Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Карацуба, М. А. Королёв, Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 3–92

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1741>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 12:41:05

УДК 511

Поведение аргумента дзета-функции Римана на критической прямой

А. А. Карацуба, М. А. Королёв

Доказываются теоремы о количестве нулей дзета-функции Римана, лежащих в прямоугольниках малой высоты правее критической прямой, и на основе этих теорем — теоремы о поведении аргумента дзета-функции на критической прямой.

Библиография: 34 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Глава I. Плотностные теоремы	4
§ 1. Оценка тригонометрической суммы специального вида и ее следствия	5
§ 2. Оценка кратного интеграла, содержащего “успокаивающий” множитель Сельберга	13
§ 3. Доказательство плотностной теоремы	23
§ 4. Верхние оценки количества нулей $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольниках малой высоты правее критической прямой	28
Глава II. Поведение аргумента дзета-функции на критической прямой ...	40
§ 1. Вспомогательные утверждения	42
§ 2. Приближение функции $S(t)$ отрезком ряда Дирихле	48
§ 3. Моменты функций $S(t)$ и $S_1(t+h) - S_1(t)$	58
§ 4. Число перемен знака функции $S(t)$	69
§ 5. Верхняя оценка длины промежутка, содержащего точку перемены знака $S(t)$	72
§ 6. Распределение значений функций $ S(t) $ и $ S_1(t+h) - S_1(t) $	82
§ 7. Верхняя оценка количества нулей $\zeta(s)$ с заданной кратностью	85
Список литературы	91

Введение

Настоящая статья является продолжением статьи авторов [1], где доказаны простейшие теоремы о поведении $S(t)$ и теоремы о верхних и нижних оценках $|S(t)|$. Важную роль при исследовании $S(t)$ играют плотностные теоремы, т.е. теоремы о верхней границе числа нулей $\zeta(s)$, лежащих правее критической прямой. Доказательству плотностных теорем посвящена первая глава статьи.

Во второй главе плотностные теоремы наряду с формулами А. Сельберга применяются к задачам о числе перемен знака функции $S(t)$, о распределении значений этой функции на отрезках вещественной оси, а также к оценке сверху количества комплексных нулей $\zeta(s)$, кратность которых равна данному числу. Здесь мы пользуемся введенными в [1] обозначениями и определениями, в частности, леммами приложения; ссылка на лемму с номером α из приложения имеет вид: “Лемма $\alpha\Pi$ ”. Новые обозначения вводятся по мере необходимости по ходу изложения.

Глава I. Плотностные теоремы

В 1946 г. А. Сельберг создал метод (см. [2]), позволивший получить ряд новых результатов о поведении функции $S(t)$. В основе этого метода лежала следующая плотностная теорема.

Пусть $N(\sigma, T)$ – число нулей дзета-функции Римана в области $\sigma < \operatorname{Re} s \leq 1$, $0 < \operatorname{Im} s \leq T$. Если $T^a \leq H \leq T$, где a – фиксированное число, $1/2 < a \leq 1$, то равномерно по σ , $1/2 \leq \sigma \leq 1$, справедлива оценка:

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T) = O\left(H(\ln T)\left(\frac{H}{\sqrt{T}}\right)^{-\frac{1}{2}(\sigma-\frac{1}{2})}\right).$$

Наибольший интерес эта оценка представляет при σ , близких к $1/2$. Одним из ее следствий является тот факт, что “почти все” нули $\zeta(s)$ лежат в очень узкой окрестности критической прямой $\operatorname{Re} s = 1/2$. Полагая

$$H = T, \quad \sigma = \frac{1}{2} + \frac{4B \ln \ln T}{\ln T}, \quad \text{где } B > 1,$$

находим:

$$N(\sigma, 2T) - N(\sigma, T) \ll (N(2T) - N(T))(\ln T)^{-B}.$$

Это неравенство означает, что большая часть нулей $\zeta(s)$ с условием $T < \operatorname{Im} s \leq 2T$ лежит в узкой полосе

$$\left|\sigma - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{4B \ln \ln T}{\ln T},$$

ширина которой стремится к нулю с ростом T , т.е. справедливо утверждение, близкое к гипотезе Римана. По этой причине и некоторые следствия плотностной теоремы близки к следствиям гипотезы Римана.

В настоящей главе мы приводим доказательства двух утверждений (теоремы 1 и 2), которые являются аналогами плотностной теоремы А. Сельберга. Эти утверждения представляют собой равномерные по σ оценки разности $N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T)$ для значений H , меньших $\sqrt{T}$.

§ 1. Оценка тригонометрической суммы специального вида и ее следствия

Утверждения этого параграфа носят вспомогательный характер. Здесь помещены оценки тригонометрических сумм, которые возникают при доказательстве плотностной теоремы 1. Именно нетривиальная оценка таких сумм позволяет перенести утверждение сформулированной выше теоремы А. Сельберга на случай малых H , $H < \sqrt{T}$.

В 1–3 мы будем придерживаться следующих обозначений: ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $L = \ln T$, $k = [L]$, $H_1 = HL^{-1}$, $\Delta = H_1^{-1}L$, $x = T^{0.1\varepsilon}$, $D = (2H_1)^k$.

ЛЕММА 1. Пусть вещественная функция $f(u)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ со своими производными до n -го порядка включительно ($n \geq 2$). Пусть, кроме того,

$$0 < \lambda_n \leq |f^{(n)}(u)| \leq r\lambda_n, \quad b - a \geq 1, \quad N = 2^{n-1}.$$

Тогда справедлива оценка:

$$\left| \sum_{a < m \leq b} e^{2\pi i f(m)} \right| \leq c \left(r^{\frac{2}{N}} (b - a) \lambda_n^{\frac{1}{2N-2}} + (b - a)^{1-\frac{2}{N}} \lambda_n^{-\frac{1}{2N-2}} \right).$$

Это – известная лемма Корпута. Ее доказательство см. в [3; с. 110], [4; с. 362].

ЛЕММА 2. Пусть вещественная функция $f(u)$ удовлетворяет на отрезке $[a, b]$ следующим условиям:

- 1) $f(u)$ имеет непрерывную четвертую производную;
- 2) при некоторых положительных числах A и U с условиями $0 < c_1 U \leq A \leq c_2 U$, $0 < b - a \leq U$ выполняются неравенства

$$c_3 A^{-1} \leq f^{(2)}(u) \leq c_4 A^{-1}, \quad |f^{(3)}(u)| \leq c_5 A^{-1} U^{-1}, \quad |f^{(4)}(u)| \leq c_6 A^{-1} U^{-2}.$$

Тогда, определяя числа x_n из уравнения $f'(x_n) = n$, будем иметь:

$$\sum_{a < n \leq b} e^{2\pi i f(n)} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{f'(a) \leq n \leq f'(b)} e^{2\pi i (f(x_n) - n x_n)} + O(R),$$

где $R = \sqrt{A} + \ln(2 + UA^{-1})$, а постоянная в знаке O зависит только от величин $c_1, \dots, c_6$.

Эта лемма является упрощенным вариантом известной формулы Харди–Литтлвуда–Виноградова–Корпута замены тригонометрической суммы более короткой (см. [4; с. 67–68], [5]).

Следующая лемма об оценке двойной тригонометрической суммы W играет главную роль при доказательстве плотностной теоремы о количестве нулей $\zeta(s)$ в узких прямоугольниках критической полосы. Варианты этой леммы содержатся в [4; с. 178–179], [6]–[8]. Отметим также, что лемма может быть доказана и при меньших значениях H , т.е. при $H = T^\beta$, $\beta < 27/82$. Для этого достаточно воспользоваться оценками тригонометрических сумм, полученными Э. Бомбье-ри, Г. Иванцом, Г. А. Колесником, М. Хаксли. Однако это меньшее значение β незначительно отличается от $27/82$, а применяемые для доказательства средства исключительно громоздки.

ЛЕММА 3. Пусть $0 < \xi, \eta \leq 1$, h – целое неотрицательное число, $|\xi - \eta + h| \geq x^{-2}$, $T^{27/82} \leq M \leq x\sqrt{T}$, $M < M_1 \leq 4M$. Тогда для двойной тригонометрической суммы W ,

$$W = \sum_{0 \leq h \leq 4MH^{-1}L^2+1} \left| \sum_{M < m \leq M_1} \left(\frac{m+h+\xi}{m+\eta} \right)^{iT} \right|,$$

справедлива следующая оценка:

$$W \ll MT^{-4\varepsilon/3}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Тривиальная оценка суммы W имеет вид: $W \ll M + (ML)^2 H^{-1}$. Оценка леммы 3 может быть записана следующим образом:

$$W \ll MT^{-4\varepsilon/3} + (ML)^2 H^{-1} \cdot (HM^{-1}T^{-4\varepsilon/3}) \ll (M + (ML)^2 H^{-1})T^{-\varepsilon/3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем оценивать верхнюю грань модуля суммы по m , причем оценку будем проводить по-разному, в зависимости от величины M .

1. Случай “малых” M . Пусть M удовлетворяет неравенствам

$$T^{27/82} \leq M \leq T^{55/164}.$$

К сумме по m применим лемму 1, полагая в ней

$$f(u) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{u+h+\xi}{u+\eta}, \quad a = M, \quad b = M_1, \quad n = 3, \quad \lambda_3 = c_1 |h + \xi - \eta| M^{-4} T;$$

получаем:

$$\begin{aligned} W &\ll \sum_{0 \leq h \leq 4MH^{-1}L^2+1} (M|h + \xi - \eta|^{1/6} (M^{-4}T)^{1/6} + M^{1/2} |h + \xi - \eta|^{-1/6} (M^{-4}T)^{-1/6}) \\ &\ll (M^{3/2} T^{1/6} H^{-7/6} + M^2 T^{-1/6} H^{-5/6}) L^2 \ll MT^{-4\varepsilon/3}. \end{aligned}$$

Следовательно, для случая “малых” M утверждение леммы доказано.

2. Случай “больших” M . Пусть M удовлетворяет неравенствам

$$T^{55/164} \leq M \leq x\sqrt{T}.$$

Сумму по h разобьем на две, причем в W_1 включим слагаемые с $h \leq x^2$, а в W_2 – слагаемые с $x^2 < h \leq 4MH^{-1}L^2 + 1$. Имеем:

$$W = W_1 + W_2,$$

где

$$\begin{aligned} W_1 &= \sum_{0 \leq h \leq x^2} \left| \sum_{M < m \leq M_1} \left(\frac{m+h+\xi}{m+\eta} \right)^{iT} \right|, \\ W_2 &= \sum_{x^2 < h \leq 4MH^{-1}L^2+1} \left| \sum_{M < m \leq M_1} \left(\frac{m+h+\xi}{m+\eta} \right)^{iT} \right|. \end{aligned}$$

Сумму W_1 оценим так же, как оценивали W в п. 1, т.е. пользуясь порядком третьей производной функции, стоящей в экспоненте:

$$\begin{aligned} W_1 &\ll \sum_{0 \leq h \leq x^2} (M|h + \xi - \eta|^{1/6} (M^{-4}T)^{1/6} + M^{1/2}|h + \xi - \eta|^{-1/6} (M^{-4}T)^{-1/6}) \\ &\ll M^{1/3}T^{1/6}x^{7/3} + M^{7/6}T^{-1/6}x^{5/3} \ll MT^{-4\epsilon/3}, \end{aligned}$$

так как $T^{55/164} < M \leq x\sqrt{T}$.

Рассмотрим теперь W_2 . Сумму по m заменим более короткой, применяя для этого лемму 2. Возьмем в ней

$$f(u) = \frac{T}{2\pi} \ln \frac{u + h + \xi}{u + \eta}, \quad a = M, \quad b = M_1, \quad U = M, \quad A = (|h + \xi - \eta|M^{-3}T)^{-1}.$$

Так как $h \leq 4MH^{-1}L^2 + 1$, $M > T^{55/164}$, то

$$|h + \xi - \eta|M^{-3}T \ll M^{-2}H^{-1}L^2 \ll T^{-\epsilon}L^2 \ll 1,$$

т.е. $A \gg 1$. Кроме того, так как $h > x^2$ и $M \leq x\sqrt{T}$, то $A \ll (x^2M^{-3}T)^{-1} \ll M$. Остальные условия леммы также выполняются. Определим x_n из уравнения

$$f'(x_n) = \frac{T}{2\pi} \left(\frac{1}{x_n + h + \xi} - \frac{1}{x_n + \eta} \right) = n,$$

так что

$$x_n = -\frac{h + \xi + \eta}{2} + \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi(-n)} + \left(\frac{h + \xi - \eta}{2} \right)^2}.$$

Заметим, что n принимает значения отрицательных чисел из промежутка $[-N_1, -N)$, где

$$N_1 = \frac{(h + \xi - \eta)T}{2\pi(M + h + \xi)(M + \eta)}, \quad N = \frac{(h + \xi - \eta)T}{2\pi(M_1 + h + \xi)(M_1 + \eta)}.$$

Применяя лемму 2, мы получаем следующую формулу, в которой $(-n)$ заменено на n :

$$\sum_{M < m \leq M_1} \left(\frac{m + h + \xi}{m + \eta} \right)^{iT} = \frac{1+i}{\sqrt{2}} \sum_{N \leq n \leq N_1} \frac{e^{2\pi i g(n)}}{\sqrt{f''(x_n)}} + O(\sqrt{A} + \ln T),$$

а $g(n) = f(x_{-n}) + nx_{-n}$. Так как величина x_{-n} ,

$$x_{-n} = \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi n} + \left(\frac{h + \xi - \eta}{2} \right)^2} - \frac{h + \xi + \eta}{2},$$

с ростом n монотонно убывает, то

$$f''(x_{-n}) = \frac{T(h + \xi - \eta)}{(x_{-n} + h + \xi)(x_{-n} + \eta)} \left(\frac{1}{x_{-n} + h + \xi} + \frac{1}{x_{-n} + \eta} \right)$$

монотонно возрастает. Кроме того,

$$c_1 A^{-1} \leq f''(x_{-n}) \leq c_2 A^{-1}.$$

Применяя к сумме по n формулу частного суммирования, получим:

$$\sum_{N \leq n \leq N_1} \frac{e^{2\pi i g(n)}}{\sqrt{f''(x_n)}} = - \int_N^{N_1} \mathbb{C}(u) d \frac{1}{\sqrt{f''(x_{-u})}} + \frac{\mathbb{C}(N_1)}{\sqrt{f''(x_{-N_1})}},$$

где введено обозначение

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{N \leq n \leq u} e^{2\pi i g(n)}.$$

