Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. В. Зайцев, С. П. Мищенко, Асимптотика функций роста кодлины многообразий алгебр Ли, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm173>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 17:06:22

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИЙ РОСТА КОДЛИНЫ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР ЛИ

М. В. Зайцев, С. П. Мищенко

В работе изучаются числовые характеристики многообразий алгебр Ли, важнейшими из которых являются коразмерность тождеств и кодлина. Асимптотическое поведение коразмерности тождеств является важным классификационным признаком многообразия, существенно влияет на его свойства и изучалось в большом числе работ. Асимптотика функции кодлины для многообразий алгебр Ли, ее связь с другими числовыми характеристиками исследованы гораздо хуже. В данной работе показано, что существуют многообразия с экспоненциальным и сверхэкспоненциальным ростом кодлины и вычислена асимптотика кодлины для произведения двух нильпотентных многообразий. Все необъяснимые понятия можно найти в монографии [1].

Характеристика основного поля Φ предполагается равной нулю. В лиевских элементах договоримся опускать скобки при их левонормированной расстановке, то есть $abc = ((ab)c)$.

Обозначим через $F = F(X, \mathbf{V})$ относительно свободную алгебру многообразия $\mathbf{V}$ со счетным множеством свободных образующих $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Обозначим через $P_n = P_n(\mathbf{V})$ совокупность всех полилинейных элементов от $x_1, \dots, x_n$ в пространстве F . Действие $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$ симметрической группы S_n естественным образом продолжается на все пространство P_n . Исследование структуры P_n как S_n -модуля играет важную роль при изучении многообразия $\mathbf{V}$.

Обозначим через χ_λ характер неприводимого представления симметрической группы, соответствующего разбиению λ числа n , и рассмотрим для многообразия $\mathbf{V}$ разложение

$$(1) \quad \chi_n(\mathbf{V}) = \chi(P_n(\mathbf{V})) = \sum m_\lambda \chi_\lambda.$$

Асимптотическое поведение размерности $c_n = c_n(\mathbf{V})$ пространства $P_n = P_n(\mathbf{V})$ определяет рост многообразия. Число слагаемых

$$(2) \quad l_n = l_n(\mathbf{V}) = \sum m_\lambda$$

в сумме (1) называют кодлиной многообразия. Важными числовыми характеристиками многообразия являются также кратности m_λ в сумме (1).

Обозначим через d_λ размерность соответствующего λ неприводимого модуля. Отметим, что для введенных числовых характеристик выполняется такое соотношение

$$(3) \quad c_n(\mathbf{V}) = \dim P_n(\mathbf{V}) = \sum m_\lambda d_\lambda.$$

Напомним, что в случае многообразий ассоциативных алгебр рост кратностей и кодлина многообразия ограничены полиномиальной функцией n^q для подходящего q (см., например, [2; теорема 16]). Как было показано авторами, в случае алгебр Ли это свойство остается верным для так называемых многообразий ассоциативного типа и может нарушаться в общем случае (см. [3]). Однако в предложенных ранее примерах рост кратностей и кодлины оставался субэкспоненциальным.

В данной работе приводятся примеры многообразий, для которых кодлина является сверхэкспоненциальной функцией. Из асимптотической оценки числа различных разбиений числа n следует, что в этом случае будут существовать и кратности с таким же ростом. Кроме того, в данной статье для любого натурального $b \geq 2$ приводится пример многообразия, кодлина которого ведет себя как функция $b^{n/2}$.

Сформулируем основные результаты.

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 99-01-00233, 98-01-01020 и 96-15-96050.)

ТЕОРЕМА 1. Кодлины многообразий $\mathbf{A}^3$ и $\mathbf{AN}_3$ растут сверхэкспоненциальным образом.

ТЕОРЕМА 2. Кодлина многообразия $\mathbf{N}_b\mathbf{N}_2$, $b \geq 2$, асимптотически совпадает с экспоненциальной функцией $b^{n/2}$, т.е. $l_n(\mathbf{N}_b\mathbf{N}_2) \simeq (\sqrt{b})^n$.

