Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Благовещенская, Двойственная структура почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1733>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:48:52

Двойственная структура почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов

Е. А. Благовещенская

Мы рассматриваем так называемые *почти вполне разложимые* (пвр-) группы, которые в последние десятилетия приобрели широкую известность, что отражено в монографии А. Мадера [1].

По определению, почти вполне разложимая группа X – это абелева группа без кручения конечного ранга, содержащая некоторую вполне разложимую группу A (прямую сумму групп ранга 1) в качестве подгруппы конечного индекса. Не умаляя общности, считаем, что A – однозначно определенная вполне характеристическая вполне разложимая подгруппа в X конечного индекса, и называем ее *регулятором*, обозначая $A = R(X)$.

Пусть $\mathcal{A}$ – класс пвр-групп, имеющих регулятор A . Известно, что для любой группы $X \in \mathcal{A}$ существует конечное множество простых чисел $P = P(X)$ такое, что $X = \sum_{p \in P} X_p$ является суммой своих вполне характеристических подгрупп $X_p \in \mathcal{A}$, для которых X_p/A – p -примарная конечная группа. Обозначим $\mathcal{E} = \text{End } X$, $\mathcal{E}_A = \text{End } A$, $\mathcal{E}_p = \text{End } X_p$, $\mathcal{H}_p = \text{Hom}(X_p, A)$, $e = \exp(X/A)$ и $e_p = \exp(X_p/A)$. Для каждого $p \in P$ введем натуральное число $\hat{e}_p = \prod_{q \in P, q \neq p} e_q$ и определим группу $X'_p = \frac{X_p}{\hat{e}_p}$ в делимой оболочке группы X_p , так что $\hat{e}_p X'_p = X_p$. Очевидно, $X_p \subset \frac{X_p}{\hat{e}_p}$ и $\hat{e}_p \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_p$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $X = \sum_{p \in P} X_p \in \mathcal{A}$. Канонические цепи из [1; 15.2], $A \subset X \subset \frac{A}{e}$ и $e\mathcal{E}_A \subset \mathcal{E} \subset \mathcal{E}_A$, совпадают со следующими:

$$\bigcap_{p \in P} X_p \subset \sum_{p \in P} X_p = \bigcap_{p \in P} \frac{X_p}{\hat{e}_p} \subset \sum_{p \in P} \frac{X_p}{\hat{e}_p} \quad \text{и}$$

$$\bigcap_{p \in P} \hat{e}_p \mathcal{E}_p \subset \sum_{p \in P} \hat{e}_p \mathcal{E}_p = \bigcap_{p \in P} \mathcal{E}_p \subset \sum_{p \in P} \mathcal{E}_p \quad \text{соответственно.}$$

Кроме того, существует цепь

$$e\mathcal{E}_A = \bigcap_{p \in P} \hat{e}_p \mathcal{H}_p \subset \sum_{p \in P} \hat{e}_p \mathcal{H}_p = \bigcap_{p \in P} \mathcal{H}_p \subset \sum_{p \in P} \mathcal{H}_p = \mathcal{E}_A.$$

Доказательство основывается на существовании для любого $p \in P$ цепей $A \subset X_p \subset \frac{A}{e_p}$, $e_p \mathcal{E}_A \subset \mathcal{H}_p \subset \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_A$ и известном факте $\mathcal{E} = \bigcap_{p \in P} \mathcal{E}_p$, см. [1; 5.1.5].

Таким образом, $\mathcal{E}$ является как пересечением колец $\mathcal{E}_p$, так и суммой двусторонних идеалов $\hat{e}_p \mathcal{E}_p$. Данная двойственность позволяет доказать важные факты, касающиеся колец эндоморфизмов $\mathcal{E}$ *блочной-жестких* пвр-групп X , для которых множество *критических* типов $T_{\text{cr}}(A)$ регулятора A , определяемое его разложением $A = \bigoplus_{\tau \in T_{\text{cr}}(A)} A_\tau$ на однородные компоненты, состоит из попарно несравнимых типов, см. [2; т. 2, с. 130]. Для таких пвр-групп регулятором является вполне разложимая подгруппа наименьшего индекса. Будет также предполагаться, что все типы τ из $T_{\text{cr}}(A)$ представляются характеристиками, состоящими только из символов 0 и ∞ . Почти вполне разложимая группа X с таким регулятором A называется пвр-группой *кольцевого типа*.

