Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

П. Н. Ярыкин, Поведение нелинейного случайного процесса в окрестности его стационарных распределений, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1727>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 12:49:53

Поведение нелинейного случайного процесса в окрестности его стационарных распределений

П. Н. Ярыкин

Настоящая статья посвящена исследованию решения нелинейного стохастического дифференциального уравнения (СДУ)

$$d\tilde{X}_t = dW_t + \left(\int_{\mathbb{R}^1} b(\tilde{X}_t, y) \mu_t^{\tilde{X}}(dy) \right) dt, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

с начальным условием $\tilde{X}_0 = X_0$, где W_t – броуновское движение, не зависящее от X_0 , $\mu_t^{\tilde{X}}$ – распределение $\tilde{X}$ в момент времени t , $b(\tilde{X}_t, y)$ – функция попарного симметричного взаимодействия, инвариантного относительно времени и сдвига:

$$b(x, y) = -\beta(x - y) = -b(y, x), \quad \text{где } \beta(x) = x + \alpha \sin x. \quad (2)$$

Исторический обзор темы можно прочитать, например, в работе [1].

В работах [2] и [1] были доказаны существование и единственность решения при конечном EX_0 , существование и гладкость плотности $u(x, t)$ меры $\mu_t^{\tilde{X}}$ относительно меры Лебега на $\mathbb{R}^1$ при $t > 0$, сохранение первого момента ($EX_t = \text{const}$). Там же было доказано, что любое стационарное решение уравнения (1) с нулевым первым моментом существует для любого α и имеет плотность вида

$$p_a(x) = k_a^{-1} e^{-x^2 + a \cos x} \quad \text{при } a = 2\alpha \int \cos x p_a(x) dx. \quad (3)$$

Более того, существуют $\hat{a} > 1/2$ и $\hat{a} < 0$ такие, что: 1) при $\alpha < 0$ существует единственное стационарное решение, причем оно имеет вид (3); 2) при $\alpha > \hat{a}$ существует не менее трех стационарных распределений вида (3) (с параметрами $a_1 > 0$, $a_2 < \hat{a}$ и $\hat{a} \leq a_3 \leq 0$).

Основная цель данной работы заключена в описании поведения процесса $\tilde{X}_t$ при $t \rightarrow \infty$.

В силу трансляционной инвариантности системы каждая инвариантная мера порождает целый класс инвариантных мер, полученных из исходной сдвигом. Поэтому устойчивость стационарного распределения понимаем в следующем смысле.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Стационарное решение X_∞ уравнения (1) называется *устойчивым*, если существует слабая окрестность U_{X_∞} такая, что любое решение $\tilde{X}_t$ уравнения (1) с начальным условием $X_0 \in U_{X_\infty}$ таким, что $EX_0 = EX_\infty$, слабо сходится к стационарному решению: $\tilde{X}_t \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{w} X_\infty$.

Заметим, что при наличии внешнего поля условие $EX_0 = EX_\infty$ является лишним.

Функционал свободной энергии. Ключевым понятием этой работы является функционал свободной энергии $F(p)$. Положим

$$F(p) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \int p(x) \ln p(x) dx + \frac{1}{2} \iint V(x - y) p(x) p(y) dx dy, \quad (4)$$

если p имеет плотность $p(x)$ и правая часть определена. Иначе положим $F(p) \stackrel{\text{def}}{=} +\infty$. Здесь $V(x) = \frac{1}{2}x^2 - \alpha \cos x$ – первообразная функции $\beta(x)$. Обратим внимание, что пространственный сдвиг меры $p(x) \rightarrow p(x - a)$ не изменяет значения функционала свободной энергии, что хорошо согласуется с отсутствием внешнего поля.

Сформулируем основные свойства функционала свободной энергии.

ЛЕММА 1. а) $F(p)$ – полунепрерывная снизу функция относительно слабой топологии пространства вероятностных мер, т.е. если $p_n \xrightarrow{w} p_0$, то $F(p_0) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(p_n)$.