Приведем сначала ряд примеров многообразий со сверхэкспоненциальной кодлинной. Для построения нужных примеров нам потребуется ряд нижних оценок. Отметим сначала, что из формул (2), (3) и соотношения $n! = \sum_{\lambda \vdash n} d_\lambda^2$ легко вытекает следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Кодлина и коразмерность любого многообразия линейных алгебр связаны неравенством: $l_n(\mathbf{V}) \geq \frac{c_n(\mathbf{V})}{\sqrt{n!}}$.

Приведем теперь примеры многообразий алгебр Ли, кодлина которых не может быть ограничена экспоненциальной функцией.

В работе [4] найдена асимптотика роста полинильпотентных многообразий. На основе этих асимптотик и предложения 1 получаем нижние оценки кодлин этих многообразий. Так, для многообразия $\mathbf{A}^3$ всех разрешимых ступени не выше трех алгебр Ли получаем

$$c_n(\mathbf{A}^3) \simeq \frac{n!}{(\ln n)^n}, \quad l_n(\mathbf{A}^3) \geq \frac{\sqrt{n!}}{(\ln n)^n}.$$

Многообразию $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q}\mathbf{N}_{s_{q-1}} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$ при числе сомножителей $q \geq 3$ может иметь еще более значительную кодлинну. Обозначим через $\ln^{(k)} x$ k -кратную композицию логарифма, т.е. $\ln^{(k)} x = \ln(\ln(\dots x) \dots)$. Для такого многообразия в работе [4] получена оценка коразмерности

ТЕОРЕМА ([4; теорема 2.2]). Пусть $\mathbf{V} = \mathbf{N}_{s_q}\mathbf{N}_{s_{q-1}} \cdots \mathbf{N}_{s_1}$. Тогда

$$c_n(\mathbf{V}) = \frac{n!}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/s_1}} \left(\frac{s_2 + o(1)}{s_1} \right)^{n/s_1} \quad \text{или} \quad c_n(\mathbf{V}) = (n!)^{(s_1-1)/s_1} (s_2 + o(1))^{n/s_1}.$$

Первая из формул относится к случаю $q \geq 3$, а вторая получена для $q = 2$. Отсюда следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Для полинильпотентных многообразий алгебр Ли выполнены следующие соотношения

$$l_n(\mathbf{N}_{s_q}\mathbf{N}_{s_{q-1}} \cdots \mathbf{N}_{s_1}) \geq \frac{\sqrt{n!}}{(\ln^{(q-2)} n)^{n/s_1}} \quad (q \geq 3), \quad l_n(\mathbf{N}_b\mathbf{N}_a) \geq (\sqrt{b})^n (n!)^{(a-2)/(2a)}.$$

В частности, при $a \geq 3$ кодлина $\mathbf{N}_b\mathbf{N}_a$ растет сверхэкспоненциальным образом.

ЗАМЕЧАНИЕ. Существуют многообразия алгебр Ли со сверхэкспоненциальными кратностями для некоторых неприводимых модулей.

Это следует из известной (см., например, [5]) асимптотики числа $p(n)$ различных разбиений n , $p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}})$. Отметим также, что в работе [6] получена следующая оценка кодлинны многообразия $\mathbf{AN}_2$: $l_n(\mathbf{AN}_2) \sim \exp(\sqrt{\frac{2}{3}}n\pi)$. Для данного многообразия рост кодлинны оказался промежуточным между полиномиальным и экспоненциальным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. [2] Berele A., Regev A. // J. Algebra. 1983. V. 82. P. 559–567. [3] Зайцев М. В., Мищенко С. П. О полиномиальности роста кодлинны многообразий алгебр Ли // Алгебра и логика (в печати). [4] Петроградский В. М. // Матем. сб. 1997. Т. 188. № 6. С. 119–138. [5] Эндрюс Г. Теория разбиений. М.: Наука, 1982. [6] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. On the colength of a variety of Lie algebras // Internat. J. Algebra Comput. (to appear).

Принято редколлегией
23.04.1999