Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. П. Шашкин, Закон повторного логарифма для ассоциированного случайного поля, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1729>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:48:42

Закон повторного логарифма для ассоциированного случайного поля

А. П. Шашкин

Заметка посвящена установлению закона повторного логарифма для нормированных частичных сумм случайного поля, обладающего свойством ассоциированности. Напомним, что случайное поле $X = \{X_j, j \in \mathbb{Z}^d\}$ называется ассоциированным [1], если

$$\text{cov}(f(X_{i_1}, \dots, X_{i_n}), g(X_{i_1}, \dots, X_{i_n})) \geq 0$$

для любого $n \in \mathbb{N}$, произвольного набора попарно различных индексов $\{i_1, \dots, i_n\} \subset \mathbb{Z}^d$ и любых ограниченных по координатам неубывающих функций $f, g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ассоциированность и родственные ей понятия важны в статистической физике, теории надежности, теории случайных мер. Независимые случайные величины и неубывающие функции от них ассоциированы; известны достаточные условия ассоциированности гауссовских, устойчивых, марковских процессов. В 1980–1990 гг. для ассоциированных случайных полей получены многие классические предельные теоремы теории вероятностей: центральная предельная теорема и ее уточнения, принципы инвариантности, законы больших чисел и др. (см. [2], [3] и там же ссылки). При этом оказалось, что выполнение этих теорем, как правило, обеспечивается моментными ограничениями и определенным поведением ковариационной функции (достаточно быстрым убыванием ковариаций с ростом расстояния между элементами поля). А именно, предполагается, что

$$u_1 < \infty \text{ и } u_r \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty, \text{ где } u_r = \sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \sum_{k \in \mathbb{Z}^d: |k-j| \geq r} \text{cov}(X_j, X_k), r \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

– коэффициент Кокса–Гримметта. Здесь $|j| = \max_{i=1, \dots, d} |j_i|$ для $j \in \mathbb{Z}^d$. Может требоваться также определенная скорость сходимости u_r к нулю.

В работах [4] и [5] доказан закон повторного логарифма (обычный и функциональный соответственно) для строго стационарной ассоциированной случайной последовательности в ситуации, когда имеется абсолютный момент порядка выше второго и $u_r \rightarrow 0$ (при $r \rightarrow \infty$) достаточно быстро. В работе [2] установлен функциональный закон повторного логарифма для ассоциированного случайного поля, из которого вытекает обычный закон повторного логарифма для сумм случайных величин, берущихся по кубам $U_n = ((0, n] \times \dots \times (0, n]) \cap \mathbb{Z}^d$, $n \in \mathbb{N}$. Известно, что множество почти на всем предельных точек нормированных должным образом сумм элементов случайного поля зависит от того, по какой базе берутся пределы (см. [6]). В данной работе изучается предельное поведение нормированных сумм по параллелепипедам произвольной формы, стороны которых стремятся к бесконечности.

Назовем целочисленным параллелепипедом множество $(a, b] = ((a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d]) \cap \mathbb{Z}^d$, здесь $a_i, b_i \in \mathbb{Z}^d$ и $a_i < b_i$ при $i = 1, \dots, d$. Положим $S(U) = \sum_{j \in U} X_j$, где U – целочисленный параллелепипед, и $S_n = S((0, n])$, если $n \in \mathbb{N}^d$. Для индекса $n \in \mathbb{N}^d$ и числа $c \in \mathbb{N}$, $c > 1$, будем обозначать $[n] = n_1 \dots n_d$, $c^n = (c^{n_1}, \dots, c^{n_d}) \in \mathbb{N}^d$, $c^{n-1} = (c^{n_1-1}, \dots, c^{n_d-1}) \in \mathbb{N}^d$. Далее $\log x := \ln(\max\{x, e\})$, $x > 0$, а запись $n \rightarrow \infty$, где $n \in \mathbb{N}^d$, означает, что $n_1 \rightarrow \infty, \dots, n_d \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА. Пусть стационарное в широком смысле центрированное случайное поле X ассоциировано и таково, что $\sup_{j \in \mathbb{Z}^d} \mathbb{E}|X_j|^{2+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$. Предположим, что условие (1) выполнено и существует $\lambda > 0$ такое, что $u_r = O(r^{-\lambda})$ при $r \rightarrow \infty$. Тогда, с вероятностью единица,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2d[n] \log \log [n]}} = - \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{\sqrt{2d[n] \log \log [n]}} = \sigma,$$

где $\sigma^2 = \sum_{j \in \mathbb{Z}^d} \text{cov}(X_0, X_j)$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 03-01-00724) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-1758.2003.1).

