j),$$

где $Y = \{y_1, \dots, y_k\}$, $u(Y, y) : S^{k+1} \rightarrow F$ (S – множество, F – поле), $f : S^k \rightarrow F$, $c_i \in F$, $X_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset F$, x_i различны, I – k -подмножество в $\bar{n}$, $X_I = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ (случай $u = \det$ рассматривался в [2]). А именно, мы получим обобщенное правило Лейбница для р.р. и приведем простейшие вытекающие из него соотношения для р.р., построенных по функции конечного порядка (аналогия с инвариантами Васильева уточняется ниже). Мы обобщаем р.р. как линейную комбинацию значений функции. Аналогично можно использовать в качестве r обобщения других представлений р.р.: вычет, композиции кратного интеграла и дифференциального оператора, линейно зависящий от b определитель. Также обобщается факт из [1], согласно которому чередуют знак взятые в критических точках р.р. многочлена с вещественными корнями.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1 (правило Лейбница). Пусть $X_{k,n} = X_n \cup \{x_{1-k}, \dots, x_{-1}\}$ и для $i \leq k$ выполнено $u(Y, y_{k+1})|_{y_i=y_{k+1}} = 0$. Тогда для любых функции $f(Y)$ и ряда $g(Y)$ имеем формулу $\Delta[gf; X_{k,n}] = \sum_{0 \leq i \leq n-1} c_i \Delta[f; X_{k,n} \setminus \{x_1, \dots, x_i\}]$ (из этого равенства при $f = 1$ вытекает, что c_i являются линейными комбинациями р.р. ряда g).

Для $X \subset S$, $T \subset S^{m+1}$ скажем, что функция $u(Y, y)$ имеет конечный порядок, если для любого $t = (t_1, \dots, t_{m+1}) \in T$ некоторая нетривиальная линейная комбинация $\sum \lambda_i(t) u(Y, t_i)$ равна 0 на всех k -подмножествах в X , например, если u допускает разделение переменных (р.п.-формулу) вида $u(Y, y) = h_1(Y)p_1(y) + \dots + h_m(Y)p_m(y)$ (характеризацию таких функций можно найти в [3]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. 1) Если u имеет конечный порядок, $t \in T$, $t \subset X$, то для любой функции f имеем соотношение $\sum \lambda_i(t) \Delta[f; X \setminus t_i] = 0$.

2) Если u допускает р.п.-формулу, то а) $\det(\Delta[f; X \setminus t_i] \ p_1(t_i) \ \dots \ p_m(t_i)) = 0$, $i = 1, \dots, m+1$, б) при $h_m = \text{const}$, $i, j = 1, \dots, m$, имеем соотношение

$$\Delta[f; X] \text{const} \det(p_j(t_i)) = \det(p_1(t_i) \ \dots \ p_{m-1}(t_i) \ \Delta[f; X \setminus t_i]).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Если $F = \mathbb{R}$, $\text{sign } u(x_i, x_j) = -\text{sign } u(x_j, x_i)$ для всех $i \neq j$ и чередуются знаки элементов в последовательности $\{f(x_i)\}$, то для $k \geq 1$ чередуются знаки в последовательности $\{\Delta[f; x_i, \dots, x_{i+k}]\}$.

Оставшаяся часть заметки посвящена примерам. Для достаточно большого m конечность порядка любого многочлена вытекает из определения, в других примерах конечность порядка функции связана с наличием теоремы сложения. Аналогично можно получить соотношения для р.р. с помощью теорем сложения для ортогональных многочленов [4], решений линейных дифференциальных уравнений [5], обобщенных гиперболических функций [6], последовательностей Шеффера [7].

