Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Сорокин, М-оценивание и проверка линейных гипотез в ARCH-модели, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1735>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:14:47

М-оценивание и проверка линейных гипотез в ARCH-модели

А. А. Сорокин

Введение. ARCH-модель является одной из наиболее популярных для исследования финансовых временных рядов. Она была предложена Р. Ф. Энглом в 1982 г. в [1] и определяется уравнениями

$$y_t = \sigma_t(\mathbf{a})\varepsilon_t, \quad \sigma_t^2(\mathbf{a}) = 1 + a_1 y_{t-1}^2 + \dots + a_p y_{t-p}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1)$$

где $\{y_t\}$ – наблюдения, $\mathbf{a} := (a_1, \dots, a_p)^*$ – вектор неизвестных параметров с $a_j \geq 0$ (* – знак транспонирования), $\sigma_t(\mathbf{a})$ – функция волатильности, $\{\varepsilon_t\}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестной функцией распределения $G(x)$.

В данной заметке мы построим и исследуем непараметрические М-оценки вектора $\mathbf{a}$. Родственные им GM-оценки были предложены и изучены для ARCH(1)-модели в [2]. Кроме того, мы предложим два теста для проверки гипотез о размерности уравнения (1). Один из них будет основан непосредственно на М-оценке, а второй – на функции $\mathbf{l}_n(\theta)$, определяющей оценку. Мы определим их мощность при локальных альтернативах.

Следующее условие является достаточным для существования стационарного решения уравнения (1), которое мы и будем рассматривать в дальнейшем:

УСЛОВИЕ 1. $E\varepsilon_1 = 0$, $E\varepsilon_1^2 < \infty$, $E\varepsilon_1^2(a_1 + \dots + a_p) < 1$.

Построение и свойства М-оценок. Будем предполагать, что $G(x)$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега с плотностью $g(x)$. Положим для $t = 1, \dots, n$

$$\mathbf{Y}_{t-1} := (y_{t-1}, \dots, y_{t-p})^*, \quad \sigma_t^2(\theta) := 1 + \theta_1 y_{t-1}^2 + \dots + \theta_p y_{t-p}^2, \quad \theta \in \mathbb{R}^p.$$

Определим остатки в модели (1) соотношением $\varepsilon_t(\theta) = y_t/\sigma_t(\theta)$, если $\sigma_t^2(\theta) > 0$, и положим $\varepsilon_t(\theta) = 1$ в противном случае. Перейдем к построению М-оценок. Сначала напомним, что уравнение максимального правдоподобия (для модели (1) с начальным условием $\mathbf{Y}_0 = \mathbf{0}$) имеет вид

$$n^{-1/2} \sum \mathbf{e}(\mathbf{Y}_{t-1}, \theta) \psi_{ML}(\varepsilon_t(\theta)) = \mathbf{0}, \quad (2)$$

где $\psi_{ML} := 1 + xg'(x)/g(x)$, $\mathbf{e}(\mathbf{V}, \theta) := (e_1(\mathbf{V}, \theta), \dots, e_p(\mathbf{V}, \theta))^*$, $e_j(\mathbf{V}, \theta) := V_j/(1 + \theta_1 V_1^2 + \dots + \theta_p V_p^2)$, $\mathbf{V}, \theta \in \mathbb{R}^p$, $j = 1, \dots, p$. (Здесь и ниже суммирование проводится по t от 1 до n и пределы берутся при $n \rightarrow \infty$.) Зафиксируем некоторую $\psi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Кажется естественным определить М-оценку как решение уравнения (2) с ψ вместо неизвестной ψ_{ML} . Оказывается, для состоятельности такой оценки необходимо выполнение соотношений $E\psi(\varepsilon_1) = 0$ и $I(\psi) := \int xg(x) d\psi(x) \neq 0$. При неизвестной $g(x)$ подобрать подходящую ψ не удается (см. подробности в [2]). Поэтому мы определим М-оценку при помощи уравнения

$$\mathbf{l}_n(\theta) := n^{-1/2} \sum \mathbf{e}(\mathbf{Y}_{t-1}, \theta) [\psi(\varepsilon_t(\theta)) - \bar{\psi}_n(\theta)] = \mathbf{0}, \quad (3)$$

где $\bar{\psi}_n(\theta) := n^{-1} \sum \psi(\varepsilon_t(\theta))$, избавляясь тем самым от условия $E\psi(\varepsilon_1) = 0$. Пусть S – ковариационная матрица вектора $\mathbf{e}(\mathbf{Y}_0, \mathbf{a})$, $\Lambda := -2^{-1}I(\psi)S$. Нам понадобится следующее

УСЛОВИЕ 2. $g(x) > 0$, $\lim_{|x| \rightarrow \infty} xg(x) = 0$, $\sup_x (1+x^2)|g'(x)| < \infty$, $\int |g'(x)x| dx < \infty$.

Следующая теорема устанавливает асимптотическое линейное разложение процесса $\mathbf{l}_n(\theta)$. Она является следствием из результатов [2] для взвешенных эмпирических процессов.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены условия 1 и 2, $E|\varepsilon_1|^{8+\delta} < \infty$ для некоторого $\delta > 0$ и $\text{var} |\varepsilon_1|^\infty < \infty$. Тогда для любого $b < \infty$

$$\sup_{\|\theta - \mathbf{a}\| \leq n^{-1/2}b} \|\mathbf{l}_n(\theta) - \mathbf{l}_n(\mathbf{a}) - n^{1/2}\Lambda(\theta - \mathbf{a})\| = o_p(1).$$

Отметим, что утверждение теоремы 1 справедливо и для разрывных ψ . Прямым ее следствием является следующий результат.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия теоремы 1, ψ непрерывна и $I(\psi) \neq 0$. Тогда с вероятностью, стремящейся к 1, существует решение уравнения (3) $\hat{\mathbf{a}}_n$, для которого $n^{1/2}(\hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{a}) = \Lambda^{-1}\mathbf{l}_n(\mathbf{a}) + o_p(1)$, $n^{1/2}(\hat{\mathbf{a}}_n - \mathbf{a}) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \Sigma)$, где $\Sigma = h^2(\psi)S^{-1}$, $h^2(\psi) := 4D\psi(\varepsilon_1)/[I(\psi)]^2$.