б) Множество $K_r := \{p \mid F(p) \leq r\}$ является секвенциально компактным относительно слабой топологии.

ЛЕММА 2. Пусть $u(x, t)$ – плотность решения СДУ (1), где X_0 имеет конечный четвертый момент. Тогда

$$\frac{d}{dt}F(u(\cdot, t)) = - \int \left(\frac{1}{2} u'_x(x, t) + \int \beta(x-y) u(x, t) u(y, t) dy \right)^2 \frac{1}{u(x, t)} dx \leq 0,$$

причем

$$\frac{d}{dt}F(u(\cdot, t)) = 0 \Leftrightarrow u(\cdot, t) \text{ – плотность стационарного распределения.}$$

Таким образом, мы видим, что функционал свободной энергии не возрастает со временем и строго убывает в точках, не являющихся стационарными решениями уравнения нелинейного процесса (1). Значит, функционал (4) обладает основными свойствами функционалов свободной энергии, введенных другими авторами (см. [3], [4]).

ЛЕММА 3. Пусть множество A является секвенциально компактным подмножеством пространства $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ и A таково, что если $\mu^{X_0} \in A$, то $u(\cdot, t) \in A$ для любого $t \geq 0$. Пусть также в множестве A существует единственное стационарное распределение p_0 .

Тогда p_0 является единственным минимумом функционала свободной энергии F на множестве A и для любого $\mu^{X_0} \in A$ выполнено $u(\cdot, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{w} p_0$.

Леммы 1–3 являются основой доказательства предельных теорем.

Предельное поведение решения.

ТЕОРЕМА 1. При $\alpha \leq 1/2$ единственное стационарное решение СДУ (1) с заданным математическим ожиданием устойчиво, причем окрестностью сходимости U_{X_∞} является все множество вероятностных распределений $\mathcal{P}(\mathbb{R})$.

Поскольку класс четных распределений замкнут относительно процесса $\tilde{X}_t$ ($\tilde{X}_0$ четно, значит, $\tilde{X}_t$ – четно) и уже содержит при больших положительных α три стационарных распределения, то ограничим рассмотрение этим классом.

Также получено, что a_1 и a_2 являются единственным решением предыдущего уравнения в указанных областях возможных значений. Более того, $a_1 \sim 2\alpha$, $a_2 \sim -2\alpha$ и существует $a_0 < 0$ такое, что $a_3 \rightarrow a_0$ при $\alpha \rightarrow +\infty$. Следовательно,

$$F(p_{a_1}) = -\frac{\alpha}{2} + O(\ln \alpha), \quad F(p_{a_2}) = -\frac{\alpha}{2} + O(\ln \alpha), \quad F(p_{a_3}) \geq F(p_{a_0}).$$

ТЕОРЕМА 2. Стационарное решение p_{a_3} неустойчиво, т.е. для любой окрестности $U_{p_{a_3}}$ существует $p_0 \in U_{p_{a_3}}$ такое, что решение СДУ (1) с начальным распределением p_0 не сходится к стационарному решению с плотностью p_{a_3} .

ТЕОРЕМА 3. Стационарные распределения p_{a_1} и p_{a_2} являются устойчивыми в смысле определения 1.

Автор выражает благодарность научному руководителю А. Д. Маните за постоянное внимание к работе и М. А. Урусову за ценные советы.

Список литературы

- [1] П. Н. Ярыкин, “Устойчивость нелинейного стохастического процесса, аппроксимирующего систему взаимодействующих частиц”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **51**:2 (2006) (в печати).
- [2] П. Н. Ярыкин, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 2004, №2, 58–61.
- [3] J. A. Carrillo, R. J. McCann, C. Villani, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **19**:3 (2003), 971–1018.
- [4] Y. Tamura, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math.*, **31**:1 (1984), 195–221.

П. Н. Ярыкин (P. N. Yarykin)

Московский государственный

университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: pavlik@plushka.msk.ru

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

01.02.2006