Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. П. Суетин, Спектральные свойства некоторого класса дискретных операторов Штурма–Лиувилля, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 2, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1737>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 12:25:56

Спектральные свойства некоторого класса дискретных операторов Штурма–Лиувилля

С. П. Суетин

1. Хорошо известно [1]–[4], что существует тесная связь между свойствами дискретного оператора Штурма–Лиувилля и ортогональными многочленами. Отметим работу Никишина [3] (см. также [5]–[7]), который был первым, кто исходя из методов теории ортогональных многочленов и непрерывных дробей получил новые результаты для дискретного оператора Штурма–Лиувилля. Однако как правило речь шла о *классическом случае*, в котором существенная часть носителя меры ортогональности σ является отрезком. В настоящей заметке мы, придерживаясь в целом *подхода Никишина*, рассматриваем некоторый класс дискретных операторов Штурма–Лиувилля, для которых в существенной части носителя меры σ имеется *конечное число лагун*.

2. Пусть σ – положительная единичная борелевская мера на $\mathbb{R}$, $\text{supp } \sigma \in \mathbb{R}$, $\hat{\sigma}(\lambda) := \int \frac{d\sigma(x)}{\lambda - x}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \text{supp } \sigma$. Для чебышевской непрерывной дроби $\frac{1}{\lambda - b_1 - \frac{a_1^2}{\lambda - b_2 - \dots}}$ функции $\hat{\sigma}(\lambda)$ имеем: все $b_n, a_n \neq 0$ – вещественны, а знаменатели подходящих дробей p_n/q_n , $n = 1, 2, \dots$, обладают следующими свойствами: полиномы q_n ортогональны по мере σ и условиями $q_n(\lambda) = k_n \lambda^n + \dots$, $k_n > 0$ и $\int q_n(x) q_m(x) d\sigma(x) = \delta_{nm}$ определены однозначно. Функция

$$r_n(\lambda) := \int \frac{q_n(x) d\sigma(x)}{\lambda - x} = \frac{1}{q_n(\lambda)} \int \frac{q_n^2(x)}{\lambda - x} d\sigma(x) = \frac{1}{k_n \lambda^{n+1}} + \dots \quad (1)$$

называется функцией второго рода. Соответствующие трем функциям p_n , q_n и r_n последовательности удовлетворяют одному и тому же рекуррентному соотношению:

$$a_n f_n(\lambda) = (\lambda - b_n) f_{n-1}(\lambda) - a_{n-1} f_{n-2}(\lambda), \quad n = 1, 2, \dots, \quad a_0 = 1, \quad (2)$$

если положить: $p_{-1}(\lambda) \equiv -1$, $p_0(\lambda) \equiv 0$; $q_{-1}(\lambda) \equiv 0$, $q_0(\lambda) \equiv 1$; $r_{-1}(\lambda) \equiv 1$, $r_0(\lambda) \equiv \hat{\sigma}(\lambda)$.

3. Пусть $\{e_j\}$ – стандартный базис в $\ell^2(\mathbb{N})$. Определим [3] на этом базисе линейный оператор $J: \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ – *дискретный оператор Штурма–Лиувилля* – равенствами:

$$\begin{aligned} J e_1 &= a_1 e_2 + b_1 e_1, \\ J e_n &= a_n e_{n+1} + b_n e_n + a_{n-1} e_{n-1}, \quad n = 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (3)$$

Хорошо известно [1], [3] что спектральная мера J совпадает с σ , а спектр – с $\text{supp } \sigma$.

Пусть $a_n \rightarrow 1/2$, $b_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда [3], [8] для спектра J имеем: $\text{ess sup } \sigma = [-1, 1]$. Следуя [9] *решением Вейля* системы (2) назовем последовательность $\{w_{n+1}(z)\}_{n=-1}^\infty$, где $w_0(z) \equiv 1$, $w_n(z) = \langle e_n, (\lambda - J)^{-1} e_1 \rangle$, $n = 1, 2, \dots$, $|z| < 1$, $\lambda = (z + 1/z)/2 \notin \text{supp } \sigma$.

В [9; теорема 2.2] доказано, что при условии $a_n \rightarrow 1/2$, $b_n \rightarrow 0$ для $|z| < 1$ такого, что $\lambda \notin \text{supp } \sigma$, существование предела $c_\infty(z) \neq 0$ для $c_n(z) := z^n q_n(\lambda)$ эквивалентно существованию предела $v_\infty(z) \neq 0$ для $v_n(z) := z^{-n} w_n(z)$. При этом

$$c_\infty(z) v_\infty(z) = \frac{1}{1 - z^2}. \quad (4)$$

Используя спектральную теорему, для решения Вейля получаем: $w_{n+1}(z) = r_n(\lambda)$, $\lambda \notin \text{supp } \sigma$. Тем самым, из (4) вытекает формула *сравнительной асимптотики* для

q_n и r_n :

$$q_n(\lambda)r_n(\lambda) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 - 1}} \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \lambda \in \overline{\mathbb{C}} \setminus \text{supp } \sigma. \quad (5)$$

В [10] доказано, что (5) имеет место при условии: $\text{supp } \sigma = [-1, 1]$ и $\sigma' > 0$ п.в. на $[-1, 1]$; в [11] показано, что (5) сохраняется, если к такой мере добавить конечное число точечных масс, расположенных вне $[-1, 1]$. Аналог теоремы Гончара оказывается справедливым и для случая, когда в отрезке $[-1, 1]$ имеется *конечное число лагун*.

