Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Козлов, О. Б. Лупанов, Ю. В. Нестеренко,
М. К. Потапов, В. А. Садовничий, П. Л. Ульянов, Ан-
дрей Борисович Шидловский (к 90-летию со дня рож-
дения), *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 183–190

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1734>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru под-
разумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 17:38:52

Андрей Борисович Шидловский

(к девяностолетию со дня рождения)

13 августа 2005 г. исполнилось девяносто лет Заслуженному деятелю науки РСФСР, Заслуженному профессору МГУ Андрею Борисовичу Шидловскому, крупному российскому учено-математику, одному из ведущих специалистов по теории чисел в нашей стране.

А. Б. Шидловский родился в 1915 г. в городе Алатыре Чувашской АССР. Его отец Борис Андреевич Шидловский происходил из обедневших дворян Симбирской губернии. После окончания Санкт-Петербургского политехнического института он служил землеустроителем, народным судьей, был членом Коллегии защитников, работал экономистом. Мать – Шидловская (Скороходова) Александра Всеволодовна окончила Симбирскую гимназию и много лет работала машинисткой в различных учреждениях.

А. Б. Шидловский прошел большой и сложный трудовой путь. В 1930 г. он окончил 7 классов средней школы в г. Ульяновске. После переезда семьи в Москву и окончания школы ФЗУ он несколько лет работал токарем на заводе. Во время учебы и позже подрабатывал, играя в духовом оркестре, и даже был его руководителем. В 1934 г. по комсомольской мобилизации он направляется на строительство первой очереди Московского метрополитена, где работает проходчиком и изолировщиком. После службы в Советской Армии в 1936–37 гг. он оканчивает вечернюю школу и в 1939 г. поступает учиться на механико-математический факультет Московского университета. В самом начале Великой Отечественной войны, 26 июня 1941 г., А. Б. Шидловский добровольцем уходит в армию. Свою службу он начал младшим топографом на Брянском фронте, а закончил – командиром батареи самоходных артиллерийских установок в Китае. В 1942 г. он вступил в кандидаты, а в 1944 г. в члены ВКП(б).

После демобилизации в 1946 г. А. Б. Шидловский продолжает по 1950 г. учебу на механико-математическом факультете МГУ, в 1953 г. заканчивает аспирантуру и в 1954 г. защищает кандидатскую диссертацию. Его научным руководителем был А. О. Гельфонд. В годы учебы в Университете и в аспирантуре Андрей Борисович, уже отец троих дочерей, преподает в вечерней школе, читает лекции и ведет практические занятия в техническом вузе. После окончания аспирантуры А. Б. Шидловский работает старшим преподавателем в Московском педагогическом институте им. В. И. Ленина, и затем там же доцентом и профессором по совместительству. В 1954 г. по инициативе А. Я. Хинчина он приглашается работать на механико-математический факультет МГУ. С этого времени вся его жизнь связана с Московским университетом. В 1955 г. он становится доцентом кафедры математического анализа. Защитив

в 1959 г. докторскую диссертацию, он с 1960 г. работает профессором кафедры теории чисел. С 1968 г., после смерти А. О. Гельфонда, и по 2002 г. Андрей Борисович заведует кафедрой теории чисел. За годы работы на механико-математическом факультете МГУ А. Б. Шидловский много лет читал основные курсы математического анализа и теории чисел, специальные курсы по теории чисел, руководил научными семинарами. Им подготовлены 15 кандидатов наук, трое из них защитили докторские диссертации.

Ряд лет он работал заместителем декана механико-математического факультета по учебной работе, был членом парткома и руководителем партийной организации факультета. Андрей Борисович много лет был членом Ученого совета механико-математического факультета, членом экспертной комиссии ВАК СССР, членом Московского математического общества. Он награжден тремя орденами и многими медалями.