Переходя к неравенствам и пользуясь знакопостоянством $(f''(x_{-u}))^{-1/2}$ по u и замечанием о порядке $f''(x_{-u})$, мы приходим к следующему соотношению:

$$\left| \sum_{N \leq n \leq N_1} \frac{e^{2\pi i g(n)}}{\sqrt{f''(x_n)}} \right| \ll \sqrt{A} |\mathbb{C}(N_2)|,$$

где N_2 – некоторое число из промежутка $N \leq u \leq N_1$, при котором значение $|\mathbb{C}(u)|$ максимально. Сумму $|\mathbb{C}(N_2)|$ оценим с помощью леммы 1, полагая в ней $n = 5$. Так как

$$f'(x_u) = u, \quad g(u) = f(x_{-u}) + ux_{-u},$$

то

$$\frac{d}{du} g(u) = -f'(x_{-u})x'_{-u} + x_{-u} - ux'_{-u} = x_{-u}.$$

Поэтому

$$\left| \frac{d^5}{du^5} g(u) \right| = \left| \frac{d^4}{du^4} x_{-u} \right| = \left| \frac{d^4}{du^4} \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi u} + \left(\frac{h + \xi - \eta}{2} \right)^2} \right|.$$

Так как $u \asymp N \asymp (h + \xi - \eta)TM^{-2}$, то

$$\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi u} \asymp M^2 \gg \left(\frac{h + \xi - \eta}{2} \right)^2,$$

и, следовательно, главным членом под радикалом является первое слагаемое. Раскладывая радикал в ряд Тейлора, найдем:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi u} + \left(\frac{h + \xi - \eta}{2} \right)^2} &= \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi u}} \sqrt{1 + \frac{h + \xi - \eta}{2T} \pi u} \\ &= \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi u}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T(h + \xi - \eta)}{2\pi u}} \frac{h + \xi - \eta}{2T} \pi u + \dots \end{aligned}$$

Порядок четвертой производной по u от выписанного выражения будет равен порядку четвертой производной по u от первого слагаемого, т.е.

$$\left| \frac{d^5}{du^5} g(u) \right| \asymp \sqrt{T(h + \xi - \eta)} N^{-9/2}.$$

Следовательно, в лемме 1 можно взять $\lambda_5 = c_4(Th)^{1/2}N^{-9/2}$. Для $|\mathbb{C}(N_2)|$ получаем оценку:

$$|\mathbb{C}(N_2)| \ll N\lambda_5^{1/30} + N^{7/8}\lambda_5^{-1/30} \ll (Th)^{13/15}M^{-17/10} + (Th)^{121/120}M^{-41/20}.$$

Переходя к сумме по $M < m \leq M_1$, находим:

$$\left| \sum_{M < m \leq M_1} \left(\frac{m+h+\xi}{m+\eta} \right)^{iT} \right| \ll (Th)^{11/30} M^{-1/5} + (Th)^{61/120} M^{-11/20} + (Th)^{-1/2} M^{3/2}.$$

Наконец, суммируя по h , $h \leq 4MH^{-1}L^2 + 1$, последнюю оценку, получим:

$$W_2 \ll MT^{-4\varepsilon/3}, \quad W \ll MT^{-4\varepsilon/3}.$$

Лемма 3 полностью доказана.

Определим необходимые в дальнейшем суммы r и ϱ и оценим их сверху. Пусть $0 \leq \sigma \leq 1$, а γ пробегает все рациональные дроби, числитель и знаменатель которых положительны и не превосходят x . Символом $r = r(\sigma; T, H, P, x)$ обозначим сумму

$$r = \sum_{\gamma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |W(\sigma, T_1; \alpha)| dt dt_1 \cdots dt_k,$$

в которой

$$W(\sigma, T_1; \alpha) = \sum_{m \leq P_1} \sum_{n \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \Phi(m, n; \alpha) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1},$$

$$\Phi(m, n; \alpha) = \begin{cases} 1, & \text{если } m\alpha < n \leq m\alpha(1 + \Delta), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$T_1 = T + t + t_1 + \cdots + t_k$, $|t| \leq 2H$, $|t_r| \leq H_1$, $r = 1, 2, \dots, k$, тройка (P_1, P_2, α) имеет вид $(P/\sqrt{\gamma}, P\sqrt{\gamma}, \gamma)$ или $(P\sqrt{\gamma}, P\sqrt{\gamma}, 1)$, а P удовлетворяет условию

$$x^{-1/2} \sqrt{\frac{T}{2\pi}} \leq P \leq x^{1/2} \sqrt{\frac{T}{2\pi}}.$$

Символом $\varrho = \varrho(\sigma; T, H, P, x)$ обозначим сумму

$$\varrho = \sum_{\gamma} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |V(\sigma, T_1; \gamma)| dt dt_1 \cdots dt_k,$$

где

$$V(\sigma, T_1; \gamma) = \sum_{Q_2 < m, n \leq Q_1} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} (mn)^{iT_1}, \quad Q_1 = P\sqrt{\gamma}, \quad Q_2 = Q_1(1 - \Delta).$$

ЛЕММА 4. Для любых T , σ , $0 \leq \sigma \leq 1$, справедлива оценка:

$$r \ll HD(1 + P^{1-2\sigma})T^{-\varepsilon}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим сначала случай $P_1 = P/\sqrt{\gamma}$, $P_2 = P\sqrt{\gamma}$, $\alpha = \gamma$. Зафиксируем дробь $\alpha = \nu_1 \nu_2^{-1}$, $1 \leq \nu_1, \nu_2 \leq x$. В сумме

$$W = W(\sigma, T_1; \alpha) = \sum_{m \leq P_1} \sum_{\substack{m\alpha < n \leq m\alpha(1+\Delta) \\ n \leq P_2}} (mn)^{-\sigma} (mn)^{iT_1}$$

участвуют лишь $m \geq H(L^2\alpha)^{-1}$, так как для каждого целого m из промежутка $0 < m < H(L^2\alpha)^{-1}$, ввиду неравенств

$$m\alpha(1 + \Delta) < m\alpha + H(L^2\alpha)^{-1}\alpha H^{-1}L^2 = m\alpha + 1,$$

сумма по n оказывается пустой. Область изменения m разобьем на промежутки вида $M < m \leq M_1$, где наибольшее значение M_1 равно P_1 , наименьшее значение M равно $H(L^2\alpha)^{-1}$ и $2M \leq M_1 \leq 4M$. Тогда величина $|W|$ оценится сверху суммой $O(L)$ слагаемых:

$$|W| \leq \sum_M^L |W_1(M)|, \quad \text{где} \quad W_1(M) = \sum_{M < m \leq M_1} \sum_{\substack{m\alpha < n \leq m\alpha(1+\Delta) \\ n \leq P_2}} (mn)^{-\sigma} (mn^{-1})^{iT_1}.$$

Для упрощения дальнейших выкладок расширим область изменения m до промежутка $M \leq m \leq M_1$. При этом значение $W_1(M)$ изменится на величину, по порядку не превосходящую

$$\sum_{M\alpha \leq n \leq M\alpha(1+\Delta)} (Mn)^{-\sigma} \ll (M\alpha\Delta + 1)(M^2\alpha)^{-\sigma} \ll M^{1-2\sigma} x\Delta < M^{1-2\sigma} T^{-0.3}.$$

Представим m суммой $\nu_2 m_1 + m_2$, в которой m_2 пробегает значения $1, 2, \dots, \nu_2$. Тогда при фиксированном m_2 целое число m_1 будет меняться в промежутке

$$\frac{M - m_2}{\nu_2} \leq m_1 \leq \frac{M_1 - m_2}{\nu_2}.$$

Аналогично представим n в виде $\nu_1 n_1 + n_2$, $n_2 = 1, 2, \dots, \nu_1$. Из неравенств $m\alpha < n \leq m\alpha(1 + \Delta)$ и $n \leq P_2$ следует, что при фиксированных m и n_2 выполняются соотношения

$$m_1 + \xi - \eta < n_1 \leq m_1 + \xi - \eta + (m_1 + \xi)\Delta, \quad n_1 \leq \frac{P}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} - \eta,$$

где $\xi = m_2\nu_2^{-1}$, $\eta = n_2\nu_1^{-1}$, $x^{-1} \leq \xi, \eta \leq 1$. Положим $n_1 = m_1 + h$; тогда из неравенств

$$\xi - \eta < h \leq \min\left(\xi - \eta + (m_1 + \xi)\Delta, \frac{P}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} - \eta - m_1\right), \quad \xi - \eta \geq -(1 - x^{-1}) > -1$$

закключаем, что наименьшее значение h равно 0, причем оно достигается, когда $\xi - \eta < 0$. В этом случае

$$|h + \xi - \eta| = \eta - \xi = \frac{n_2\nu_2 - m_2\nu_1}{\nu_1\nu_2} \geq (\nu_1\nu_2)^{-1} \geq x^{-2}.$$

Если же $h \geq 1$, то $|h + \xi - \eta| \geq 1 - (1 - x^{-1}) = x^{-1} > x^{-2}$. Поэтому

$$W_1 = (\nu_1\nu_2)^{-\sigma} \sum_{m_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_2=1}^{\nu_1} \sum_{m_1} \sum_h ((m_1 + \xi)(m_1 + h + \eta))^{-\sigma} \left(\frac{m_1 + h + \eta}{m_1 + \xi}\right)^{-iT_1}.$$

Поменяем местами порядки суммирования по m_1 и h . Для этого положим $\mu = P(\nu_1\nu_2)^{-0.5}(1 + \Delta)^{-1}$ и заметим, что при m_1 , не превосходящих $\mu - \xi$, верхняя

граница изменения h равна $\xi - \eta + (m_1 + \xi)\Delta$; в противном случае наибольшее значение h ограничено сверху величиной $P(\nu_1\nu_2)^{-0.5} - \eta - m_1$. Следовательно, если $M_1/\nu_2 \leq \mu$ или $M/\nu_2 \geq \mu$, то области изменения h и m_1 в двойной сумме примут вид: $\xi - \eta < h \leq \xi - \eta + R$, $M_2 \leq m_1 \leq M_3$, где

$$R = M_1\Delta\nu_2^{-1}, \quad M_2 = \max(M\nu_2^{-1}, (h + \eta - \xi)\Delta^{-1}) - \xi, \quad M_3 = M_1\nu_2^{-1} - \xi$$

в первом случае и

$$R = P(\nu_1\nu_2)^{-0.5} - M\nu_2^{-1}, \\ M_2 = M\nu_2^{-1} - \xi, \quad M_3 = \min(M_1\nu_2^{-1} - \xi, P(\nu_1\nu_2)^{-0.5} - h - \eta)$$

во втором. В случае $M\nu_2^{-1} < \mu < M_1\nu_2^{-1}$ разобьем сумму по m_1 и h на две: Σ_1 (с $m_1 \leq \mu - \xi$) и Σ_2 (с $m_1 \geq \mu - \xi$). Области изменения m_1 в них перекрываются; чтобы учесть это обстоятельство, вычтем из $\Sigma_1 + \Sigma_2$ все слагаемые с $m_1 = \mu - \xi$, которые отнесем к сумме Σ_3 :

$$\sum_{m_1} \sum_h = \Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3.$$

Поменяв местами порядок суммирования в Σ_1 и Σ_2 , получим две новые суммы, в которых область изменения h имеет вид $\xi - \eta < h \leq \xi - \eta + \mu\Delta$, а m_1 пробегает промежутки $M_2 \leq m_1 \leq M_3$, где

$$M_2 = \max(M\nu_2^{-1}, (h + \eta - \xi)\Delta^{-1}) - \xi, \quad M_3 = \mu - \xi, \\ M_2 = \mu - \xi, \quad M_3 = \min(M_1\nu_2^{-1} - \xi, P(\nu_1\nu_2)^{-0.5} - \eta - h)$$

для Σ_1 и Σ_2 соответственно. Объединим эти суммы в одну и вычтем из нее величину Σ_3 . Итоговая сумма будет состоять из тех же слагаемых, что и исходная, но границы изменения переменных h и m_1 в ней имеют вид:

$$\xi - \eta < h \leq \xi - \eta + \mu\Delta, \quad M_2 < m_1 \leq M_3, \\ M_2 = \max(M\nu_2^{-1}, (h + \eta - \xi)\Delta^{-1}) - \xi, \\ M_3 = \min(M_1\nu_2^{-1} - \xi, P(\nu_1\nu_2)^{-0.5} - \eta - h).$$

Нетрудно заметить, что в каждом из рассмотренных случаев верхняя граница изменения h не превосходит величины $\xi - \eta + M_1\Delta \leq 4MH^{-1}L^2 + 1$. Следовательно,

$$|W_1| \leq (\nu_1\nu_2)^{-\sigma} \sum_{m_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_2=1}^{\nu_1} \sum_{0 \leq h \leq 4MH^{-1}L^2+1} |W_2| + \theta M^{1-2\sigma} T^{-0.3},$$

где

$$W_2 = \sum_{M_2 < m_1 \leq M_3} ((m_1 + \xi)(m_1 + h + \eta))^{-\sigma} \left(\frac{m_1 + h + \eta}{m_1 + \xi} \right)^{iT_1}.$$

Из определения чисел M , M_1 вытекает, что $M_2 \leq M_3 \leq 4M_2$,

$$M_2 \geq M\nu_2^{-1} - 1 \geq HL^{-2}\nu_1 - 1 \geq T^{27/82}, \quad M_3 \leq P(\nu_1\nu_2)^{-0.5} < \sqrt{xT}.$$

Применяя к последней сумме преобразование Абеля, получим:

$$W_2 = \mathbb{C}(M_3)((M_3 + \xi)(M_3 + h + \eta))^{-\sigma} - \int_{M_2}^{M_3} \mathbb{C}(u) d((u + \xi)(u + \eta + h))^{-\sigma},$$

где

$$\mathbb{C}(u) = \sum_{M_2 < k \leq u} \left(\frac{k + h + \eta}{k + \xi} \right)^{iT_1}.$$

Пусть M_4 – то значение u , при котором достигается максимум $|\mathbb{C}(u)|$, $M_2 \leq u \leq M_3$. Тогда

$$|W_2| \ll M_3^{-\sigma} |\mathbb{C}(M_4)|, \quad |W_1| \ll (\nu_1 \nu_2)^{-\sigma} M_3^{-2\sigma} \sum_{m_2=1}^{\nu_2} \sum_{n_2=1}^{\nu_1} W_3 + M^{1-2\sigma} T^{-0.3},$$