4. Положим $S := \bigsqcup_{j=1}^{g+1} \Delta_j$, где $\Delta_j = [e_{2j-1}, e_{2j}]$, $j = 1, 2, \dots, g+1$, $h(\lambda) = \prod_{j=1}^{2g+2} (\lambda - e_j)$. Всюду в дальнейшем предполагается, что мера σ имеет следующий вид:

$$d\sigma(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\rho(x)}{\sqrt{-h(x)}} dx \quad \text{на } S, \quad d\sigma(x) = \sum_{k=1}^m \rho_k \delta(x - \alpha_k) dx \quad \text{вне } \widehat{S}, \quad (6)$$

где выбрана такая ветвь квадратного корня, что $\sqrt{a} > 0$ при $a > 0$, функция $\rho \neq 0$ и голоморфна на S , все $\rho_k > 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R} \setminus \widehat{S}$, $\widehat{S}$ – выпуклая оболочка S .

Пусть $\mathfrak{R}: w^2 = h(\lambda)$ – гиперэллиптическая риманова поверхность рода g , для точек $\lambda = (\lambda, w)$ которой имеем: $\lambda^{(1)} = (\lambda, \sqrt{h(\lambda)})$ на первом (открытом) листе $D^{(1)}$, $\lambda^{(2)} = (\lambda, -\sqrt{h(\lambda)})$ на втором листе $D^{(2)}$. Первый лист $D^{(1)}$ будем отождествлять с “физической” областью D .

Рассмотрим следующую систему из g дифференциальных уравнений относительно набора из g точек $\lambda_1(t), \dots, \lambda_g(t)$ на $\mathfrak{R}$, $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{d\lambda_j}{dt} = - \frac{w(\lambda_j)}{\prod_{k \neq j} (\lambda_j - \lambda_k)} \int_{e_{2g+2}}^{+\infty} \frac{\prod_{k \neq j} (x - \lambda_k)}{w(x)} dx, \quad j = 1, 2, \dots, g. \quad (7)$$

Если все $\lambda_j(0) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$, то система (7) интегрируется в явном виде преобразованием Абеля и все $\lambda_j(t) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$ при $t > 0$ (см. [12]).

5. Основным результатом настоящей работы является следующая

ТЕОРЕМА. При условии (6) для $\lambda \notin \text{supp } \sigma$ имеем:

$$q_n(\lambda)r_n(\lambda) = \frac{\prod_{j=1}^g (\lambda - \lambda_j(n))}{\sqrt{h(\lambda)}} + o(\delta^n) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad \text{где } \delta \in (0, 1),$$

$\lambda_1(n), \dots, \lambda_g(n)$ соответствуют решению $\lambda_1(t), \dots, \lambda_g(t)$ системы (7), взятому при $t = n \in \mathbb{N}$; начальные условия $\lambda_j(0) \in [e_{2j}, e_{2j+1}]$ при $j = 1, \dots, g$.

Доказательство теоремы основано на стандартной технике [12], [13] исследования асимптотических свойств ортогональных многочленов.

Список литературы

- [1] К. М. Case, *J. Math. Phys.*, **15**:12 (1974), 2166–2174. [2] J. S. Geronimo, К. М. Case, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **258**:2 (1980), 467–494. [3] Е. М. Никишин, *Труды сем. им. И. Г. Петровского*, 1984, № 10, 3–77. [4] В. Simon, *Adv. Math.*, **137** (1998), 82–203. [5] А. И. Аптекарев, Е. М. Никишин, *Матем. сб.*, **121(163)**:3(7) (1983), 327–358. [6] А. И. Аптекарев, *Матем. сб.*, **125(167)**:2(10) (1984), 231–258. [7] В. А. Калягин, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100. [8] В. Simon, R. Killip, *Ann. of Math.*, **158** (2003), 253–321. [9] D. Damanik, В. Simon, *arXiv: math.SP/0502486*. [10] Е. А. Рахманов, *Матем. сб.*, **103(145)**:2(6) (1977), 237–252. [11] А. А. Гончар, *Матем. сб.*, **97(139)** (1975), 607–629. [12] С. П. Суетин, *Матем. сб.*, **193**:12 (2002), 105–133. [13] А. А. Гончар, С. П. Суетин, *Об аппроксимациях Паде мероморфных функций марковского типа*, Современные проблемы математики, **5**, Математический ин-т им. В. А. Стеклова РАН, М., 2004.

С. П. Суетин (S. P. Suetin)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: suetin@mi.ras.ru

Представлено А. Г. Сергеевым
Принято редколлегией
02.03.2006