Научные результаты Андрея Борисовича относятся к теории трансцендентных чисел, основные задачи которой состоят в исследовании иррациональности и трансцендентности различных чисел, и в более общей постановке – в доказательстве отсутствия между ними алгебраических соотношений над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Например, в 1873 г. Ш. Эрмит доказал, что число e не является корнем никакого многочлена с рациональными коэффициентами, т.е. трансцендентно. В 1882 г. Ф. Линдемман обобщил это утверждение, доказав, что при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$ значение экспоненциальной функции e^α трансцендентно. Отсюда при $\alpha = \pi i$ следует трансцендентность π . Еще один классический пример – седьмая проблема Гильберта о трансцендентности чисел вида α^β при алгебраических $\alpha \neq 0, 1$ и $\beta \notin \mathbb{Q}$. Эта проблема была решена в 1934 г. А. О. Гельфондом и независимо от него Т. Шнейдером. В частности, это утверждение означает трансцендентность числа $e^\pi = (-1)^{-i}$.

Первая, еще студенческая, работа А. Б. Шидловского, выполненная под непосредственным влиянием А. О. Гельфонда, посвящена исследованию количественных характеристик трансцендентности чисел вида α^β . Впоследствии Андрей Борисович полностью переключился на тематику, связанную с обобщением результатов Эрмита и Линдеммана.

Нужно сказать, что попытки обобщения этих результатов предпринимались сразу же после их доказательства. Функция $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ принадлежит к классу так называемых конфлюентных гипергеометрических функций

$${}_pF_q \left(\begin{matrix} a_1, \dots, a_p \\ b_1, \dots, b_q \end{matrix} \middle| z \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_1)_n \cdots (a_p)_n}{(b_1)_n \cdots (b_q)_n} \cdot \frac{z^n}{n!}, \quad p \leq q. \quad (1)$$

Здесь $(a)_0 = 1$, и $(a)_n = a(a+1) \cdots (a+n-1)$ при $n \geq 1$. Частичные результаты об арифметических свойствах значений таких функций при рациональном z и рациональных значениях параметров a_j, b_j получили А. Лежандр, А. Гурвиц, Е. Стридсберг, В. Майер. В 1929 г. К. Л. Зигель выделил существенные для исследования трансцендентности значений таких функций свойства (алгебраичность коэффициентов ряда Тейлора, рост коэффициентов и их общих знаменателей, наличие дифференциальных уравнений) и, постулировав их, определил некоторый общий класс функций, названных им E -функциями. Функция e^z , с которой связано название, и все функции (1) при рациональных a_j, b_j принадлежат к классу E -функций. Зигель предложил некоторый подход для исследования алгебраической независимости значений таких функций. Впрочем, сам он смог получить завершенные результаты лишь для совокупностей функций вида (1) при $q = 1$.

Программа, намеченная Зигелем, была полностью реализована в серии работ А. Б. Шидловского. Ему удалось доказать ряд фундаментальных теорем, до конца решающих проблемы трансцендентности и алгебраической независимости значений в алгебраических точках E -функций, удовлетворяющих линейным дифференциальным уравнениям. Приведем здесь одну из теорем А. Б. Шидловского, доказанную им в 1954 г.

ТЕОРЕМА 1. Пусть совокупность E -функций

$$f_1(z), \dots, f_m(z), \quad m > 1, \quad (2)$$

является решением системы линейных дифференциальных уравнений

$$y'_k = Q_{k,0}(z) + \sum_{i=1}^m Q_{k,i}(z)y_i, \quad k = 1, \dots, m, \quad (3)$$

где $Q_{k,i}(z) \in \mathbb{C}(z)$, а α – любое алгебраическое число, отличное от 0 и особых точек системы (3). Тогда для того, чтобы числа

$$f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)$$

были алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$, необходимо и достаточно, чтобы функции (2) были алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Доказательство алгебраической независимости решений линейных дифференциальных уравнений представляет собой достаточно сложную задачу, во многих случаях не решенную. Однако теорема 1 принципиально исчерпывает теоретико-числовую часть исследования арифметических свойств значений E -функций в алгебраических точках, сводя в общем случае арифметическую проблему к аналитической – доказательству алгебраической независимости функций.

Простейший пример для применения этой теоремы составляет набор функций $e^{a_1 z}, \dots, e^{a_m z}$. При алгебраических a_j , линейно независимых над $\mathbb{Q}$, эти функции принадлежат к классу E -функций и алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$. При $\alpha = 1$ из теоремы 1 следует так называемая теорема Линдемана–Вейерштрасса, утверждающая, что в указанных выше условиях числа

$$e^{a_1}, \dots, e^{a_m}$$

алгебраически независимы над $\mathbb{Q}$.

