Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Яроцкий, Теория Пирогова–Синяя для относительно ограниченных квантовых возмущений классических решетчатых моделей, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1728>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 18:02:14

Теория Пирогова–Синяя для относительно ограниченных квантовых возмущений классических решетчатых моделей

Д. А. Яроцкий

Теория Пирогова–Синяя (ТПС) позволяет детально изучать низкотемпературные фазовые переходы первого рода в классических спиновых системах (или контурных моделях) на решетке, исходя из известной фазовой диаграммы основных состояний [1]. В последние годы появился ряд работ, в которых ТПС переносится на квантовые модели, получаемые слабыми возмущениями классических (см., например, обзор [2]). В недавней работе [3] была развита техника относительно ограниченных возмущений классических решетчатых гамильтонианов, которая позволяет применить ТПС в ситуациях, когда о структуре возбужденных состояний квантовой модели не делается никаких предположений, кроме того, что они отделены спектральной щелью от основных.

В простейшем случае двух фаз изингова типа предлагаемое расширение ТПС выглядит так. Рассмотрим квантовую спиновую систему на решетке $\mathbb{Z}^\nu$, спиновое пространство $\mathcal{H}$ предполагается конечномерным (общая теория квантовых спиновых систем подробно излагается, например, в книге [4]). Пусть $H = H(\mu)$ – трансляционно инвариантный (формальный) гамильтониан с взаимодействием конечного радиуса, гладко зависящий от n -мерного параметра μ , заданного в окрестности начала координат. Можно считать, что $H = \sum_x h_x$, где h_x – это сдвиг на x некоторого самосопряженного неотрицательного оператора $h = h(\mu)$, действующего на конечном подмножестве Λ_0 решетки $\mathbb{Z}^\nu$. Предположим, что при $\mu = 0$ оператор $h(0)$ обладает следующим свойством. В гильбертовом пространстве, отвечающем одному узлу решетки, имеются два выделенных ортогональных вектора, Ω^- и Ω^+ , таких, что векторы $\Omega_{\Lambda_0}^- \equiv \bigotimes_{x \in \Lambda_0} \Omega_x^-$ и $\Omega_{\Lambda_0}^+ \equiv \bigotimes_{x \in \Lambda_0} \Omega_x^+$ являются двумя основными состояниями с нулевой энергией оператора $h(0)$, а в ортогональном дополнении к ним спектр $h(0)$ строго положителен. Из этого условия, в частности, немедленно следует, что в любом конечном объеме $\Lambda \subset \mathbb{Z}^\nu$ векторы $\bigotimes_{x \in \Lambda} \Omega_x^-$ и $\bigotimes_{x \in \Lambda} \Omega_x^+$ являются основными состояниями, с ненулевой спектральной щелью, ограничения $H_\Lambda(0)$ гамильтониана $H(0)$ в этот объем (корректно определенного как самосопряженный оператор в $\mathcal{H}^{\otimes \Lambda}$). Предположим теперь, что при малых ненулевых μ энергии основных состояний различаются в первом порядке теории возмущений, в том смысле, что

$$k \neq 0, \quad \text{где} \quad k \equiv \langle \Omega_{\Lambda_0}^+, \nabla_\mu h(0) \Omega_{\Lambda_0}^+ \rangle - \langle \Omega_{\Lambda_0}^-, \nabla_\mu h(0) \Omega_{\Lambda_0}^- \rangle \in \mathbb{R}^n. \quad (1)$$

ТЕОРЕМА. *Рассмотрим окрестность $U = \{|\mu| < r\}$ начала координат в пространстве параметров. При сделанных предположениях, если r достаточно мало, то в U существует гладкая поверхность S , содержащая начало координат и делящая U на две части: $U = U_- \cup S \cup U_+$, соответствующие двум различным фазам, так что выполнено следующее:*

- при μ , лежащем в U_- или в U_+ , гамильтониан $H(\mu)$ обладает единственным трансляционно-инвариантным основным состоянием ($\omega_-(\mu)$ или $\omega_+(\mu)$ соответственно); эти состояния слабо-* непрерывны по μ ; при $\mu \in S$ гамильтониан $H(\mu)$ имеет ровно два чистых трансляционно-инвариантных основных состояния, получаемых продолжением $\omega_-(\mu)$ и $\omega_+(\mu)$ в S ;
- энергия основного состояния $E(\mu)$ гладко зависит от μ в $U_- \cup S$ и в $U_+ \cup S$;
- в согласии с формальной теорией возмущений, в точке $\mu = 0$ вектор k перпендикулярен поверхности S , и

$$\nabla_\mu E(\pm 0) = \langle \Omega_{\Lambda_0}^\pm, \nabla_\mu h(0) \Omega_{\Lambda_0}^\pm \rangle,$$

где $\nabla_\mu E(\pm 0)$ – значение продолжения $\nabla_\mu E$ из $U_\pm$ в $\mu = 0$;

- d) в основных состояниях $\omega_-(\mu)$ и $\omega_+(\mu)$ корреляции убывают экспоненциально;
 e) в основных состояниях $\omega_-(\mu)$ и $\omega_+(\mu)$ гамильтониан $H(\mu)$ обладает спектральной щелью.

Более того, предположим, что размерность $\nu \geq 2$. Тогда существует такое β_0 , что при любом значении обратной температуры $\beta > \beta_0$ существует гладкая поверхность S_β (уже не содержащая, вообще говоря, начала координат), делящая U на две части, так что для трансляционно-инвариантных β -КМШ-состояний выполнены аналоги утверждений а), d) и для свободной энергии аналог утверждения б).

Примером ситуации, в которой применима теорема, является любое удовлетворяющее условию (1) возмущение анизотропной ферромагнитной модели Гейзенберга $H(0) = -\sum_{|x-y|=1} (S_x^1 S_y^1 + S_x^2 S_y^2 + \alpha S_x^3 S_y^3)$, с произвольным спином и произвольной анизотропией $\alpha > 1$ (здесь (S^1, S^2, S^3) – тройка операторов проекций спина на координатные оси).

Теорема допускает обобщения на модели с невозмущенными гамильтонианами, имеющими более сложные, в частности неклассические, основные состояния (в однофазном случае см. применение к $SU(2)$ -изотропной модели АКЛТ в [3]). Существенными условиями (аналогичными условию Пайерлса в исходной ТПС) при этом являются, однако, наличие у $h(0)$ спектральной щели и то, что основные состояния минимизируют энергию в каждом члене $H(0)$.

Автор признателен Р. А. Минлосу и С. А. Пирогову за внимание к его работе и полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов*, Наука, М., 1980. [2] J. Fröhlich, L. Rey-Bellet, D. Ueltschi, *Comm. Math. Phys.*, **224**:1 (2001), 33–63. [3] D. A. Yarotsky, *Comm. Math. Phys.*, **261**:3 (2006), 799–819; [arXiv: math-ph/0412040](https://arxiv.org/abs/math-ph/0412040). [4] O. Bratteli, D. W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics*, v. 1, 2, Springer-Verlag, New York, 1987, 1997.

Д. А. Яроцкий (D. A. Yarotskii)
 Институт проблем передачи информации РАН
 E-mail: yarotsky@mail.ru

Представлено Р. А. Минлосом
 Принято редколлегией
 02.02.2006