где

$$W_3 = \sum_{0 \leq h \leq 4MH^{-1}L^2+1} \left| \sum_{M_2 < k \leq M_4} \left(\frac{k + h + \eta}{k + \xi} \right)^{iT_1} \right|$$

– сумма леммы 3. Согласно этой лемме, $W_3 \ll M_2 T^{-4\epsilon/3}$. Таким образом,

$$|W_1| \ll (\nu_1 \nu_2)^{1-\sigma} M_2^{1-2\sigma} T^{-4\epsilon/3} + M^{1-2\sigma} T^{-0.3} \ll \nu_1^{1-\sigma} \nu_2^{\sigma} M^{1-2\sigma} T^{-4\epsilon/3},$$

$$\begin{aligned} |W| &\ll \sum_M^L \nu_1^{1-\sigma} \nu_2^{\sigma} M^{1-2\sigma} T^{-4\epsilon/3} \\ &\ll \nu_1^{1-\sigma} \nu_2^{\sigma} T^{-4\epsilon/3} L \left((HL^{-2} \nu_2 \nu_1^{-1})^{1-2\sigma} + \left(P \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1}} \right)^{1-2\sigma} \right) \\ &\ll T^{-4\epsilon/3} L^3 (H^{1-2\sigma} \nu_1^{\sigma} \nu_2^{1-\sigma} + P^{1-2\sigma} \sqrt{\nu_1 \nu_2}). \end{aligned}$$

Интегрируя последнее неравенство по $t, t_1, \dots, t_k$ и суммируя получившиеся оценки по всем значениям дроби $\alpha = \nu_1 \nu_2^{-1}$, $1 \leq \nu_1, \nu_2 \leq x$, находим:

$$\begin{aligned} r(\sigma; T, H, P, x) &\ll HDT^{-4\epsilon/3} L^3 \left(H^{1-2\sigma} \sum_{\nu_1 \leq x} \nu_1^{\sigma} \sum_{\nu_2 \leq x} \nu_2^{1-\sigma} + P^{1-2\sigma} \sum_{\nu_1 \leq x} \sqrt{\nu_1} \sum_{\nu_2 \leq x} \sqrt{\nu_2} \right) \\ &\ll HDT^{-4\epsilon/3} (xL)^3 (H^{1-2\sigma} + P^{1-2\sigma}) \ll HD(1 + P^{1-2\sigma}) T^{-\epsilon}. \end{aligned}$$

Таким образом, утверждение леммы доказано для случая $(P_1, P_2, \alpha) = (P/\sqrt{\gamma}, P\sqrt{\gamma}, \gamma)$. Приведенные выше рассуждения останутся справедливыми и для случая $(P_1, P_2, \alpha) = (P\sqrt{\gamma}, P\sqrt{\gamma}, 1)$, если заменить в них числа ν_1 и ν_2 единицами, а параметр P – величиной $P\sqrt{\gamma}$. Тогда окончательная оценка суммы $W_1(M)$ примет вид: $W_1 \ll M^{1-2\sigma} T^{-4\epsilon/3}$. Сложим такие оценки, отвечающие $O(L)$ значениям M из промежутка $HL^{-2} \leq M < P\sqrt{\gamma}$; получим:

$$\begin{aligned} W &\ll \sum_M^L M^{1-2\sigma} T^{-4\epsilon/3} \ll T^{-4\epsilon/3} L ((HL^{-2})^{1-2\sigma} + (P\sqrt{\gamma})^{1-2\sigma}) \\ &\ll T^{-4\epsilon/3} L^3 (H^{1-2\sigma} + P^{1-2\sigma} \gamma^{0.5-\sigma}). \end{aligned}$$

Интегрируя обе части последнего неравенства по переменным $t, t_1, \dots, t_k$, а затем суммируя по всем дробям $\gamma = \mu_1 \mu_2^{-1}$, $1 \leq \mu_1, \mu_2 \leq x$, находим:

$$\begin{aligned} r(\sigma; T, H, P, x) &\ll HD T^{-4\varepsilon/3} L^3 \left(x^2 H^{1-2\sigma} + P^{1-2\sigma} \sum_{\mu_1 \leq x} \mu_1^{0.5-\sigma} \sum_{\mu_2 \leq x} \mu_2^{\sigma-0.5} \right) \\ &\ll HD(1 + P^{1-2\sigma}) x^2 L^3 T^{-4\varepsilon/3} \ll HD(1 + P^{1-2\sigma}) T^{-\varepsilon}. \end{aligned}$$

Лемма 4 доказана полностью.

ЛЕММА 5. Для любого σ с условием $0 \leq \sigma \leq 1$ имеет место оценка:

$$\varrho(\sigma; T, H, P, x) \ll HD T^{-0.15}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное значение $\gamma = \nu_1 \nu_2^{-1}$, $1 \leq \nu_1, \nu_2 \leq x$, и оценим сумму $V(\sigma, T_1; \gamma)$:

$$\begin{aligned} |V(\sigma, T_1; \gamma)| &\ll \sum_{Q_2 < m, n \leq Q_1} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} \ll Q_1^{\sigma-1-\sigma} \left(\sum_{Q_2 < m \leq Q_1} 1 \right)^2 \\ &\ll Q_1^{-1} (Q_1 \Delta + 1)^2 \ll Q_1 \Delta^2 \ll P \sqrt{\gamma} H^{-2} L^4. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее неравенство по $t, t_1, \dots, t_k$ и суммируя обе его части по γ , находим:

$$\begin{aligned} \varrho(\sigma; T, H, P, x) &\ll HD \sum_{\gamma} P \sqrt{\nu_1 \nu_2^{-1}} H^{-2} L^4 \\ &\ll HD P H^{-2} L^4 \sum_{\nu_1 \leq x} \sqrt{\nu_1} \sum_{\nu_2 \leq x} 1/\sqrt{\nu_2} \\ &\ll HD P H^{-2} L^4 x^2 \ll HD \sqrt{xT} H^{-2} x^2 L^4 \\ &\ll HD T^{1/2-27/41-2\varepsilon+0.2\varepsilon} \ll HD T^{-0.15}. \end{aligned}$$

Лемма 5 доказана.

§ 2. Оценка кратного интеграла, содержащего “успокаивающий” множитель Сельберга

Следуя А. Сельбергу [2], введем “успокаивающую” функцию $\eta(s)$. Пусть $0 < \alpha \leq 1$ и

$$\varphi_\alpha(n) = n^\alpha \prod_{p|n} (1 - p^{-\alpha}).$$

Для $0.5 \leq \sigma \leq 1$ определим числа $\delta_\nu = \delta_\nu(\sigma)$, $1 \leq \nu \leq x$, равенствами

$$\begin{aligned} \delta_\nu &= \nu^{2\sigma} \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{d < x\nu^{-1}} \frac{\mu(d\nu) \mu(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \\ &= \frac{\mu(\nu) \nu^{2\sigma}}{\varphi_{2\sigma}(\nu)} \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{\substack{d < x\nu^{-1} \\ (d, \nu)=1}} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)}. \end{aligned}$$

Тогда при любом σ , $0.5 \leq \sigma \leq 1$, $\delta_1(\sigma) = 1$ и для $1 < \nu < x$ выполняется неравенство:

$$\begin{aligned} |\delta_\nu(\sigma)| &\leq \frac{\nu^{2\sigma}}{\varphi_{2\sigma}(\nu)} = \prod_{p|\nu} (1 - p^{-2\sigma})^{-1} \\ &\leq \prod_{p < x} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-1} = \exp\left(\sum_{p < x} \frac{1}{p} + \sum_p \sum_{k \geq 2} \frac{1}{kp^k}\right) < 2.2 \ln x. \end{aligned}$$

Успокаивающей функцией Сельберга будем называть функцию $\eta(s)$,

$$\eta(s) = \eta(\sigma + it) = \sum_{\nu < x} \delta_\nu(\sigma) \nu^{-s}.$$

ЛЕММА 6. Для любого σ , $0.5 + (\ln x)^{-1} < \sigma \leq 1$, справедливы следующие соотношения:

- 1) $\sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{(\nu_1 \nu_2)^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^{2\sigma} = \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1};$
- 2) $\sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{\nu_1 \nu_2} (\nu_1, \nu_2)^{2-2\sigma} > 0;$
- 3) $\zeta(2\sigma) \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} < 1 + 1.3x^{1-2\sigma}.$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное значение ν_1 . Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_2}}{\nu_2^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^{2\sigma} &= \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{\rho \nu_2 < x} \frac{\mu(\rho \nu_2) \mu(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho \nu_2)} (\nu_1, \nu_2)^{2\sigma} \\ &= \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{\rho \nu_2 < x} \frac{\mu(\rho \nu_2) \mu(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho \nu_2)} \sum_{d|\nu_1, d|\nu_2} \varphi_{2\sigma}(d) \\ &= \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{d|\nu_1} \varphi_{2\sigma}(d) \sum_{\substack{\rho \nu_2 < x \\ d|\nu_2}} \frac{\mu(\rho \nu_2) \mu(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho \nu_2)} \\ &= \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{d|\nu_1} \varphi_{2\sigma}(d) \sum_{\substack{n < x \\ \rho d|n}} \frac{\mu(n) \mu(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(n)} \\ &= \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{d|\nu_1} \varphi_{2\sigma}(d) \sum_{\substack{n < x \\ d|n}} \frac{\mu(n)}{\varphi_{2\sigma}(n)} \sum_{\rho|\frac{n}{d}} \mu(\rho) \\ &= \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} \sum_{d|\nu_1} \varphi_{2\sigma}(d) \frac{\mu(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)}. \end{aligned}$$

Последнее выражение равно 0, если $\nu_1 > 1$, и равно

$$\left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1},$$

если $\nu_1 = 1$. Поэтому

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{(\nu_1 \nu_2)^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^{2\sigma} &= \sum_{\nu_1 < x} \frac{\delta_{\nu_1}}{\nu_1^{2\sigma}} \sum_{\nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_2}}{\nu_2^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^{2\sigma} \\ &= \delta_1 \cdot \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1} = \left(\sum_{d < x} \frac{\mu^2(d)}{\varphi_{2\sigma}(d)} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Первое соотношение доказано. Докажем второе соотношение. Имеем:

$$\begin{aligned} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{\nu_1 \nu_2} (\nu_1, \nu_2)^{2-2\sigma} &= \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{\nu_1 \nu_2} \sum_{\rho | \nu_1, \rho | \nu_2} \varphi_{2-2\sigma}(\rho) \\ &= \sum_{\rho < x} \varphi_{2-2\sigma}(\rho) \sum_{\substack{\rho | \nu_1, \rho | \nu_2 \\ \nu_1, \nu_2 < x}} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{\nu_1 \nu_2} = \sum_{\rho < x} \varphi_{2-2\sigma}(\rho) \left(\sum_{\nu < x, \rho | \nu} \frac{\delta_{\nu}}{\nu} \right)^2 > 0. \end{aligned}$$

Чтобы доказать третье соотношение, заметим, что из равенства

$$\frac{1}{\varphi_{2\sigma}(\rho)} = \frac{1}{\rho^{2\sigma}} \prod_{p|\rho} \frac{1}{1 - p^{-2\sigma}} = \frac{1}{\rho^{2\sigma}} \prod_{p|\rho} \left(1 + \frac{1}{p^{2\sigma}} + \frac{1}{p^{4\sigma}} + \dots \right)$$

следует оценка

$$\sum_{\rho < x} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)} > \sum_{\rho < x} \rho^{-2\sigma}.$$

Таким образом,

$$\frac{\zeta(2\sigma)}{\sum_{\rho < x} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)}} < \frac{\zeta(2\sigma)}{\sum_{\rho < x} \rho^{-2\sigma}} = 1 + \frac{\sum_{\rho > x} \rho^{-2\sigma}}{\sum_{\rho < x} \rho^{-2\sigma}}.$$

Так как при $x \geq 10^2$

$$\sum_{\rho > x} \rho^{-2\sigma} < \frac{x^{1-2\sigma}}{2\sigma-1} + x^{-2\sigma} < \frac{1.1x^{1-2\sigma}}{2\sigma-1}, \quad \sum_{\rho < x} \rho^{-2\sigma} \geq \frac{1 - (x-1)^{1-2\sigma}}{2\sigma-1} \geq \frac{1 - e^{-1.9}}{2\sigma-1},$$

то

$$\frac{\zeta(2\sigma)}{\sum_{\rho < x} \frac{\mu^2(\rho)}{\varphi_{2\sigma}(\rho)}} < 1 + 1.3x^{1-2\sigma}.$$

Лемма 6 доказана.

ЛЕММА 7. Пусть $s = \sigma + it$, $s \neq 1$, $y \geq 1$. Тогда равномерно по σ , $\sigma \geq 0$, $|t| \leq y$ справедливо равенство:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq y} n^{-s} - \frac{y^{1-s}}{1-s} + O(y^{-\sigma}).$$

ЛЕММА 8. Пусть $s = \sigma + it$, $0.5 \leq \sigma \leq 1$, $y \geq 1$, $z \geq 1$ и $t = 2\pi yz$. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\zeta(s) = \sum_{n \leq y} n^{-s} + \chi(s) \sum_{n \leq z} n^{s-1} + O(y^{-\sigma}) + O(z^{\sigma-1} t^{0.5-\sigma}),$$

в котором

$$\chi(s) = e^{\pi i/4} \left(\frac{t}{2\pi} \right)^{0.5-\sigma} \left(\frac{t}{2\pi e} \right)^{-it}.$$

Доказательства лемм 7 и 8 см. в [9; с. 105–108], [10], [11].