С помощью теоремы 1 А. Б. Шидловскому удалось впервые получить результаты о трансцендентности и алгебраической независимости значений гипергеометрических функций (1), удовлетворяющих дифференциальным уравнениям произвольных порядков, распространить идеи Зигеля на случай E -функций, удовлетворяющих неоднородным дифференциальным уравнениям, а также на мероморфные функции, представимые отношениями E -функций. Простота условий теоремы 1 позволила получить многочисленные конкретные приложения. Укажем здесь лишь один пример. Пусть

$$\psi_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{kn}}{(n!)^k}, \quad k \geq 1.$$

Тогда при любом алгебраическом $\alpha \neq 0$ любая конечная совокупность чисел вида

$$\psi_k^{(\ell)}(\alpha), \quad k \geq 1, \quad 0 \leq \ell < k,$$

алгебраически независима.

А. Б. Шидловский обобщил теорему 1 на случай алгебраически зависимых E -функций. Ему удалось доказать в общем случае равенство

$$\mathrm{tr} \deg_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}(f_1(\alpha), \dots, f_m(\alpha)) = \mathrm{tr} \deg_{\mathbb{C}(z)} \mathbb{C}(f_1(z), \dots, f_m(z))$$

и в ряде работ получить достаточные условия, обеспечивающие алгебраическую независимость значений $f_1(\alpha), \dots, f_\ell(\alpha)$, $\ell < m$, если E -функции $f_1(z), \dots, f_\ell(z)$ алгебраически независимы над $\mathbb{C}(z)$.

Теорема 1 дала возможность получить количественные характеристики алгебраической независимости значений E -функций в виде оценок так называемых мер алгебраической независимости. Эти результаты были получены в работах С. Ленга, самого А. Б. Шидловского, А. И. Галочкина. Они обобщили соответствующие оценки Зигеля, доказанные им в частном случае. Для E -функций с коэффициентами рядов из поля рациональных чисел или мнимого квадратичного поля А. Б. Шидловскому удалось получить практически неулучшаемые количественные результаты.

Общие теоремы А. Б. Шидловского стимулировали развитие методов доказательства алгебраической независимости решений линейных дифференциальных уравнений над $\mathbb{C}(z)$. Этой тематике посвящен ряд работ самого Андрея Борисовича, а также статьи его учеников И. И. Белогризова, В. А. Олейникова, Ю. В. Нестеренко, В. Х. Салихова и других. В связи с приложениями в теории трансцендентных чисел алгебраическая независимость решений линейных дифференциальных уравнений исследовалась в работах К. Малера, К. Ваананена, Ф. Бейкера, В. Д. Броунвелла и Г. Хекмана. Были также инициированы исследования по вычислению групп Галуа гипергеометрических дифференциальных уравнений (Ф. Бейкерс).

Доказательство теоремы 1 опиралось на очень точные оценки кратности нуля в фиксированной точке, которую может иметь линейная форма

$$R(z) = P_0(z) + P_1(z)f_1(z) + \cdots + P_m(z)f_m(z), \quad P_j(z) \in \mathbb{C}[z], \quad (4)$$

в зависимости от степеней многочленов $P_j(z)$. Этот подход оказал весьма сильное воздействие на развитие теории трансцендентных чисел. Перенесенный на функции, удовлетворяющие алгебраическим дифференциальным уравнениям, он позволил доказать результаты о мере трансцендентности значений эллиптических функций (Д. Броунвелл и Д. Массер) и исследовать арифметические свойства значений модулярных форм. В частности, эти идеи оказались принципиально важными для доказательства алгебраической независимости чисел π и e^π (Ю. В. Нестеренко). Оценки числа нулей многочленов на алгебраических группах позволили достичь существенного прогресса в доказательствах оценок степени трансцендентности полей, порожденных значениями показательной и эллиптической функций (П. Филиппон, М. Вальдшмидт, Г. Диас). Наилучшие в настоящее время оценки линейных форм от логарифмов алгебраических чисел получены с использованием оценок числа нулей многочленов на алгебраических группах (А. Бейкер, Г. Вюстхольц, Е. М. Матвеев). Были разработаны иные подходы для оценки кратности нуля линейной формы (4) (Д. Бертран, Ф. Бейкерс).