Наметим ход доказательства теоремы. Можно считать, что $\sigma > 0$, так как иначе утверждение тривиально. Верхняя оценка получается путем стандартного рассуждения с использованием максимального неравенства для ассоциированных полей из работы [7] и результатов о точности нормального приближения для ассоциированного случайного поля (см., например, [3]). Доказательство нижней оценки более сложно. Для $k \in \mathbb{N}^d$, достаточно большого $c \in \mathbb{N}$ и малого $\varepsilon > 0$ введем целочисленные параллелепипеды $B_k = (c^{k-1}, c^k]$ и события $E_k = \{S(B_k) \geq (1 - \varepsilon)\sqrt{2dDS(B_k) \log \log[c^k]}\}$, $k \in G_\rho$; здесь $G_\rho = \{k \in \mathbb{N}^d : \min_i k_i \geq (k_1 + \dots + k_d)^\rho\}$ для некоторого $\rho \in (0, 1)$. Задача сводится к проверке того, что с вероятностью единица происходит бесконечное число событий E_k . В свою очередь, согласно классической лемме Эрдёша и Реньи, последнее вытекает из соотношения

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i,j: 1 \leq i, j \leq n} (P(A_i A_j) - P(A_i)P(A_j))}{(\sum_{i=1}^n P(A_i))^2} = 0, \quad (2)$$

где $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ – события $\{E_k\}_{k \in G_\rho}$, перенумерованные по возрастанию величины $k_1 + \dots + k_d$ (индексы $k \in \mathbb{N}^d$, для которых эти величины равны, упорядочиваются, например, в лексикографическом порядке).

Для ассоциированного случайного вектора (ξ, η) и липшицевых функций $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$|\text{cov}(f(\xi), g(\eta))| \leq \text{Lip}(f) \text{Lip}(g) \text{cov}(\xi, \eta), \quad (3)$$

если правая часть определена (см. [8]). С помощью этого утверждения можно проверить соотношение (2), взяв $\xi = S(B_k)/\sqrt{DS(B_k)}$ и $\eta = S(B_l)/\sqrt{DS(B_l)}$, $k, l \in G_\rho$. Однако в (3) участвуют липшицевы функции, тогда как в числителе (2) находятся ковариации индикаторов. Поэтому эти индикаторы необходимо сгладить, рассматривая вместо индикатора $\mathbb{I}\{x \geq a\}$ функцию $f_{\gamma,a}(x)$, равную нулю при $x \leq a$, единице при $x \geq a + \gamma$ и линейную на отрезке $[a, a + \gamma]$. Здесь $a = (1 - \varepsilon)\sqrt{2d \log \log[c^k]}$ для $k \in G_\rho$, а γ – параметр, выбираемый специальным образом для данного индекса k . Возникающая в результате случайная погрешность оценивается с помощью теоремы о точности нормального приближения для нормированных сумм, а сумма ковариаций липшицевых функций – посредством (3). Важную роль при этом играет следующая лемма, имеющая самостоятельный интерес. Положим $Z_k = S(B_k)/\sqrt{|B_k|}$, $k \in G_\rho$.

ЛЕММА. Двойная сумма $I = \sum_{k,l \in G_\rho, k \neq l} \text{cov}(Z_k, Z_l)$ конечна.

Отметим, что для получения этой леммы необходимо по-разному оценивать ковариации сумм для “близких” индексов k и l (т.е. таких пар, что $\sum_{i=1}^d (k_i - l_i) = 0$) и “далеких” (всех остальных пар). В первом случае следует воспользоваться результатами о поведении дисперсий сумм элементов стационарного поля по растущим параллелепипедам. Именно, из условия (1) и того, что $\sigma > 0$, следует оценка $|\sigma^2 - |B_k|^{-1}DS(B_k)| = O(c^{-\lambda(k_1 + \dots + k_d)^\rho / (1+\lambda)})$, $k \rightarrow \infty$. Во втором случае используется следующая из (1) и условия на скорость убывания u_r оценка $\text{cov}(S(B_k), S(B_l)) \leq c_0 \min\{|B_k|, |B_l|\}(\text{dist}(B_k, B_l))^{-\lambda}$, здесь $c_0 \geq 0$ не зависит от k и l , а $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ – расстояние в $\mathbb{Z}^d$, отвечающее норме $|\cdot|$.

Автор благодарит профессора А. В. Булинского за внимание к работе.

Список литературы

- [1] J. D. Esary, F. Proschan, D. W. Walkup, *Ann. Math. Statist.*, **38** (1967), 1466–1474.
 [2] А. В. Булинский, *Фундам. и прикл. матем.*, **1**:3 (1995), 623–639. [3] A. V. Bulinski, C. Suquet, *Statist. Probab. Lett.*, **54**:2 (2001), 215–226. [4] H. Yu, *Acta Math. Sinica*, **29**:4 (1986), 507–511. [5] A. R. Dabrowski, H. Dehling, *Stochastic Process. Appl.*, **30**:2 (1988), 277–289.
 [6] M. J. Wichura, *Ann. Probab.*, **2** (1974), 202–230. [7] A. V. Bulinski, M. S. Keane, *J. Math. Sci.*, **81**:5 (1996), 2905–2911. [8] А. В. Булинский, Э. Шабанович, *Фундам. и прикл. матем.*, **4**:2 (1998), 479–492.

А. П. Шашкин (A. P. Shashkin)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: shashkin@mech.math.msu.su

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией
02.02.2006