ЛЕММА 9. Пусть $0.5 \leq \sigma \leq 1$, $|t - T| \leq 3H$, γ – дробь, числитель и знаменатель которой – натуральные числа, не превосходящие x , $P_1 = P\sqrt{\gamma}$, $P_2 = P/\sqrt{\gamma}$. Тогда имеет место равенство

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq P_1} n^{-\sigma-it} + \vartheta \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+it} + O\left(H^2 T^{-1} \left| \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+it} \right| + T^{-0.2}\right),$$

где $\vartheta = e^{i(\pi/4+T)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определяя величину x_1 равенством $2\pi P x_1 = t$ и полагая в предыдущей лемме $y = x_1\sqrt{\gamma}$, $z = P_2$, получаем:

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq x_1\sqrt{\gamma}} n^{-\sigma-it} + \chi(\sigma + it) \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+it} + R,$$

где

$$R \ll (x_1\sqrt{\gamma})^{-\sigma} + (P/\sqrt{\gamma})^{\sigma-1} T^{0.5-\sigma} \ll T^{-0.5\sigma} (x^\sigma + x^{1-\sigma}) \ll T^{-0.2}.$$

Поскольку

$$|x_1\sqrt{\gamma} - P_1| = \sqrt{\gamma} |x_1 - P| = \sqrt{\gamma} \left| \frac{t}{2\pi P} - P \right| = \frac{\sqrt{\gamma}}{2\pi P} |t - T| \leq \frac{3H\sqrt{\gamma}}{2\pi P} < 1,$$

то при замене в формуле для $\zeta(\sigma + it)$ числа $x_1\sqrt{\gamma}$ на P_1 соответствующая сумма может измениться лишь на одно последнее слагаемое, величина которого есть $O((x_1\sqrt{\gamma})^{-\sigma}) = O(T^{-0.2})$. Поэтому выражение для $\zeta(\sigma + it)$ принимает следующий вид:

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq P_1} n^{-\sigma-it} + \chi(\sigma + it) \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+it} + O(T^{-0.2}).$$

Для завершения доказательства нам осталось лишь показать, что множитель $\chi(\sigma + it)$ в этом равенстве может быть заменен с допустимой погрешностью на число $\vartheta P^{1-2\sigma-2it}$. Из теоремы Лагранжа о конечных приращениях следует, что

$$\left(\frac{t}{2\pi} \right)^{0.5-\sigma} - \left(\frac{T}{2\pi} \right)^{0.5-\sigma} = O(HT^{-0.5-\sigma}) = O(HT^{-1}).$$

Поэтому

$$\chi(\sigma + it) = e^{\pi i/4} P^{1-2\sigma} \left(\frac{t}{2\pi e} \right)^{-it} + O(HT^{-1}).$$

Далее, для рассматриваемых значений T имеем:

$$\begin{aligned} t^{it} &= T^{it} \left(\frac{t}{T} \right)^{it} = T^{it} \exp\left(it \ln\left(1 + \frac{t-T}{T}\right)\right) \\ &= T^{it} \exp\left(it \left(\frac{t-T}{T} + O(H^2 T^{-2}) \right)\right) = T^{it} \exp\left(\frac{it(t-T)}{T}\right) + O(H^2 T^{-1}) \\ &= T^{it} e^{i(t-T)} \exp\left(\frac{i(t-T)^2}{T}\right) + O(H^2 T^{-1}) = e^{-iT} (eT)^{it} + O(H^2 T^{-1}). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{t}{2\pi e}\right)^{-it} = e^{iT} P^{-2it} + O(H^2 T^{-1})$$

и

$$\chi(\sigma + it) = e^{i(\pi/4+T)} P^{1-2\sigma-2it} + O(H^2 T^{-1} P^{1-2\sigma}).$$

Подставляя это выражение в формулу для $\zeta(\sigma + it)$, будем иметь:

$$\zeta(\sigma + it) = \sum_{n \leq P_1} n^{-\sigma-it} + \vartheta \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+it} + O\left(H^2 T^{-1} \left| \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+it} \right| + T^{-0.2}\right).$$

Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $\eta(s) = \sum_{\nu \leq x} \delta_\nu \nu^{-s}$ – “успокаивающая” функция Сельберга, $\Phi(s) = \zeta(s)\eta(s)$, $0.5 + (\ln x)^{-1} < \sigma \leq 1$, и пусть

$$I = I(\sigma, T) = D^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} (|\Phi(\sigma + iT_1)|^2 - 1) dt dt_1 \cdots dt_k,$$

где $T_1 = T + t + t_1 + \cdots + t_k$, $|t| \leq 2H$, $|t_r| \leq H_1$, $r = 1, \dots, k$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $H_1 = HL^{-1}$. Тогда справедлива оценка:

$$I < 5.6 H x^{1-2\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Воспользовавшись определением функции Сельберга $\eta(s)$, представим исходный интеграл в виде суммы

$$I = D^{-1} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} (\nu_1 \nu_2)^{-\sigma} \delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |\zeta(\sigma + iT_1)|^2 \beta^{iT_1} dt dt_1 \cdots dt_k - 4H,$$

где $\beta = \nu_1 \nu_2^{-1} = \mu_1 \mu_2^{-1}$, $\mu_r = \nu_r (\nu_1, \nu_2)^{-1}$, $r = 1, 2$. Возьмем в лемме 9 $t = T_1$, $P = \sqrt{T/(2\pi)}$; полагая последовательно $\gamma = \beta$, $\gamma = \beta^{-1}$, приходим к равенствам

$$\begin{aligned} \zeta(\sigma + iT_1) &= \Sigma_1 + \vartheta P^{1-2\sigma-2iT_1} \Sigma_2 + O(H^2 T^{-1} P^{1-2\sigma} |\Sigma_2| + T^{-0.2}), \\ \zeta(\sigma - iT_1) &= \Sigma_3 + \bar{\vartheta} P^{1-2\sigma+2iT_1} \Sigma_4 + O(H^2 T^{-1} P^{1-2\sigma} |\Sigma_4| + T^{-0.2}), \end{aligned}$$

в которых

$$\begin{aligned} \Sigma_1 &= \sum_{n \leq P_1} n^{-\sigma-iT_1}, & \Sigma_2 &= \sum_{n \leq P_2} n^{\sigma-1+iT_1}, \\ \Sigma_3 &= \sum_{m \leq P_2} m^{-\sigma+iT_1}, & \Sigma_4 &= \sum_{m \leq P_1} m^{\sigma-1-iT_1}, \end{aligned}$$

$P_1 = P\sqrt{\beta}$, $P_2 = P/\sqrt{\beta}$, $\vartheta = e^{i(\pi/4+T)}$. Перемножив эти равенства почленно, найдем:

$$|\zeta(\sigma + iT_1)|^2 \beta^{iT_1} = S_1 + P^{2(1-2\sigma)} S_2 + P^{1-2\sigma} (\bar{\vartheta} C_1 + \vartheta \bar{C}_2) + O(R),$$

где

$$\begin{aligned}
 S_1 &= S_1(\beta) = \sum_{n \leq P_1} \sum_{m \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{iT_1}, \\
 S_2 &= S_2(\beta) = \sum_{m \leq P_1} \sum_{n \leq P_2} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n\beta}{m} \right)^{iT_1}, \\
 C_r &= C_r(\beta) = \sum_{m, n \leq P_r} n^{-\sigma} m^{\sigma-1} \left(\frac{P_r^2}{mn} \right)^{iT_1}, \quad r = 1, 2, \\
 R &= H^2 T^{-1} P^{1-2\sigma} (1 + |\zeta(\sigma + iT_1)|) (|\Sigma_2| + |\Sigma_4|) \\
 &\quad + (H^2 T^{-1} P^{1-2\sigma})^2 |\Sigma_2| |\Sigma_4| + (|\zeta(\sigma + iT_1)| + T^{-0.2}) T^{-0.2}.
 \end{aligned}$$

Область изменения m и n в сумме S_1 разобьем на 5 частей: $m\beta = n$, $m\beta < n \leq m\beta(1 + \Delta)$, $n < m\beta \leq n(1 + \Delta)$, $m\beta(1 + \Delta) < n$ и $m\beta > n(1 + \Delta)$. Используя ранее введенные обозначения, представим S_1 в виде

$$S_1 = A_1 + \beta^{iT_1} (A_2 + A_3) + A_4 + A_5,$$

где

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \sum_{\substack{n \leq P_1, m \leq P_2 \\ m\beta = n}} (mn)^{-\sigma}, \\
 A_2 &= \sum_{m \leq P_2} \sum_{n \leq P_1} (mn)^{-\sigma} \Phi(m, n; \beta) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1} = W(\sigma, T_1; \beta), \\
 A_3 &= \sum_{n \leq P_1} \sum_{m \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \Phi(n, m; \beta^{-1}) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1} = \overline{W}(\sigma, T_1; \beta^{-1}), \\
 A_4 &= \sum_{m \leq P_2} \sum_{m\beta(1+\Delta) < n \leq P_1} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{iT_1}, \\
 A_5 &= \sum_{n \leq P_1} \sum_{n\beta^{-1}(1+\Delta) < m \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \left(\frac{m\beta}{n} \right)^{iT_1}.
 \end{aligned}$$

Подобным образом представим сумму S_2 :

$$S_2 = B_1 + \beta^{iT_1} (B_2 + B_3) + B_4 + B_5,$$

где

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \sum_{\substack{m \leq P_1, n \leq P_2 \\ n\beta = m}} (mn)^{\sigma-1}, \\
 B_2 &= W(1 - \sigma, T_1; \beta), \\
 B_3 &= \overline{W}(1 - \sigma, T_1; \beta^{-1}),
 \end{aligned}$$

$$B_4 = \sum_{n \leq P_2} \sum_{n\beta(1+\Delta) < m \leq P_1} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n\beta}{m} \right)^{iT_1},$$

$$B_5 = \sum_{m \leq P_1} \sum_{m\beta^{-1}(1+\Delta) < n \leq P_2} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{n\beta}{m} \right)^{iT_1}.$$

Наконец, каждую из сумм C_r , $r = 1, 2$, представим в виде

$$C_r = D_r + P_r^{-2iT_1} E_r,$$

где

$$D_r = \sum_{\min(m, n) \leq P_r(1-\Delta)} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} \left(\frac{mn}{P_r^2} \right)^{iT_1},$$

$$E_r = \sum_{P_r(1-\Delta) < m, n \leq P_r} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} (mn)^{iT_1},$$

так что $E_1 = V(\sigma, T_1; \beta)$, $E_2 = V(\sigma, T_1; \beta^{-1})$.

Суммы A_1 и B_1 вычисляются с помощью леммы 7. Из определения чисел μ_1 и μ_2 следует, что $(\mu_1, \mu_2) = 1$. Записывая равенство $m\beta = n$ в виде $m\mu_1 = n\mu_2$, находим, что $m = \nu\mu_2$ и $n = \nu\mu_1$, где ν – целое число, удовлетворяющее условию $1 \leq \nu \leq P/\sqrt{\mu_1\mu_2}$. Таким образом,

$$A_1 = \sum_{1 \leq \nu \leq P/\sqrt{\mu_1\mu_2}} (\mu_1\mu_2\nu^2)^{-\sigma} = (\mu_1\mu_2)^{-\sigma} \sum_{\nu \leq P/\sqrt{\mu_1\mu_2}} \nu^{-2\sigma}$$

$$= (\mu_1\mu_2)^{-\sigma} \zeta(2\sigma) + \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \frac{P^{1-2\sigma}}{1-2\sigma} + O(P^{-\sigma}).$$

Так как B_1 получается из A_1 путем замены σ на $1-\sigma$ и так как $1-\sigma \geq 0$, то

$$B_1 = (\mu_1\mu_2)^{\sigma-1} \zeta(2-2\sigma) + \frac{1}{\sqrt{\mu_1\mu_2}} \frac{P^{2\sigma-1}}{2\sigma-1} + O(P^{\sigma-1}).$$

Подставляя в эти равенства $\mu_r = \nu_r(\nu_1, \nu_2)^{-1}$, $r = 1, 2$, находим:

$$A_1 + P^{2(1-2\sigma)} B_1 = \zeta(2\sigma) \frac{(\nu_1, \nu_2)^\sigma}{(\nu_1\nu_2)^{2\sigma}} + P^{2(1-2\sigma)} \zeta(2-2\sigma) \frac{(\nu_1, \nu_2)^{2-2\sigma}}{(\nu_1\nu_2)^{1-\sigma}} + O(P^{-\sigma}).$$

Вклад этих слагаемых в исходный интеграл равен

$$I_0 = 4H \left(\zeta(2\sigma) \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{(\nu_1\nu_2)^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^\sigma + P^{2(1-2\sigma)} \zeta(2-2\sigma) \right.$$

$$\left. \times \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{\nu_1\nu_2} (\nu_1, \nu_2)^{2-2\sigma} + O \left(P^{-\sigma} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{|\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}|}{\sqrt{\nu_1\nu_2}} \right) \right).$$

Согласно пп. 1) и 3) леммы 6, при $0.5 + (\ln x)^{-1} < \sigma \leq 1$ выполняется неравенство

$$\zeta(2\sigma) \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{(\nu_1\nu_2)^{2\sigma}} (\nu_1, \nu_2)^\sigma = \zeta(2\sigma) \left(\sum_{\nu < x} \frac{\mu^2(\nu)}{\varphi_{2\sigma}(\nu)} \right)^{-1} < 1 + 1.3x^{1-2\sigma}.$$

Кроме того, из п. 2) той же леммы следует, что второе слагаемое в выражении для I_0 отрицательно, так как $\zeta(2-2\sigma) < 0$ при $0.5 < \sigma \leq 1$. Поэтому

$$I_0 < 4H(1 + 1.3x^{1-2\sigma} + O(P^{-\sigma}xL^2)) \leq 4H(1 + 1.35x^{1-2\sigma}).$$

Обозначим символом I_1 вклад в интеграл I от сумм A_2, A_3, B_2, B_3, E_1 и E_2 , символом I_2 – вклад от сумм A_4, A_5, B_4, B_5, D_1 и D_2 , а символом I_3 – вклад от остаточного члена R .

Оценка I_1 . Поскольку при любых ν_1 и ν_2 выполняется неравенство

$$|\delta_{\nu_1}\delta_{\nu_2}(\nu_1\nu_2)^{-\sigma}| \leq L^2,$$

то

$$\begin{aligned} I_1 &\ll L^2 D^{-1} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} \left(|W(\sigma, T_1; \beta)| + |\overline{W}(\sigma, T_1; \beta^{-1})| \right. \\ &\quad + P^{2(1-2\sigma)} (|W(1-\sigma, T_1; \beta)| + |\overline{W}(1-\sigma, T_1; \beta^{-1})|) \\ &\quad \left. + P^{1-2\sigma} (|V(\sigma, T_1; \beta)| + |V(\sigma, T_1; \beta^{-1})|) \right) dt dt_1 \cdots dt_k \\ &\ll L^2 D^{-1} (r(\sigma; T, H, P, x) + P^{2(1-2\sigma)} r(1-\sigma; T, H, P, x) \\ &\quad + P^{1-2\sigma} \varrho(\sigma; T, H, P, x)), \end{aligned}$$

где суммы $r(\sigma; T, H, P, x)$ и $r(1-\sigma; T, H, P, x)$ отвечают тройке значений (P_1, P_2, α) вида $(P/\sqrt{\gamma}, P\sqrt{\gamma}, \gamma)$.