Следующая теорема подготовлена работой [3], в которой показано, что $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_p$, $p \in P$, являются пвр-группами по отношению к операции сложения (что при необходимости обозначается символом $(+)$) и справедливо равенство $R(\mathcal{E}_p^+) = \text{Hom}(X_p, A)^+$,

кроме того, для кольцевых автоморфизмов верно, что $\text{Aut } \mathcal{E}_p \subset \text{Aut } \mathcal{E}_A$, см. [3; теорема 4.5, следствие 3.4].

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X = \sum_{p \in P} X_p \in \mathcal{A}$ является блочно-жесткой пвр-группой кольцевого типа. Тогда $R(\mathcal{E}^+) = \text{Hom}(X, A)^+$ и любой автоморфизм кольца $\mathcal{E}$ однозначно продолжается до автоморфизма кольца $\mathcal{E}_A$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\mathcal{H}_p^+ \cong \mathcal{E}_A^+$ является блочно-жесткой вполне разложимой группой, из [2; т. 2, 86.6, с. 136] следует, что $\bigcap_{p \in P} \mathcal{H}_p$ является вполне разложимой группой как аддитивная структура. Для каждого $p \in P$ существует цепь $\widehat{e}_p \mathcal{H}_p \subset \widehat{e}_p \mathcal{E}_p \subset \frac{e \mathcal{E}_A}{e_p}$, в которой $e \mathcal{E}_A = \bigcap_{p \in P} \widehat{e}_p \mathcal{E}_p$, и $\widehat{e}_p \mathcal{H}_p$ является вполне разложимой подгруппой наименьшего индекса в $\widehat{e}_p \mathcal{E}_p$. Из взаимной простоты чисел $\{e_p : p \in P\}$ следует, что аналогичное утверждение верно для подгруппы $\mathcal{H}^+ = \sum_{p \in P} \widehat{e}_p \mathcal{H}_p = \bigcap_{p \in P} \mathcal{H}_p$ в $\mathcal{E} = \sum_{p \in P} \widehat{e}_p \mathcal{E}_p$, которая, таким образом, является регулятором (вполне характеристической подгруппой) в $\mathcal{E}^+$ и, очевидно, совпадает с $\text{Hom}(X, A)^+$. Значит, двусторонний идеал $\mathcal{H} = \text{Hom}(X, A)$ кольца $\mathcal{E}$ инвариантен относительно любого $\mathcal{B} \in \text{Aut } \mathcal{E}$.

Из $\widehat{e}_p \mathcal{E}_p \subset \text{Hom}(X, X_p)$ и $e_p \text{Hom}(X, X_p) \subset \text{Hom}(X, A) = \mathcal{H}$, снова используя взаимную простоту чисел $\{e_p : p \in P\}$, получаем, что любой автоморфизм кольца $\mathcal{E} = \sum_{p \in P} \widehat{e}_p \mathcal{E}_p = \bigcap_{p \in P} \mathcal{E}_p$ является биекцией на $\widehat{e}_p \mathcal{E}_p$ и, таким образом, индуцирует автоморфизм на каждом $\mathcal{E}_p$, а значит, продолжается до автоморфизма кольца $\mathcal{E}_A$. Однозначность следует из $e_p \mathcal{E}_A \subset \mathcal{E}_p \subset \mathcal{E}_A$.

СЛЕДСТВИЕ. $\text{Aut } \mathcal{E} = \bigcap_{p \in P} \text{Aut } \mathcal{E}_p$.

Список литературы

- [1] A. Mader, *Almost completely decomposable abelian groups*, Algebra, Logic Appl., **13**, Gordon and Breach, Amsterdam, 2000. [2] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, т. 1, 2, Мир, М., 1974, 1977. [3] Е. Благовещенская, *Фундам. прикл. матем.*, **10:2** (2004), 23–50.

Е. А. Благовещенская (Е. А. Blagoveshchenskaya)

Санкт-Петербургский государственный
политехнический университет

E-mail: kate@robotek.ru

Представлено А. В. Михалевым

Принято редколлегией

01.02.2006