Идеи А. Б. Шидловского использовались для исследования других классов функций и прежде всего так называемых G -функций. Этот класс функций был введен Зигелем в 1929 г. Типичным примером здесь служат гипергеометрические функции с рациональными параметрами и конечным радиусом сходимости (М. С. Нурмагомедов, А. И. Галочкин, Г. Чудновский). Класс так называемых F -функций был исследован В. Г. Чирским.

Результаты А. Б. Шидловского хорошо известны среди специалистов как в нашей стране, так и за рубежом. Его книги переводились на иностранные языки. Он неоднократно выезжал за рубеж, участвуя в различных международных конференциях по теории чисел.

Исследования арифметических свойств значений E -функций интенсивно продолжаются и сейчас. В 2000 г. Д. Бертран опубликовал новое доказательство теоремы 1, основанное на использовании так называемых интерполяционных детерминантов. В 2004 г. Ф. Бейкер доказал старую гипотезу Зигеля о линейной независимости значений E -функций. Можно уверенно утверждать, что идеи, внесенные в теорию

трансцендентных чисел Андреем Борисовичем Шидловским, и созданная им теория успешно живут и развиваются в работах российских и зарубежных математиков.

*В. В. Козлов, О. Б. Лупанов, Ю. В. Нестеренко,
М. К. Потапов, В. А. Садовничий, П. Л. Ульянов*

Список печатных работ А. Б. Шидловского

- [41] “Всесоюзная конференция «Проблемы аналитической теории чисел и ее применения»”, *УМН*, **30:3** (1975), 198–200 (совм. с С. Б. Стечкиным и Р. В. Уждавиным).
- [42] “Алгебраическое число”, *Математическая энциклопедия*, **1**, Сов. энциклопедия, М., 1977, 195–198.
- [43] “К проблеме алгебраической независимости значений E -функций в трансцендентных точках”, *Тезисы докладов и сообщений Всесоюзной школы по теории чисел*, Изд-во Таджикск. ун-та, Душанбе, 1977, 135–136.
- [44] “Об оценках меры трансцендентности значений E -функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1977, № 6, 3–10.
- [45] “The arithmetic properties of values of some classes of analytic functions”, *Tagungsbericht 10/1977. Zahlentheorie (Diophantische Approximationen)*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1977, 18.
- [46] “On the estimates of the algebraic independence measures of the values of E -functions”, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, **27:4** (1979), 385–407.
- [47] “Об арифметических свойствах значений E -функций в алгебраических точках”, *Докл. АН СССР*, **248:1** (1979), 50–55.
- [48] “Об арифметических свойствах значений аналитических функций некоторых классов”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1979, № 6, 24–31.
- [49] “Об арифметических свойствах многочленов от значений E -функций, связанных алгебраическими уравнениями в поле рациональных функций”, *Acta Arith.*, **37** (1980), 405–426.
- [50] “Об арифметических свойствах значений E -функций, связанных алгебраическими уравнениями в поле рациональных функций”, *Докл. АН СССР*, **251:4** (1980), 808–812.
- [51] “Об оценке меры взаимной трансцендентности значений E -функций, связанных произвольными алгебраическими уравнениями над $\mathbb{C}(z)$ ”, *УМН*, **35:2** (1980), 227–228.
- [52] “Об оценках многочленов от значений E -функций”, *Матем. сб.*, **115:1** (1981), 3–39.
- [53] “Об оценках многочленов от значений аналитических функций”, *Тезисы докладов Международной конференции по комплексному анализу и приложениям*, Изд-во Болгарской АН, Варна, 1981, 78.
- [54] *Диофантовы приближения и трансцендентные числа*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1982.
- [55] “Estimates for the moduli of polynomials with algebraic coefficients at the values of E -functions”, *Studies in Pure Mathematics. To the Memory of Paul Turán*, ed. P. Erdős, Akadémiai Kiadó, Budapest, 1983, 635–657.
- [56] “Арифметические свойства значений E -функций”, *Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Теория трансцендентных чисел и ее приложения”*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1983, 160–162.