Воспользовавшись оценками лемм 4 и 5, заключаем, что

$$\begin{aligned} r(\sigma; T, H, P, x) &\ll HD(1 + P^{1-2\sigma})T^{-\varepsilon} \ll HD T^{-\varepsilon}, \\ r(1-\sigma; T, H, P, x) &\ll HD(1 + P^{2\sigma-1})T^{-\varepsilon} \ll HD P^{2\sigma-1} T^{-\varepsilon}, \\ \varrho(\sigma; T, H, P, x) &\ll HD T^{-0.15}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$I_1 \ll L^2 H(T^{-\varepsilon} + P^{1-2\sigma} T^{-\varepsilon} + P^{1-2\sigma} T^{-0.15}) \ll HL^2 T^{-\varepsilon}.$$

Оценка I_2 . Пусть числа m и n отвечают произвольному слагаемому суммы A_4 . Тогда

$$\frac{n}{m\beta} > 1 + \Delta \quad \text{и} \quad \left| \ln \frac{n}{m\beta} \right| > \ln(1 + \Delta) > 0.5\Delta.$$

Значит, при $\varkappa = 2H, H_1$ справедливы неравенства

$$\left| \int_{-\varkappa}^{\varkappa} \left(\frac{n}{m\beta} \right)^{iu} du \right| = \left| \left(\frac{n}{m\beta} \right)^{i\varkappa} - \left(\frac{n}{m\beta} \right)^{-i\varkappa} \right| \left| \ln \frac{n}{m\beta} \right|^{-1} < 2(0.5\Delta)^{-1} = 4H_1 L^{-1}.$$

Интегрируя каждое из таких слагаемых по $t, t_1, \dots, t_k$, убеждаемся, что вклад от них в исходный интеграл не превосходит величины

$$\begin{aligned} D^{-1} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}}{(\nu_1 \nu_2)^\sigma} (4H_1 L^{-1})^{k+1} \sum_{n \leq P_1} \sum_{m \leq P_2} (mn)^{-\sigma} \\ \ll D^{-1} HD(0.5L)^{-k-2} x L^2 (P_1 P_2)^{1-\sigma} < HT^{-10}. \end{aligned}$$

Применяя подобные рассуждения к суммам A_5 , B_4 и B_5 , получаем, что вклад от них также есть $O(HT^{-10})$.

Пусть теперь r равно 1 или 2, и пусть $\min(m, n) \leq P_r(1 - \Delta)$. Тогда

$$mn \leq P_r^2(1 - \Delta) \quad \text{и} \quad \left| \frac{mn^2}{P_r} \right| \geq -\ln(1 - \Delta) > \Delta.$$

Поэтому при $\varkappa = 2H$, H_1 имеют место неравенства

$$\left| \int_{-\varkappa}^{\varkappa} \left(\frac{mn}{P_r^2} \right)^{iu} du \right| = \left| \left(\frac{mn}{P_r^2} \right)^{i\varkappa} - \left(\frac{mn}{P_r^2} \right)^{-i\varkappa} \right| \left| \ln \frac{mn}{P_r^2} \right| < 2\Delta^{-1} = 2H_1L^{-1},$$

из которых следует, что вклад от сумм D_1 и D_2 оценивается сверху величиной

$$D^{-1}P^{1-2\sigma} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \frac{|\delta_{\nu_1} \delta_{\nu_2}|}{(\nu_1 \nu_2)^\sigma} \sum_{m, n \leq \max(P_1, P_2)} m^{\sigma-1} n^{-\sigma} (2H_1L^{-1})^{k+1} < HT^{-10}.$$

Оценка I_3 . Воспользуемся неравенством $|\zeta(\sigma + iT_1)| \ll T^{1/6}$, которое справедливо при $T_1 \asymp T$ и любом σ с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$; учитывая, что $H \leq T^{1/3}$, получим:

$$\begin{aligned} R &\ll H^2 T^{-5/6} P^{1-2\sigma} (|\Sigma_2| + |\Sigma_4|) + H^4 T^{-2} P^{2-4\sigma} |\Sigma_2| |\Sigma_4| + T^{-1/30} \\ &\ll T^{-1/6} P^{1-2\sigma} (|\Sigma_2| + |\Sigma_4|) + T^{-2/3} P^{2-4\sigma} |\Sigma_2| |\Sigma_4| + T^{-1/30}, \\ I_3 &\ll D^{-1} L^2 \left(T^{-1/6} P^{1-2\sigma} \right. \\ &\quad \times \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} (\nu_1 \nu_2)^{-0.5} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} (|\Sigma_2| + |\Sigma_4|) dt dt_1 \cdots dt_k \\ &\quad + T^{-2/3} P^{2-4\sigma} \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} (\nu_1 \nu_2)^{-0.5} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |\Sigma_2| |\Sigma_4| dt dt_1 \cdots dt_k \Big) \\ &\quad + HxL^2 T^{-1/30}. \end{aligned}$$

Применив к каждой из сумм по $\nu_1, \nu_2 < x$ неравенство Коши, будем иметь:

$$\begin{aligned} I_3 &\ll D^{-1} L^2 (T^{-1/6} P^{1-2\sigma} \sqrt{HD} L(\sqrt{\xi_1} + \sqrt{\xi_2}) + T^{-2/3} P^{2-4\sigma} (\xi_1 + \xi_2)) \\ &\quad + HxL^2 T^{-1/30}, \end{aligned}$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} \xi_r &= \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} |\Sigma_{2r}|^2 dt dt_1 \cdots dt_k \\ &= \sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} \sum_{m, n \leq P\sqrt{\delta}} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1} dt dt_1 \cdots dt_k, \end{aligned}$$

$\delta = \gamma^{-1}$ при $r = 1$, $\delta = \gamma$ при $r = 2$. Двойная сумма под знаком интеграла представляет собой сумму $S_2(1)$, в которой роль P играет $P\sqrt{\delta}$. Поэтому ее

можно представить в виде $S_2(1) = B_1 + \dots + B_5$, где

$$B_1 = \sum_{m \leq P\sqrt{\delta}} m^{2(\sigma-1)}, \quad B_2 = W(1 - \sigma, T_1; 1), \quad B_3 = \bar{B}_2,$$

$$B_4 = \sum_{\substack{m, n \leq P\sqrt{\delta} \\ m(1+\Delta) < n}} (mn)^{\sigma-1} \left(\frac{m}{n}\right)^{iT_1}, \quad B_5 = \bar{B}_4,$$

причем суммы B_2, B_3 отвечают тройкам (P_1, P_2, α) вида $(P\sqrt{\delta}, P\sqrt{\delta}, 1)$. Далее, обозначим символом $\eta_j = \eta_j(r)$ вклад от суммы B_j в величину ξ_r . Из неравенств

$$B_1 \ll (P\sqrt{\delta})^{2\sigma-1} L \ll P^{2\sigma-1} L (\nu_1^{\sigma-0.5} \nu_2^{0.5-\sigma} + \nu_2^{\sigma-0.5} \nu_1^{0.5-\sigma})$$

нетрудно заключить, что

$$\eta_1 \ll P^{2\sigma-1} L H D \sum_{\nu_1 < x} \nu_1^{\sigma-0.5} \sum_{\nu_2 < x} \nu_2^{0.5-\sigma} \ll H D P^{2\sigma-1} L x^2.$$

Кратный интеграл от каждой из дробей $(mn^{-1})^{iT_1}$ с условием $m(1+\Delta) < n$ по абсолютной величине не превосходит $(4H_1 L^{-1})^{k+1} < H D T^{-10}$. Следовательно, верхней границей сумм η_4, η_5 служит

$$\sum_{\nu_1, \nu_2 < x} \sum_{m, n \leq P\sqrt{\delta}} (mn)^{\sigma-1} H D T^{-10} < H D P^{2\sigma-1} T^{-9}.$$

Наконец, модуль каждой из величин η_2, η_3 не превосходит суммы $r(1-\sigma, T, H, P, x)$, отвечающей набору (P_1, P_2, α) вида $(P\sqrt{\delta}, P\sqrt{\delta}, 1)$. Согласно лемме 4,

$$\eta_2, \eta_3 \ll H D P^{1-2(1-\sigma)} T^{-\varepsilon} \ll H D P^{2\sigma-1} T^{-\varepsilon}.$$

Таким образом, мы приходим к следующему неравенству для ξ_r :

$$\xi_r = \eta_1 + \dots + \eta_5 \ll H D P^{2\sigma-1} (x^2 L + T^{-\varepsilon} + T^{-9}) \ll H D P^{2\sigma-1} x^2 L.$$

Возвращаясь к оценке I_3 , будем иметь:

$$\begin{aligned} I_3 &\ll D^{-1} L^2 (T^{-1/6} P^{1-2\sigma} \sqrt{H D} L \sqrt{H D} P^{\sigma-0.5} x \sqrt{L} \\ &\quad + T^{-2/3} P^{2-4\sigma} H D P^{2\sigma-1} x^2 L) + H x L^2 T^{-1/30} \\ &\ll H (T^{-1/6} x L^{3.5} P^{0.5-\sigma} + T^{-2/3} x^2 L^3 P^{1-2\sigma} + T^{-1/30} x L^2) \\ &\ll H x L^2 T^{-1/30} \ll H L^2 T^{-1/60}. \end{aligned}$$

Просуммируем оценки величин I_1, I_2 и I_3 ; получим:

$$\begin{aligned} I &= \sum_{j=0}^3 I_j - 4H < 4H(1 + 1.35x^{1-2\sigma}) + O(H L^2 T^{-\varepsilon}) + O(H T^{-10}) \\ &\quad + O(H L^2 T^{-1/60}) - 4H < 5.6H x^{1-2\sigma}. \end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

§ 3. Доказательство плотностной теоремы

Доказательству плотностной теоремы для нулей дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в прямоугольниках вида $\sigma < \operatorname{Re} s \leq 1$, $T - H < \operatorname{Im} s \leq T + H$ предположим еще две леммы, которые устанавливают связь между оценкой разности $N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H)$, $0.5 \leq \sigma \leq 1$, и оценкой кратного интеграла

$$I(\sigma, T) = D^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} (|\Phi(\sigma + iT_1)|^2 - 1) dt dt_1 \cdots dt_k,$$

которая была получена в предыдущем параграфе.

ЛЕММА 11. Пусть $\Phi(s) = \zeta(s)\eta(s)$, $|T - t| \leq H$, $0.5 \leq \sigma \leq 1$. Тогда имеет место неравенство:

$$2\pi \int_{\sigma}^1 (N(u, t + 2H) - N(u, t - 2H)) du \leq \int_{-2H}^{2H} \ln |\Phi(\sigma + i(t + \xi))| d\xi + O(\ln^3 T).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\nu(u, T)$ — число нулей функции $\Phi(s)$ в области $\operatorname{Re} s > u$, и пусть $a = \ln T / \ln 2$. По теореме Литтлвуда (см. лемму 5П), примененной к $\Phi(s)$ и прямоугольнику с вершинами в точках $\sigma + i(t \pm 2H)$, $a + i(t \pm 2H)$, имеет место равенство:

$$2\pi \int_{\sigma}^a (\nu(u, t + 2H) - \nu(u, t - 2H)) du = \int_{-2H}^{2H} \ln |\Phi(\sigma + i(t + \xi))| d\xi - j_1 + j_2 - j_3,$$

где

$$j_1 = \int_{-2H}^{2H} \ln |\Phi(a + i(t + \xi))| d\xi,$$

$$j_2 = \int_{\sigma}^a \arg \Phi(u + i(t + 2H)) du, \quad j_3 = \int_{\sigma}^a \arg \Phi(u + i(t - 2H)) du.$$

Здесь аргумент $\Phi(u + iX)$ равен приращению любой непрерывной ветви $\arg \Phi(s)$ вдоль ломаной линии с вершинами в точках a , $a + iX$ и $u + iX$, если X не является ординатой нуля $\Phi(s)$, и равен

$$0.5(\arg \Phi(u + i(X + 0)) + \arg \Phi(u + i(X - 0)))$$

в противном случае.

Так как при любом $u \geq 0.5$ разность $N(u, t + 2H) - N(u, t - 2H)$ не превосходит величины $\nu(u, t + 2H) - \nu(u, t - 2H)$ и тождественно равна нулю при $u \geq 1$, то мы приходим к неравенству

$$2\pi \int_{\sigma}^1 (N(u, t + 2H) - N(u, t - 2H)) du \leq \int_{-2H}^{2H} \ln |\Phi(\sigma + i(t + \xi))| d\xi - j_1 + j_2 - j_3.$$

Для доказательства леммы достаточно оценить по модулю каждый из интегралов j_r , $r = 1, 2, 3$, величиной $O(\ln^3 T)$. Преобразуя первый из этих интегралов

и пользуясь неравенством $|\delta_\nu| < 2.2 \ln x < \ln T$, справедливым при $1 \leq \nu < x$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 j_1 &= \int_{-2H}^{2H} \operatorname{Re} \ln \zeta(a + i(t + \xi)) d\xi + \int_{-2H}^{2H} \operatorname{Re} \ln \eta(a + i(t + \xi)) d\xi \\
 &= 2 \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln^2 n} n^{-a} \cos(t \ln n) \sin(2H \ln n) \\
 &\quad + \int_{-2H}^{2H} \operatorname{Re} \ln \left(1 + \sum_{2 \leq \nu < x} \delta_\nu \nu^{-a-i(t+\xi)} \right) d\xi \\
 &= O(2^{-a}) + \operatorname{Re} \int_{-2H}^{2H} \ln(1 + O(2^{-a} \ln x)) d\xi = O(2^{-a} H \ln T) = O(1).
 \end{aligned}$$

Далее, два оставшихся интеграла имеют вид

$$\int_{\sigma}^a \arg \Phi(u + iX) du,$$

где $|T - X| \leq 3H$, и представляются суммой

$$j_4 + j_5 = \int_{\sigma}^a \arg \zeta(u + iX) du + \int_{\sigma}^a \arg \eta(u + iX) du.$$

Пусть X отлично от ординаты нуля $\zeta(s)$. Запишем аргумент $\zeta(u + iX)$ как сумму приращений функции $\operatorname{Im} \ln \zeta(s)$ вдоль пути с концами $s = a$, $s = u + iX$, проходящего через точки $a + iX$ и $u + iX$:

$$\begin{aligned}
 \arg \zeta(u + iX) &= \operatorname{Im}(\ln \zeta(u + iX) - \ln \zeta(2 + iX)) \\
 &\quad + \operatorname{Im}(\ln \zeta(2 + iX) - \ln \zeta(a + iX)) + \operatorname{Im}(\ln \zeta(a + iX) - \ln \zeta(a)) \\
 &= \operatorname{Im}(\ln \zeta(u + iX) - \ln \zeta(2 + iX)) - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\ln n} \frac{\sin(X \ln n)}{n^2}.
 \end{aligned}$$