Несложно проверить, что $\Sigma \geq \Sigma_{\text{opt}}$, где Σ_{opt} соответствует случаю $\psi = \psi_{\text{opt}} := \psi_{ML}$. Следовательно, М-оценка с $\psi = \psi_{\text{opt}}$ будет иметь наименьшую матрицу ковариаций.

Проверка гипотезы о размерности модели. Пусть фиксировано некоторое $1 \leq q < p$. Для произвольного вектора $\theta \in \mathbb{R}^p$ будем полагать $\theta = (\theta^{1*}, \theta^{2*})^*$, где $\theta^1 \in \mathbb{R}^q$, $\theta^2 \in \mathbb{R}^{p-q}$. Тогда гипотеза $H_0 := \{\mathbf{a}^2 = \mathbf{0}\}$ состоит в том, что процесс $\{y_t\}$ удовлетворяет уравнению (1) размерности $q < p$. Чтобы описать альтернативу к H_0 , предположим, что при $n \geq 1$ наблюдения удовлетворяют (1) с параметром $\mathbf{a}'_n := \mathbf{a} + n^{-1/2}\mathbf{d}$, замещающим $\mathbf{a}$, где $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^p$, $d_j \geq 0$. Тогда локальная альтернатива H_{1n} состоит в том, что $\mathbf{a}^2 = \mathbf{0}$, $\mathbf{d}^2 \neq \mathbf{0}$. Обычный подход для нахождения распределения тестовых статистик при локальных альтернативах использует третью лемму Ле Кама. Мы же используем аналоги теорем 1 и 2, справедливые при H_{1n} .

Пусть $\hat{\Sigma}_n$ – произвольная состоятельная оценка Σ . Обозначим $\Sigma_{2,2}$ и $\hat{\Sigma}_{n,2,2}$ матрицы, образованные последними $(p-q)$ строками и столбцами матриц Σ и $\hat{\Sigma}_n$. Наш первый тест для проверки H_0 основан на естественной статистике $R_n^2 := n(\hat{\mathbf{a}}_n^2)^* \hat{\Sigma}_{n,2,2}^{-1}(\hat{\mathbf{a}}_n^2)$. Обозначим $\chi^2(p-q)$ и $\chi^2(p-q, b^2)$ соответственно центральное и нецентральное с параметром b^2 распределения хи-квадрат. Имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3. Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда при гипотезе H_0 $R_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q)$, а при альтернативе H_{1n} $R_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q, \mathbf{d}^{2*}\Sigma_{2,2}^{-1}\mathbf{d}^2)$.

Для построения теста второго типа мы используем подход, предложенный в [3]. Пусть $\hat{\mathbf{b}}_n$ – произвольная $n^{1/2}$ -состоятельная оценка $\mathbf{a}$. Как и ранее, представим $\hat{\mathbf{b}}_n$ в виде $(\hat{\mathbf{b}}_n^{1*}, \hat{\mathbf{b}}_n^{2*})^*$ и положим $\hat{\mathbf{b}}_n^0 := (\hat{\mathbf{b}}_n^{1*}, \mathbf{0}^*)^*$. Обозначим Pr ортогональную проекцию на последние $(p-q)$ координат. Пусть

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \Sigma_{1,1} & \Sigma_{2,1}^* \\ \Sigma_{2,1} & \Sigma_{2,2} \end{pmatrix}, \quad C := \Sigma_{1,1} - \Sigma_{2,1}^* \Sigma_{2,2}^{-1} \Sigma_{2,1},$$

$$V := [h^2(\psi)D\psi(\varepsilon_1)]^{-1/2} \begin{pmatrix} C^{1/2} & \Sigma_{2,1}^* \Sigma_{2,2}^{-1/2} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{2,2}^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Можно проверить, что $VV^* = (D\psi(\varepsilon_1)S)^{-1}$. Пусть $\hat{V}_n$ – состоятельная оценка V . Рассмотрим в качестве статистики второго теста величину $Q_n^2 := n\|\text{Pr} \hat{V}_n^* \mathbf{l}_n(\hat{\mathbf{b}}_n^0)\|^2$, где $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

ТЕОРЕМА 4. Пусть выполнены условия теоремы 1 и $I(\psi) \neq 0$. Тогда при гипотезе H_0 $Q_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q)$, а при альтернативе H_{1n} $Q_n^2 \xrightarrow{d} \chi^2(p-q, \mathbf{d}^{2*}\Sigma_{2,2}^{-1}\mathbf{d}^2)$.

В силу теорем 3 и 4, статистики R_n^2 и Q_n^2 асимптотически эквивалентны, но использование последней не требует непрерывности ψ и построения $\hat{\mathbf{a}}_n$. Отметим также, что оба теста имеют наибольшую мощность при $\psi = \psi_{\text{opt}}$.

Список литературы

- [1] R. F. Engle, *Econometrica*, **50**:4 (1982), 987–1007. [2] M. V. Boldin, *Math. Methods Statist.*, **9**:1 (2000), 65–89. [3] J. P. Kreiss, *Ann. Statist.*, **18**:3 (1990), 1470–1482.

А. А. Сорокин (A. A. Sorokin)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: aasor@mail.ru

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

01.02.2006