- [57] “Об основной лемме метода доказательства алгебраической независимости значений E -функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1983, № 6, 94–98.
- [58] *Введение в теорию чисел*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1984 (совм. с А. И. Галочкиным и Ю. В. Нестеренко).
- [59] “Всесоюзная конференция «Теория трансцендентных чисел и ее приложения»”, *УМН*, **39:6** (1984), 251–252 (совм. с А. И. Галочкиным и Н. И. Фельдманом).
- [60] “Об алгебраической независимости значений E -функций”, *Тезисы докладов Всесоюзной конференции “Теория чисел и ее приложения”*, Изд-во Тбилисского ун-та, Тбилиси, 1985, 290–293.
- [61] “Об алгебраической независимости значений E -функций в алгебраических точках”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, № 1, 30–33.
- [62] “О трансцендентности и алгебраической независимости значений некоторых классов аналитических функций”, *Труды МИАН*, **180** (1987), 232–234.
- [63] *Трансцендентные числа*, Наука, М., 1987.
- [64] “Памяти Евгения Михайловича Никишина”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1987, № 6, 88–91 (совм. с А. И. Аптекаревым, В. В. Козловым, А. М. Олевским, М. К. Потаповым, П. Л. Ульяновым).
- [65] “On arithmetic properties of the values of E -functions”, *New advances in transcendence theory* (Durham, 1986), Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1988, 347–351.
- [66] “К проблеме алгебраической независимости значений E -функций в алгебраических точках”, *Матем. заметки*, **45:1** (1989), 115–122.
- [67] “Об одном критерии алгебраической независимости значений E -функций в алгебраических точках”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1989, № 6, 17–21.
- [68] “О некоторых задачах об алгебраической независимости значений E -функций”, *Тезисы докладов Всесоюзной школы “Конструктивные методы и алгоритмы теории чисел”*, Ин-т матем. АН БССР, Минск, 1989, 167.
- [69] “Sobre las propiedades aritméticas de los valores de las E -funciones”, *Proceedings of the Congress on number theory* (Zarauz, 1984), Universidad del País Vasco, Bilbao, 1989, 28–42.
- [70] “Aproximación de los números algebraicos mediante números racional”, *Proceedings of the Congress on number theory* (Zarauz, 1984), Universidad del País Vasco, Bilbao, 1989, 138–147.
- [71] “El septimo problema de Hilbert”, *Proceedings of the Congress on Number Theory* (Zarauz, 1984), Universidad del País Vasco, Bilbao, 1989, 176–180.
- [72] *Aproximaciones diofánticas y números transcendentales*, Universidad del País Vasco, Bilbao, 1989; *Перев. на исп. яз. кн.* [54].
- [73] *Transcendental numbers*, de Gruyter, Berlin, 1989; *Перев. на англ. яз. кн.* [63].
- [74] “Аппроксимация Паде и диофантовы приближения”, *Приложение к кн.: Е. М. Никишин, Избранные вопросы математического анализа. Доклады по математике и ее приложениям. Т. 3, вып. 1*, Изд-во АН СССР и Минвуза РСФСР, М., 1990, 399–411 (совм. с Ю. В. Нестеренко и В. Н. Сорокиным).
- [75] “On the transcendence and algebraic independence of the values of E -functions at algebraic points”, *Tagungsbericht 40/1990. Diophantische Approximationen*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1990, 16.
- [76] “Вячеслав Алексеевич Олейников”, *УМН*, **45:1** (1990), 163–165 (совм. с В. И. Арнольдом, А. Г. Витушкиным, Е. А. Гориним, В. Я. Лином, Ю. В. Нестеренко, В. М. Тихомировым, П. Л. Ульяновым, М. А. Шубиным).