Пусть S – группа, R – ее представление, $p, q \in S$, $u(p, q) = R(pq^{-1})_{ij}$ – матричный элемент. Имеем р.п.-формулу $u(p, q) = \sum R(p)_{ik} R(q^{-1})_{kj}$ (аналогично можно использовать представления алгебр Ли). Например, представления

$$x \mapsto \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \operatorname{ch} x & \operatorname{sh} x \\ \operatorname{sh} x & \operatorname{ch} x \end{pmatrix}$$

приводят к р.р. Ньютона и их тригонометрическим аналогам.

Формула Коши для многочленов Макдональда [8] является р.п.-формулой для результата двух многочленов одной переменной. Для многомерного результата (формы Чжоу, записанной в координатах Штифеля) р.п.-формулу можно получить разложением определителя обобщенной матрицы Сильвестра [9] по столбцам, отвечающим одному из многочленов. Подобным образом можно получить р.п.-формулы для результата из формулы Пуассона [10] и определителей обобщенных матриц Безу и Кронекера [11] (в одномерном случае все эти формулы получаются из формулы Коши различными специализациями многочленов Макдональда). Другими обобщениями одномерного результата являются двойные многочлены Шуберта и Гротендика. Р.п.-формулами для них являются соответствующие обобщения формулы Коши [12].

Многие теоремы сложения для эллиптических функций Вейерштрасса и Якоби, тэта-функций и их многомерных обобщений можно рассматривать как р.п.-формулы. Например, полагая $u(y_1, \dots, y_{k+1}) = \sigma(\sum y_i) \prod \sigma(y_j - y_k) / (\prod \sigma(y_i))^{k+1}$ и используя теорему сложения Фробениуса–Штиккельбергера для σ -функции Вейерштрасса [13], имеем соотношение для р.р. $\sum_{1 \leq i \leq k+2} (-1)^i u(\dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots) \Delta[f; X \setminus x_i] = 0$.

Пусть S – группа кос, v – инвариант Васильева порядка m , $u(y_1, y_2) = v(y_1 y_2)$. Выбирая $m+1$ перекрестков в y_2 , видим, что u имеет конечный порядок по отношению к набору 2^{m+1} кос, полученных всеми заменами выбранных перекрестков.

Представляет интерес следующий вопрос: существует ли единый подход к упомянутым выше р.п.-формулам, например, можно ли интерпретировать их как теоремы сложения для каких-либо обобщенных групповых структур (такая связь известна, например, для эллиптических функций)?

Список литературы

- [1] Г. Г. Ильюта, *Докл. РАН*, **347**:3 (1996), 306–308. [2] Г. Г. Ильюта, *УМН*, **58**:4 (2003), 149–150. [3] M. Čadež, J. Šimša, *Aequationes Math.*, **40**:1 (1990), 8–25. [4] E. Koelink, *Special function, q-series and related topics* (Toronto, ON, 1995), Fields Inst. Commun., **14**, ed. M. Ismail, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 109–129. [5] A. Ungar, *Aequationes Math.*, **26**:1 (1983), 104–112. [6] J. Schwaiger, *Aequationes Math.*, **43**:2–3 (1992), 198–210. [7] S. Roman, *The umbral calculus*, Academic Press, New York, 1984. [8] I. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, Oxford Univ. Press, New York, 1995. [9] C. D’Andrea, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **354**:7 (2002), 2595–2629. [10] P. Pedersen, B. Sturmfels, *Math. Z.*, **214**:3 (1993), 377–396. [11] B. Mourrain, V. Y. Pan, *J. Complexity*, **16**:1 (2000), 110–180. [12] A. Lascoux, “Notes on interpolation in one and several variables”, <http://phalanstere.univ-mlv.fr/~al>. [13] J. C. Eilbeck, V. Z. Enolskii, E. Previato, *Lett. Math. Phys.*, **63**:1 (2003), 5–17.

Г. Г. Ильюта (G. G. Il'yuta)

Московский государственный открытый педагогический
университет им. М. А. Шолохова
E-mail: ilyuta@mccme.ru

Представлено С. М. Гусейн-Заде

Принято редколлегией
12.01.2006