Поскольку при $\operatorname{Re} s = u \geq 2$ величина $\ln \zeta(s)$ по модулю не превосходит абсолютной постоянной, то нам достаточно рассмотреть лишь случай, когда $0.5 \leq u \leq 2$. Для этого разность логарифмов в выражении для $\arg \zeta(u + iX)$ представим интегралом

$$\int_{2+iX}^{u+iX} \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} ds$$

и воспользуемся равенством

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = \sum_{|\gamma-X| \leq 1} \frac{1}{s - \varrho} + O(\ln X),$$

которое справедливо при $\operatorname{Im} s = X$, $0 \leq \operatorname{Re} s \leq 2$. Интегрируя его почленно, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 |\arg \zeta(u + iX)| &= \left| \operatorname{Im} \sum_{|\gamma-X| \leq 1} (\ln(u + iX - \varrho) - \ln(2 + iX - \varrho)) \right| + O(\ln X) \\
 &\leq \sum_{|\gamma-X| \leq 1} \pi + O(\ln X) \leq c \ln X.
 \end{aligned}$$

Пусть теперь X совпадает с ординатой нуля $\zeta(s)$. Если h достаточно мало, то из полученной оценки следуют неравенства:

$$|\arg \zeta(u + i(X + h))| \leq c \ln(X + h), \quad |\arg \zeta(u + i(X - h))| \leq c \ln(X - h).$$

Устремляя в них h к нулю и пользуясь определением аргумента $\zeta(u + iX)$, мы приходим к искомой оценке для $\arg \zeta(u + iX)$:

$$|\arg \zeta(u + iX)| \leq 0.5(|\arg \zeta(u + i(X + 0))| + |\arg \zeta(u + i(X - 0))|) \leq c \ln X.$$

Теперь нетрудно получить и верхнюю границу интеграла j_4 :

$$j_4 = \int_{\sigma}^a \arg \zeta(u + iX) du = O(\ln^2 T).$$

Оценим величину $\arg \zeta(u + iX)$. Так как $\eta(a)$ – вещественное число и

$$\operatorname{Re} \eta(a + iX) = 1 + \sum_{2 \leq \nu < x} \delta_{\nu} \nu^{-a} \cos(X \ln \nu) = 1 + O(2^{-a} \ln T) \geq 0.5 > 0,$$

то на прямой $\operatorname{Re} s = a$ функция $\operatorname{Re} \eta(s) = |\eta(s)| \cos(\arg(\eta(s)))$ не меняет знак. Следовательно, приращение аргумента $\eta(s)$ вдоль отрезка, соединяющего точки $s = a$ и $s = a + iX$, не превосходит $\pi/2$. Пусть, далее, $\operatorname{Re} \eta(s)$ обращается в нуль на отрезке $[u + iX, a + iX]$ в q точках. Разделим отрезок на $(q + 1)$ частей так, чтобы в каждой из них вещественная часть $\eta(s)$ сохраняла знак (т.е. либо $\operatorname{Re} \eta(s) \geq 0$, либо $\operatorname{Re} \eta(s) \leq 0$). Тогда на каждой из этих частей отрезка изменение аргумента $\eta(s)$ не превосходит π . Следовательно, аргумент $\eta(u + iX)$ по модулю не превосходит $(q + 1.5)\pi$. С другой стороны, q равно числу вещественных нулей функции

$$g(s) = 0.5(\eta(s + iX) + \eta(s - iX)),$$

лежащих на отрезке $u \leq s \leq a$. Поэтому $q \leq n(a - u)$, где $n(r)$ – число нулей $g(s)$ в круге $|s - u| \leq r$. Рассмотрим интеграл

$$\int_0^a \frac{n(r)}{r} dr.$$

Оценивая его снизу, будем иметь:

$$\int_0^a \frac{n(r)}{r} dr \geq \int_{a-u}^a \frac{n(r)}{r} dr \geq n(a - u) \ln \frac{a}{a - u} > \frac{u}{a} n(a - u) > (2a)^{-1} n(a - u).$$

С другой стороны, согласно формуле Иенсена (лемма 6П), этот интеграл равен разности

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |g(a + (a - u)e^{i\varphi})| d\varphi - \ln |g(a)|,$$

которая не превосходит величины

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sum_{1 \leq \nu < x} |\delta_{\nu}| \nu^{-a - (a-u) \cos \varphi} \right| d\varphi + \ln 2 \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left| \sum_{1 \leq \nu < x} |\delta_{\nu}| \nu^{-u} \right| d\varphi + \ln 2 < \ln x. \end{aligned}$$

Следовательно, $(2a)^{-1}n(a-u) < \ln x$ и $q \leq n(a-u) < 2a \ln x$. Из последнего неравенства заключаем, что модуль $\arg \eta(u+iX)$ не превосходит $\pi(2a \ln x + 1.5)$, а модуль интеграла j_5 – величины $\pi a(2a \ln x + 1.5) = O(\ln^3 T)$. Таким образом, каждый из интегралов j_2, j_3 по порядку не превосходит $\ln^3 T$. Лемма 11 доказана.

ЛЕММА 12. Пусть $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $0.5 \leq \sigma \leq 1$. Тогда справедлива оценка

$$I = \int_{\sigma}^1 (N(u, T+H) - N(u, T-H)) du < 2.37H \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего докажем утверждение леммы при $0.5 + (\ln x)^{-1} < \sigma \leq 1$. Пусть t_r , $r = 1, \dots, k$, – произвольные числа, по абсолютной величине не превосходящие H_1 . Нетрудно видеть, что при $\sigma \leq u \leq 1$ выполняется такое неравенство:

$$N(u, T+H) - N(u, T-H) \leq N(u, T+2H+t_1+\dots+t_k) - N(u, T-2H+t_1+\dots+t_k).$$

Следовательно,

$$I \leq \int_{\sigma}^1 (N(u, T+2H+t_1+\dots+t_k) - N(u, T-2H+t_1+\dots+t_k)) du.$$

Заменяя в предыдущей лемме t на $T+t+t_1+\dots+t_k$, приходим к неравенству

$$I \leq (2\pi D)^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \ln |\Phi(\sigma + iT_1)| dt dt_1 \dots dt_k + O(\ln^3 T).$$

Далее, при $y \geq 0$ справедливо неравенство $\ln y \leq y - 1$. Действительно, если $0 < y < 2$, то искомое неравенство следует из формулы

$$\ln y = \ln(1+y-1) = (y-1) - \frac{1}{2}(y-1)^2 + \frac{1}{3}(y-1)^3 - \dots \leq y-1,$$

а если $y \geq 2$, то из формулы

$$y \leq e^{y-1} = 1 + (y-1) + \frac{1}{2!}(y-1)^2 + \frac{1}{3!}(y-1)^3 + \dots$$

В частности, при $y \geq 0$ имеем:

$$\ln y = \frac{1}{2} \ln y^2 \leq \frac{1}{2}(y^2 - 1).$$

Пользуясь леммой 10 и ее обозначениями, приходим к оценке:

$$\begin{aligned} I &\leq (4\pi D)^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} (|\Phi(\sigma + iT_1)|^2 - 1) dt dt_1 \dots dt_k + O(\ln^3 T) \\ &= \frac{1}{4\pi} I(\sigma, T) + O(\ln^3 T) < \frac{1.4}{\pi} H x^{1-2\sigma} + O(\ln^3 T) < \frac{1.5}{\pi} H x^{1-2\sigma}. \end{aligned}$$

Следовательно, утверждение леммы доказано при $0.5 + (\ln x)^{-1} < \sigma \leq 1$. Нетрудно видеть, что полученная оценка даже несколько лучше требуемой.

Пусть теперь $0.5 \leq \sigma \leq 0.5 + (\ln x)^{-1}$. В этом случае

$$\begin{aligned} I &= \left(\int_{\sigma}^{0.5+(\ln x)^{-1}} + \int_{0.5+(\ln x)^{-1}}^1 \right) (N(u, T+H) - N(u, T-H)) du \\ &\leq \int_{\sigma}^{0.5+(\ln x)^{-1}} (N(T+H) - N(T-H)) du \\ &\quad + \int_{0.5+(\ln x)^{-1}}^1 (N(u, T+H) - N(u, T-H)) du. \end{aligned}$$

Оценим первый интеграл с помощью формулы Римана–Мангольда, а второй – с помощью уже доказанного неравенства; получим:

$$I \leq \frac{H}{\pi} \frac{\ln T}{\ln x} + \frac{1.5H}{\pi} x^{1-2(0.5+(\ln x)^{-1})} \leq \frac{e^2 H}{\pi} \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2\sigma} + \frac{1.5H}{\pi} x^{1-2\sigma}.$$

Преобразуем правую часть последнего неравенства следующим образом:

$$\begin{aligned} I &\leq H \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2\sigma} \left(\frac{e^2}{\pi} + \frac{1.5}{\pi} \frac{\ln x}{\ln T} \right) \leq H \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2\sigma} \left(\frac{e^2}{\pi} + \frac{1.5}{\pi} \frac{\varepsilon}{10} \right) \\ &\leq H \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2\sigma} \left(\frac{e^2}{\pi} + \frac{\varepsilon}{20} \right) < 2.37H \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2\sigma}. \end{aligned}$$

Лемма 12 доказана полностью.

ТЕОРЕМА 1. При фиксированном ε , $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$ и $0.5 \leq \sigma \leq 1$ выполняется оценка

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \leq 13H(\ln T)x^{1-2\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $0.5 \leq \sigma \leq 0.5 + (2 \ln x)^{-1}$. В этом случае утверждение теоремы является следствием формулы Римана–Мангольда:

$$\begin{aligned} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) &\leq N(T+H) - N(T-H) \\ &= \frac{T+H}{2\pi} \ln \frac{T+H}{2\pi e} - \frac{T-H}{2\pi} \ln \frac{T-H}{2\pi e} + O(\ln T) \\ &< \frac{H}{\pi} \ln T \leq \frac{eH}{\pi} (\ln T)x^{1-2\sigma}. \end{aligned}$$

Пусть теперь $\sigma > 0.5 + (2 \ln x)^{-1}$. Так как функция $f(u) = N(u, T+H) - N(u, T-H)$ является невозрастающей, то, применив лемму 12, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) &\leq (2 \ln x) \int_{\sigma-(2 \ln x)^{-1}}^{\sigma} f(u) du \\ &\leq (2 \ln x) \int_{\sigma-(2 \ln x)^{-1}}^1 f(u) du \\ &\leq (2 \ln x) 2.37H \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2(\sigma-(2 \ln x)^{-1})} \\ &< 13H(\ln T)x^{1-2\sigma}. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

§ 4. Верхние оценки количества нулей $\zeta(s)$, лежащих в прямоугольниках малой высоты правее критической прямой

В предыдущих параграфах была получена нетривиальная оценка суммы $r(\sigma; T, H, P, x)$ и, как следствие, установлена верхняя граница разности $N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H)$ при произвольном T в случае $H = T^{27/82+\varepsilon}$, где $\varepsilon > 0$ – сколь угодно малое фиксированное число.

Между тем, для “почти всех” значений T суммы $r(\sigma; T, H, P, x)$ допускают нетривиальную оценку и при гораздо меньших H . Это позволяет оценивать сверху количество комплексных нулей дзета-функции Римана в прямоугольниках “малой” высоты H , лежащих правее критической прямой.

Целью заключительного параграфа главы I является доказательство следующей плотностной теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $X \geq X_0 > 0$, $(\ln X)^{600} < H \leq X^{1/3}$, $x = H^{0.05}$. Тогда на промежутке $X < T \leq 2X$ существует множество E , мера которого не превосходит cXx^{-1} и на дополнении к которому до промежутка $(X, 2X)$ при любом σ с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$ справедливо неравенство

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) \leq 13H(\ln T)x^{-(2\sigma-1)}$$

(c – положительная абсолютная постоянная).

Доказательству этой теоремы мы предположим ряд вспомогательных утверждений (леммы 13–20). Среди них основными являются леммы 17 и 18, посвященные оценкам сумм $r(\sigma; T, H, P, x)$ и $\varrho(\sigma; T, H, P, x)$ “в среднем”.

Наряду с обозначениями, введенными в условии теоремы 2, положим $P = \sqrt{T/(2\pi)}$, $L = \ln X$, $k = [L]$, $H_1 = HL^{-1}$, $\Delta = H_1^{-1}L$. Символами $c, c_0, c_1, c_2, \dots$ обозначены положительные абсолютные постоянные.

Кроме того, при доказательстве лемм 14–17 будем считать, что λ_1, λ_2 – целые числа, $1 \leq \lambda_1, \lambda_2 < x$, $\gamma = \lambda_1\lambda_2^{-1}$, $(2\lambda_1\Delta)^{-1} < Y \leq \sqrt{X}x$, $Y < Y_1 \leq 2Y$, $Y_2 = Y_1(1 + \Delta)$.

ЛЕММА 13. Пусть $a > 0$, b – произвольное вещественное число. Тогда справедливо равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{t}{a}\right)^2 + ibt\right) dt = \sqrt{\pi} a \exp\left(-\left(\frac{ab}{2}\right)^2\right).$$

Это утверждение относится к числу известных.