- [77] “К проблеме алгебраической независимости значений E -функций”, *Тезисы докладов республиканской научно-теоретической конференции “Теория чисел и ее приложения”*, Изд-во Ташкентского пед. ин-та, Ташкент, 1991, 136.
- [78] “Александр Адольфович Бухштаб (1905–1990)”, *УМН*, **46:1** (1991), 201–202 (совм. с И. П. Кубилосом, В. И. Нечаевым, С. Б. Стечкиным).
- [79] “Об алгебраической независимости значений E -функций”, *УМН*, **46:4** (1991), 175–176.
- [80] “On the arithmetic properties of the values of E -function”, *Analytic and probabilistic methods in number theory, Proceedings of the International conference in honor of J. Kubilius* (Palanga, 1991), New Trends in Probability and Statistics, **2**, eds. Manstavicius and F. Schweiger, VSP, Utrecht, 1992, 23–29.
- [81] “О трансцендентности значений одного подкласса E -функций”, *УМН*, **47:4** (1992), 215–216.
- [82] “Кафедра теории чисел”, *Математика в Московском университете*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1992, 84–111.
- [83] “О трансцендентности значений E -функций, являющихся решениями линейных дифференциальных уравнений второго порядка”, *Матем. сб.*, **184:5** (1993), 75–84.
- [84] “О линейной независимости значений E -функций в алгебраических точках”, *Тезисы докладов Международной конференции “Современные проблемы теории чисел”*, Изд-во Тульского пед. ин-та, Тула, 1993, 80.
- [85] “On linear independence of the values of E -functions of algebraic points”, *Tagungsbericht 43/1993. Diophantische Approximationen*, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, 1993, 14–15.
- [86] “О линейной независимости значений E -функций в алгебраических точках”, *Матем. заметки*, **55:2** (1994), 174–185.
- [87] “Об алгебраической независимости значений E -функций, связанных алгебраическими уравнениями над полем рациональных функций”, *Труды МИАН*, **207** (1994), 369–376.
- [88] “О линейной независимости значений E -функций, связанных одним алгебраическим уравнением над полем рациональных функций”, *Матем. заметки*, **58:5** (1995), 794–797.
- [89] “Памяти Наума Ильича Фельдмана”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1995, № 6, 108–109 (совм. с Ю. В. Нестеренко).
- [90] *Введение в теорию чисел*, 2-е доп. изд., Изд-во Моск. ун-та, М., 1995 (совм. с А. И. Галочкиным и Ю. В. Нестеренко).
- [91] “Евгений Михайлович Никишин”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1995, № 6, 110–111 (совм. с А. Н. Аптекаревым, В. А. Калягиным, В. В. Козловым, М. К. Потаповым, В. Н. Сорокиным, П. Л. Ульяновым, А. Т. Фоменко).
- [92] “Наум Ильич Фельдман”, *УМН*, **50:6** (1995), 157–162 (совм. с Н. М. Коробовым и Ю. В. Нестеренко).
- [93] “О линейной независимости значений E -функций”, *Матем. сб.*, **187:8** (1996), 93–108 (совм. с Ю. В. Нестеренко).
- [94] “К задаче о линейной независимости значений E -функций”, *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем., мех.*, 1996, № 4, 53–56.
- [95] “О критериях линейной и алгебраической зависимости значений E -функций в алгебраических точках”, *УМН*, **51:2** (1996), 179–180.
- [96] “О критериях линейной и алгебраической независимости значений E -функций в алгебраических точках”, *Диофантовы приближения*, Математические записки, **2**, Центр прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 1996, 114–120.

- [97] “О линейной независимости значений E -функций”, *Тезисы докладов международной конференции “Современные проблемы теории чисел и ее приложения”*, Издат. центр Тульского гос. пед. ун-та, Тула, 1996, 155.
- [98] “Об алгебраической независимости значений E -функций”, *Труды МИАН*, **218** (1997), 439–443.
- [99] “Об арифметических свойствах значений E -функций”, *Матем. заметки*, **66**:3 (1999), 452–458.
- [100] “О свойствах алгебраических уравнений, связывающих множество E -функций над полем рациональных функций”, *Матем. заметки*, **68**:5 (2000), 761–770.
- [101] “Кафедра теории чисел”, *Математика в Московском университете на пороге XXI века*, часть III, ред. О.Б. Лупанова и К.А. Рыбникова, Изд-во Центра прикл. исслед. при мех.-матем. ф-те МГУ, М., 2003, 126–139.