ЛЕММА 14. Для величины R , равной количеству решений в целых числах y_1, y_2, z_1, z_2 неравенства

$$|y_1z_2 - y_2z_1| \leq 24\gamma Y^2 X^{-1}L$$

с условиями $Y < y_r \leq Y_1$, $y_r\gamma < z_r \leq y_r\gamma(1 + \Delta)$, $r = 1, 2$, справедлива оценка: $R \ll Y^2 H^{-1} x^3 L^5$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z_1\lambda_2 = y_1\lambda_1 + h_1$, $z_2\lambda_2 = y_2\lambda_1 + h_2$. Определенные таким образом целые числа h_1 и h_2 удовлетворяют неравенствам

$1 \leq h_r \leq y_r \lambda_1 \Delta \leq 2Yx\Delta$, $r = 1, 2$. Используя введенные обозначения, получаем:

$$\begin{aligned} y_1 z_2 - y_2 z_1 &= \lambda_2^{-1} (y_1 (z_2 \lambda_2) - y_2 (z_1 \lambda_2)) \\ &= \lambda_2^{-1} (y_1 (y_2 \lambda_1 + h_2) - y_2 (y_1 \lambda_1 + h_1)) = \lambda_2^{-1} (y_1 h_2 - y_2 h_1). \end{aligned}$$

Поскольку $\lambda_2 24\gamma Y^2 X^{-1} L < 24x^2 L$, то величина R не превосходит числа решений неравенства $|y_1 h_2 - y_2 h_1| \leq 24x^2 L$ с условиями

$$Y < y_1, y_2 \leq 2Y, \quad 1 \leq h_1, h_2 \leq 2Yx\Delta.$$

При этих же ограничениях на переменные обозначим символом $r(m)$ количество решений уравнения $y_1 h_2 - y_2 h_1 = m$. Замечая, что

$$r(m) = \int_0^1 \left| \sum_{Y < y \leq 2Y} \sum_{1 \leq h \leq 2Yx\Delta} e^{2\pi i \alpha y h} \right|^2 e^{-2\pi i \alpha m} d\alpha \leq r(0),$$

мы приходим к неравенству

$$R \leq \sum_{|m| \leq 24x^2 L} r(m) \leq (48x^2 L + 1)r(0).$$

Величина $r(0)$ равна числу решений симметричного уравнения $y_1 h_2 = y_2 h_1$. При фиксированных y_2 и h_1 число его решений не превосходит $\tau(y_2 h_1)$. Поскольку $\tau(y_2 h_1) \leq \tau(y_2)\tau(h_1)$, то

$$r(0) \leq \sum_{Y < y_2 \leq 2Y} \tau(y_2) \sum_{1 \leq h_1 \leq 2Yx\Delta} \tau(h_1) \ll (YL)^2 x\Delta$$

и

$$R \ll (x^2 L + 1)(YL)^2 x\Delta \ll Y^2 H^{-1} x^3 L^5.$$

Лемма 14 доказана.

ЛЕММА 15. Пусть $Y < u \leq Y_1$, $Y\gamma < v \leq Y_2\gamma$, и пусть

$$F(u, v; T) = \sum_{Y < m \leq u} \sum_{Y\gamma < n \leq v} \varepsilon_1(m) \varepsilon_2(n) \Phi(m, n; \gamma) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT},$$

где $|\varepsilon_1(m)| = |\varepsilon_2(n)| = 1$. Тогда справедливо неравенство:

$$I = I(u, v) = \int_X^{2X} |F(u, v; T)| dT \ll XYH^{-0.5} x^{1.5} L^{2.5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Применяя к интегралу I неравенство Коши, получим: $I^2 \leq XJ$, где

$$J = \int_X^{2X} |F(u, v; T)|^2 dT.$$

Поскольку $e^{4-(T/X)^2} > 1$ при $X < T \leq 2X$, то

$$\begin{aligned} J &\leq e^4 \int_X^{2X} e^{-(T/X)^2} |F(u, v; T)|^2 dT \leq e^4 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(T/X)^2} |F(u, v; T)|^2 dT \\ &= \sum_{Y < m_1, m_2 \leq u} \sum_{Y\gamma < n_1, n_2 \leq v} e^4 \varepsilon_1(m_1) \varepsilon_2(n_1) \bar{\varepsilon}_1(m_2) \bar{\varepsilon}_2(n_2) \Phi(m_1, n_1; \gamma) \Phi(m_2, n_2; \gamma) \\ &\quad \times \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{T}{X}\right)^2 + iT \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1}\right) dT. \end{aligned}$$

Пользуясь формулой леммы 13, получаем:

$$\begin{aligned} J &\leq e^4 \sqrt{\pi} X \sum_{Y < m_1, m_2 \leq u} \sum_{Y\gamma < n_1, n_2 \leq v} \Phi(m_1, n_1; \gamma) \Phi(m_2, n_2; \gamma) \\ &\quad \times \exp\left(-\left(\frac{X}{2} \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1}\right)^2\right) \\ &\ll X \sum_{Y < m_1, m_2 \leq u} \sum_{\substack{m_1 \gamma < n_1 \leq m_1 \gamma(1+\Delta) \\ m_2 \gamma < n_2 \leq m_2 \gamma(1+\Delta)}} \exp\left(-\left(\frac{X}{2} \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Последнюю сумму разобьем на две: Σ_1 и Σ_2 . К Σ_1 отнесем слагаемые, для которых

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| \leq 24\gamma Y^2 X^{-1} L,$$

а к Σ_2 – все остальные. Оценивая каждое слагаемое первой суммы тривиально, находим, что Σ_1 не превосходит числа решений неравенства

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| \leq 24\gamma Y^2 X^{-1} L$$

с условиями

$$Y < m_r \leq 2Y, \quad m_r \gamma < n_r \leq m_r \gamma(1 + \Delta), \quad r = 1, 2.$$

Согласно лемме 14, имеем: $\Sigma_1 \ll Y^2 H^{-1} x^3 L^5$. Пусть теперь m_1, m_2, n_1, n_2 таковы, что

$$|m_1 n_2 - m_2 n_1| > 24\gamma Y^2 X^{-1} L.$$

Тогда в случае $m_1 n_2 > m_2 n_1$ получаем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1} &= \ln\left(1 + \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{m_2 n_1}\right) \\ &> \ln\left(1 + \frac{24\gamma Y^2 X^{-1} L}{2Y \cdot 3Y\gamma}\right) = \ln(1 + 4LX^{-1}) \geq 2LX^{-1}, \end{aligned}$$

из которых следует, что

$$\exp\left(-\left(\frac{X}{2} \ln \frac{m_1 n_2}{m_2 n_1}\right)^2\right) \leq \exp\left(-\left(\frac{X}{2} \frac{2L}{X}\right)^2\right) = e^{-L^2}.$$

Это же неравенство будет выполняться и в случае, когда $m_1 n_2 < m_2 n_1$. Так как число слагаемых в Σ_2 не превосходит Y^4 , то $\Sigma_2 \leq Y^4 e^{-L^2}$. Таким образом,

$$J \ll X(Y^2 H^{-1} x^3 L^5 + Y^4 e^{-L^2}) \ll XY^2 H^{-1} x^3 L^5 \quad \text{и} \quad I \ll XY H^{-0.5} x^{1.5} L^{2.5}.$$

Лемма 15 доказана.

ЛЕММА 16. Пусть $Q = [\sqrt{\gamma T/(2\pi)}]$, u – не зависящая от T положительная величина, не превосходящая $\Delta\sqrt{X\gamma}$, и пусть

$$F(u; T) = \sum_{0 \leq \nu \leq u} \varepsilon(\nu)(Q - \nu)^{iT},$$

где $|\varepsilon(\nu)| = 1$. Тогда справедливо неравенство:

$$I_1 = I_1(u) = \int_X^{2X} |F(u; T)|^2 dT \ll X^{1.5} H^{-1} x^{1.5} L^3.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Определим целые числа n_0 и n_1 так, чтобы выполнялись неравенства

$$2\pi\gamma^{-1}n_0^2 \leq X < 2\pi\gamma^{-1}(n_0 + 1)^2, \quad 2\pi\gamma^{-1}n_1^2 \leq 2X < 2\pi\gamma^{-1}(n_1 + 1)^2.$$

Тогда

$$I_1 \leq \int_{2\pi\gamma^{-1}n_0^2}^{2\pi\gamma^{-1}(n_1+1)^2} |F(u; T)|^2 dT = \sum_{n=n_0}^{n_1} I(n),$$

где

$$I(n) = \int_{2\pi\gamma^{-1}n^2}^{2\pi\gamma^{-1}(n+1)^2} |F(u; T)|^2 dT.$$

Зафиксируем произвольное n , $n_0 \leq n \leq n_1$. Если

$$2\pi\gamma^{-1}n^2 \leq T < 2\pi\gamma^{-1}(n+1)^2,$$

то $Q = [\sqrt{\gamma T/(2\pi)}] = n$ и сумма $F(u; T)$ принимает вид

$$F(u; T) = \sum_{0 \leq \nu \leq u} \varepsilon(\nu)(n - \nu)^{iT}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} I(n) &= 2\pi\gamma^{-1}([u] + 1)((n+1)^2 - n^2) \\ &\quad + \sum_{\substack{0 \leq \nu_1, \nu_2 \leq u \\ \nu_1 \neq \nu_2}} \varepsilon(\nu_1)\bar{\varepsilon}(\nu_2) \int_{2\pi\gamma^{-1}n^2}^{2\pi\gamma^{-1}(n+1)^2} \left(\frac{n - \nu_1}{n - \nu_2} \right)^{iT} dT. \end{aligned}$$

Интегрируя по T и переходя к оценкам, получим:

$$|I(n)| \ll \gamma^{-1}nu + \sum_{0 \leq \nu_1, \nu_2 \leq u} \left(\ln \frac{n - \nu_1}{n - \nu_2} \right)^{-1}.$$

Поскольку $\nu_2 > \nu_1$, то

$$\ln \frac{n - \nu_1}{n - \nu_2} = \ln \frac{1 - \nu_1/n}{1 - \nu_2/n} = \sum_{r=1}^{+\infty} \frac{\nu_2^r - \nu_1^r}{r n^r} > \frac{\nu_2 - \nu_1}{n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |I(n)| &\ll \gamma^{-1}nu + \sum_{0 \leq \nu_1, \nu_2 \leq u} \frac{n}{\nu_2 - \nu_1} \\ &\ll \gamma^{-1}nu + \sum_{0 \leq \nu_1 \leq u} \sum_{1 \leq r \leq u} \frac{n}{r} \ll nu(\gamma^{-1} + L). \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке I_1 , будем иметь:

$$\begin{aligned} I_1 &\ll u(\gamma^{-1} + L) \sum_{n=n_0}^{n_1} n \ll n_1^2 u(\gamma^{-1} + L) \\ &\ll X\gamma\Delta\sqrt{X}\gamma(\gamma^{-1} + L) \ll X^{1.5}H^{-1}x^{1.5}L^3. \end{aligned}$$

Лемма 16 доказана.

Следующие два утверждения представляют собой аналоги лемм 4 и 5 первого параграфа.

ЛЕММА 17. *На промежутке $X < T < 2X$ существует множество E_1 , мера которого не превосходит c_1Xx^{-1} и на дополнении к которому до полного промежутка при любом σ , $0 \leq \sigma \leq 1$, справедлива оценка:*

$$r = r(\sigma; T, H, P, x) \ll HD(1 + X^{0.5-\sigma})x^{-3}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное значение $\alpha = \lambda_1\lambda_2^{-1}$ и преобразуем сумму $W_1 = W(\sigma_1, T_1; \alpha)$, $0 \leq \sigma_1 \leq 1$, так, чтобы границы изменения m и n в ней не зависели от T . Возьмем $A = [\sqrt{Xx}]$ и положим

$$\delta_r(\nu) = (2A + 1)^{-1} \sum_{a_r = -A}^A \sum_{\nu_r \leq P_r} \exp\left(2\pi i \frac{a_r(\nu - \nu_r)}{2A + 1}\right), \quad r = 1, 2.$$

Так как $P_1, P_2 < A$, то для $r = 1, 2$

$$\delta_r(\nu) = \begin{cases} 1, & \text{если } 1 \leq \nu \leq P_r, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Используя введенные функции $\delta_r(\nu)$, $r = 1, 2$, запишем W_1 в виде:

$$W_1 = \sum_{m, n \leq A} \delta_1(m)\delta_2(n)(mn)^{-\sigma_1} \Phi(m, n; \alpha) \left(\frac{m}{n}\right)^{iT_1}.$$

Подставляя в это равенство явные выражения для $\delta_1(m)$ и $\delta_2(n)$ и меняя порядок суммирования, найдем:

$$\begin{aligned} W_1 &= (2A + 1)^{-2} \sum_{a_1, a_2 = -A}^A \left(\sum_{m_1 \leq P_1} \exp\left\{-2\pi i \frac{a_1 m_1}{2A + 1}\right\} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{n_1 \leq P_2} \exp\left\{-2\pi i \frac{a_2 n_1}{2A + 1}\right\} \right) W_2(a_1, a_2), \end{aligned}$$

где

$$W_2(a_1, a_2) = \sum_{m, n \leq A} (mn)^{-\sigma_1} \exp \left\{ 2\pi i \frac{a_1 m + a_2 n}{2A+1} \right\} \Phi(m, n; \alpha) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT_1}.$$

Границы изменения m и n в каждой из сумм $W_2(a_1, a_2)$ уже не зависят от T . Переходя к неравенствам, получим:

$$|W_1| \leq \sum_{a_1, a_2 = -A}^A (|a_1| + 1)^{-1} (|a_2| + 1)^{-1} |W_2(a_1, a_2)|.$$

Зафиксируем произвольные значения a_1 и a_2 и преобразуем сумму $W_2 = W_2(a_1, a_2)$. Промежуток изменения величины m разобьем на $O(L)$ промежутков вида $M < m \leq M_1$, где $M_1 \leq 2M$. Так как $\Phi(m, n; \alpha)$ отлична от нуля лишь при $m\alpha < n \leq m\alpha(1 + \Delta)$, то при изменении m в границах $M < m \leq M_1$ все значения n , для которых $\Phi(m, n; \alpha) \neq 0$, будут содержаться в промежутке $M\alpha < n \leq M_1\alpha(1 + \Delta) = M_2\alpha$. Перепишем теперь неравенство, которому удовлетворяют m и n , в виде

$$m\lambda_1 < n\lambda_2 \leq m\lambda_1(1 + \Delta).$$

Если $M < (2\lambda_1\Delta)^{-1}$, то для каждого m из промежутка $M < m \leq M_1$ будут выполнены неравенства

$$m\lambda_1(1 + \Delta) \leq m\lambda_1 + 2M\lambda_1\Delta < m\lambda_1 + 2\lambda_1\Delta(2\lambda_1\Delta)^{-1} = m\lambda_1 + 1,$$

и сумма по n оказывается пустой. Учитывая это замечание, представим W_2 в виде суммы $O(L)$ слагаемых:

$$W_2 = \sum_M' W_3(M),$$

где

$$\begin{aligned} W_3(M) &= \sum_{M < m \leq M_1} \sum_{M\alpha < n \leq M_2\alpha} (mn)^{-\sigma_1} \varepsilon_1(m) \varepsilon_2(n) \Phi(m, n; \alpha) \left(\frac{m}{n} \right)^{iT}, \\ \varepsilon_1(m) &= \exp \left(2\pi i \frac{a_1 m}{2A+1} \right) m^{i(t+t_1+\dots+t_k)}, \\ \varepsilon_2(n) &= \exp \left(2\pi i \frac{a_2 n}{2A+1} \right) n^{-i(t+t_1+\dots+t_k)}, \end{aligned}$$

а штрих означает суммирование по $M \geq (2\lambda_1\Delta)^{-1}$. Зафиксируем любое значение M и применим к сумме $W_3(M)$ формулу частного суммирования в следующей форме (см. [12]): если $g_1(u)$ и $g_2(v)$ – непрерывно дифференцируемые функции, $G(m, n)$ – произвольная комплекснозначная функция, то

$$\begin{aligned} &\sum_{A_1 < m \leq B_1} \sum_{A_2 < n \leq B_2} g_1(m) g_2(n) G(m, n) \\ &= \int_{A_1}^{B_1} \int_{A_2}^{B_2} F(u, v) g_1'(u) g_2'(v) du dv - g_2(B_2) \int_{A_1}^{B_1} F(u, B_2) g_1'(u) du \\ &\quad - g_1(B_1) \int_{A_2}^{B_2} F(B_1, v) g_2'(v) dv + g_1(B_1) g_2(B_2) F(B_1, B_2), \end{aligned}$$

где

$$F(u, v) = F(u, v; T) = \sum_{A_1 < m \leq u} \sum_{A_2 < n \leq v} G(m, n).$$

Положим $g_1(u) = u^{-\sigma_1}$, $g_2(v) = v^{-\sigma_1}$, $A_1 = M$, $B_1 = M_1$, $A_2 = M\alpha$, $B_2 = M_2\alpha = M_1(1 + \Delta)\alpha$,

$$G(m, n; T) = G(m, n) = \varepsilon_1(m)\varepsilon_2(n)\Phi(m, n; \alpha)(mn^{-1})^{iT}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} W_3 &= \sigma_1^2 \int_M^{M_1} \int_{M\alpha}^{M_2\alpha} F(u, v; T) (uv)^{-\sigma_1-1} du dv \\ &+ \sigma_1 (M_2\alpha)^{-\sigma_1} \int_M^{M_1} F(u, M_2\alpha; T) u^{-\sigma_1-1} du \\ &+ \sigma_1 M_1^{-\sigma_1} \int_{M\alpha}^{M_2\alpha} F(M_1, v; T) v^{-\sigma_1-1} dv + (M_1 M_2\alpha)^{-\sigma_1} F(M_1, M_2\alpha; T). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $u \asymp M$, $v \asymp M\alpha$, $\alpha^{-\sigma_1} \ll x$:

$$\begin{aligned} |W_3| &\ll x M^{-2\sigma_1} \left(\alpha^{-1} M^{-2} \int_M^{M_1} \int_{M\alpha}^{M_2\alpha} |F(u, v; T)| du dv \right. \\ &+ M^{-1} \int_M^{M_1} |F(u, M_2\alpha; T)| du \\ &\left. + (\alpha M)^{-1} \int_{M\alpha}^{M_2\alpha} |F(M_1, v; T)| dv + |F(M_1, M_2\alpha; T)| \right). \end{aligned}$$

Складывая полученные оценки, будем иметь:

$$r \ll x \sum_M^L M^{-2\sigma_1} K(M; T),$$

где

$$\begin{aligned} K(M; T) &= \sum_{\gamma} \sum_{a_1, a_2 = -A}^A (|a_1| + 1)^{-1} (|a_2| + 1)^{-1} \\ &\times \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left(\alpha^{-1} M^{-2} \int_M^{M_1} \int_{M\alpha}^{M_2\alpha} |F(u, v; T)| du dv \right. \\ &+ M^{-1} \int_M^{M_1} |F(u, M_2\alpha; T)| du \\ &\left. + (\alpha M)^{-1} \int_{M\alpha}^{M_2\alpha} |F(M_1, v; T)| dv + |F(M_1, M_2\alpha; T)| \right) dt dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Пусть

$$I(u, v) = \int_X^{2X} |F(u, v; T)| dT.$$

Положив в лемме 15 $Y = M$, $Y_1 = M_1$, так что $Y_2 = M_2$, заключаем, что

$$I(u, v) \ll X M H^{-0.5} x^{1.5} L^{2.5} \ll X M x^{-8.5} L^{2.5}.$$

Но тогда

$$\begin{aligned} \int_X^{2X} K(M; T) dT &\ll \sum_{\gamma} \sum_{a_1, a_2 = -A}^A (|a_1| + 1)^{-1} (|a_2| + 1)^{-1} H D X M x^{-8.5} L^{2.5} \\ &\quad \times (\alpha^{-1} M^{-2} \alpha M^2 + M^{-1} M + (\alpha M)^{-1} \alpha M + 1) \\ &\ll H D X M H^{-0.5} x^{-8.5} L^{2.5} x^2 L^2 \ll H D X M x^{-6.5} L^{4.5}. \end{aligned}$$

Обозначим символом $E(M)$ множество тех T из промежутка $(X; 2X)$, для которых выполнено неравенство

$$K(M; T) > H D M x^{-5.5} L^{5.5},$$

и оценим меру этого множества сверху. Для этого проинтегрируем по $E(M)$ обе части последнего неравенства и воспользуемся полученной ранее оценкой интеграла $\int_X^{2X} K(M; T) dT$:

$$\begin{aligned} H D M x^{-5.5} L^{5.5} \text{mes}(E(M)) &\leq \int_{E(M)} K(M; T) dT \\ &\leq \int_X^{2X} K(M; T) dT \ll H D M x^{-6.5} L^{4.5}. \end{aligned}$$

Сократив обе части на $H D M x^{-5.5} L^{5.5}$, будем иметь: $\text{mes}(E(M)) \ll X(xL)^{-1}$. Построим такое множество $E(M)$ для каждого из $O(L)$ значений M и возьмем в качестве E_1 их объединение. Тогда $\text{mes}(E_1) \leq c_1 X x^{-1}$ и на дополнении к E_1 для каждого M справедливо неравенство:

$$K(M; T) \ll H D M x^{-5.5} L^{5.5}.$$

Для таких T при любом значении σ_1 , $0 \leq \sigma_1 \leq 1$, имеет место оценка:

$$r \ll x \sum_M^L H D M x^{-5.5} L^{5.5} M^{-2\sigma_1} \ll H D x^{-4.5} L^{5.5} \sum_M^L M^{1-2\sigma_1}.$$

Так как $1 \leq (2x\Delta)^{-1} < M \leq \sqrt{X}x$, то для $T \notin E_1$

$$\begin{aligned} r &\ll H D x^{-4.5} L^{6.5} (1 + (xX)^{0.5-\sigma_1}) \\ &\ll H D x^{-4} L^{6.5} (1 + X^{0.5-\sigma_1}) \ll H D (1 + X^{0.5-\sigma_1}) x^{-3}. \end{aligned}$$

Лемма 17 доказана.

ЛЕММА 18. На промежутке $X < T < 2X$ существует множество E_2 , мера которого не превосходит $c_2 X x^{-1}$ и на дополнении к которому до полного промежутка $(X, 2X)$ при любом σ , $0 \leq \sigma \leq 1$, справедлива оценка:

$$\varrho(\sigma; T, H, P, x) \ll H D x^{-14}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольное значение $\gamma = \lambda_1 \lambda_2^{-1}$ и преобразуем сумму $V_1 = V(\sigma, T_1; \gamma)$ так, чтобы границы изменения m и n не зависели

от T . Положим $Q = [Q_1]$, $q = [Q_1] - [Q_2] - 1$, $B = [\Delta\sqrt{X\gamma}]$. Используя эти обозначения, запишем сумму V_1 в виде

$$V_1 = \sum_{\mu, \nu=0}^q (Q - \mu)^{-\sigma+iT_1} (Q - \nu)^{\sigma-1+iT_1}.$$

Обозначим

$$\delta_r(n) = (2B+1)^{-1} \sum_{a_r=-B}^B \sum_{n_1=0}^q \exp\left(2\pi i \frac{a_r(n-n_1)}{2B+1}\right), \quad r = 1, 2.$$

Тогда

$$\delta_r(n) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq n \leq q, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Сумма V_1 принимает вид

$$V_1 = \sum_{\mu, \nu=0}^B \delta_1(\mu) \delta_2(\nu) (Q - \mu)^{-\sigma+iT_1} (Q - \nu)^{\sigma-1+iT_1}.$$

Подставляя явные выражения для $\delta_1(\mu)$ и $\delta_2(\nu)$ и меняя порядок суммирования, получим:

$$\begin{aligned} V_1 &= (2B+1)^{-2} \sum_{a_1, a_2=-B}^B \left(\sum_{\mu_1=0}^q \exp\left\{-2\pi i \frac{a_1 \mu_1}{2B+1}\right\} \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{\nu_1=0}^q \exp\left\{-2\pi i \frac{a_2 \nu_1}{2B+1}\right\} \right) V_2(a_1, a_2), \end{aligned}$$

где

$$V_2(a_1, a_2) = \sum_{\mu, \nu=0}^B (Q - \mu)^{-\sigma+iT_1} (Q - \nu)^{\sigma-1+iT_1} \exp\left\{2\pi i \frac{a_1 \mu + a_2 \nu}{2B+1}\right\}.$$

Переходя к неравенствам, найдем:

$$|V_1| \leq \sum_{a_1, a_2=-B}^B (|a_1|+1)^{-1} (|a_2|+1)^{-1} |V_2(a_1, a_2)|.$$

Каждую из сумм $V_2(a_1, a_2)$ можно представить в виде

$$V_2(a_1, a_2) = V_3(a_1) V_3(a_2), \quad V_3(a) = \sum_{\nu=0}^B (Q - \nu)^{-\sigma_1} \exp\left\{2\pi i \frac{a\nu}{2B+1}\right\},$$

а σ_1 равно σ или $1 - \sigma$. Применяя к сумме $V_3(a)$ формулу частного суммирования, получаем:

$$V_3(a) = (Q - B)^{-\sigma_1} F_a(B; T) + \sigma_1 \int_{-0.5}^B (Q - u)^{-\sigma_1-1} F_a(u; T) du,$$

где

$$F_a(u; T) = \sum_{0 \leq \nu \leq u} (Q - \nu)^{iT_1} \exp \left\{ 2\pi i \frac{a\nu}{2B+1} \right\} = \sum_{0 \leq \nu \leq u} \varepsilon(\nu) (Q - \nu)^{iT},$$

$$\varepsilon(\nu) = \exp \left\{ 2\pi i \frac{a\nu}{2B+1} \right\} (Q - \nu)^{i(t+t_1+\dots+t_k)}.$$

Переходя к оценкам и пользуясь тем, что $Q - u \asymp Q \asymp \sqrt{X}\gamma$ при $-0.5 \leq u \leq B$, приходим к соотношению

$$|V_3(a)| \ll Q^{-\sigma_1} \left(|F_a(B; T)| + Q^{-1} \int_{-0.5}^B |F_a(u; T)| du \right).$$

Возвращаясь к суммам $V_3(a_1)$ и $V_3(a_2)$ и полагая в последнем неравенстве $\sigma_1 = \sigma$, $a = a_1$ и $\sigma_1 = 1 - \sigma$, $a = a_2$, получим:

$$\begin{aligned} |V_2(a_1, a_2)| &\ll Q^{-1} \left(|F_1(B; T)| + Q^{-1} \int_{-0.5}^B |F_1(u; T)| du \right) \\ &\quad \times \left(|F_2(B; T)| + Q^{-1} \int_{-0.5}^B |F_2(u; T)| du \right) \\ &\ll Q^{-1} \left(|F_1(B; T)| |F_2(B; T)| + Q^{-1} \int_{-0.5}^B (|F_2(u; T)| |F_2(B; T)| \right. \\ &\quad \left. + |F_1(B; T)| |F_2(u; T)|) du \right. \\ &\quad \left. + Q^{-2} \int_{-0.5}^B \int_{-0.5}^B |F_1(u; T)| |F_2(v; T)| du dv \right), \end{aligned}$$

где $F_r(u; T) = F_{a_r}(u; T)$, $r = 1, 2$. Поскольку при любых u и v

$$|F_1(u; T)| |F_2(v; T)| \leq |F_1(u; T)|^2 + |F_2(v; T)|^2,$$

то

$$\begin{aligned} |V_2(a_1, a_2)| &\ll Q^{-1} \left(|F_1(B; T)|^2 + |F_2(B; T)|^2 \right. \\ &\quad \left. + Q^{-1} \int_{-0.5}^B (|F_1(u; T)|^2 + |F_2(u; T)|^2) du \right). \end{aligned}$$

Просуммируем полученные оценки по a_1 , a_2 и γ . Пользуясь тем, что $Q^{-1} \ll \sqrt{x} X^{-0.5}$, находим: $\varrho \ll X^{-0.5} \sqrt{x} K(T)$, где

$$\begin{aligned} K(T) &= \sum_{\gamma} \sum_{a_1, a_2 = -B}^B (|a_1| + 1)^{-1} (|a_2| + 1)^{-1} \\ &\quad \times \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} \left(|F_1(B; T)|^2 + |F_2(B; T)|^2 \right. \\ &\quad \left. + Q^{-1} \int_{-0.5}^B (|F_1(u; T)|^2 + |F_2(u; T)|^2) du \right) dt dt_1 \dots dt_k. \end{aligned}$$

Пусть

$$I_r(u) = \int_X^{2X} |F_r(u; T)|^2 dT, \quad r = 1, 2.$$

Полагая в лемме 16 $F(u; T) = F_r(u; T)$, будем иметь: $I_r(u) \ll X^{1.5} H^{-1} x^{1.5} L^3$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_X^{2X} K(T) dT &\ll \sum_{\gamma} \sum_{a_1, a_2 = -B}^B (|a_1| + 1)^{-1} (|a_2| + 1)^{-1} \\ &\times \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} X^{1.5} H^{-1} x^{1.5} L^3 (1 + Q^{-1}(B + 0.5)) dt dt_1 \dots dt_k \\ &\ll HDX^{1.5} H^{-1} x^{1.5} L^3 (xL)^2 \ll HDX^{1.5} H^{-1} x^{3.5} L^5 \ll HDX^{1.5} x^{-16.5} L^5. \end{aligned}$$

Пусть теперь E_2 – множество тех T , $X < T < 2X$, для которых $K(T) > HD\sqrt{X} x^{-15.5} L^5$. Интегрируя неравенство по $T \in E_2$, будем иметь:

$$HD\sqrt{X} x^{-15.5} L^5 \text{mes}(E_2) \leq \int_{E_2} K(T) dT \leq \int_X^{2X} K(T) dT \ll HDX^{1.5} x^{-16.5} L^5.$$

Отсюда находим: $\text{mes}(E_2) \leq c_2 X x^{-1}$. Для завершения доказательства леммы остается лишь заметить, что для $T \notin E_2$, $X < T < 2X$, справедливы оценки:

$$\begin{aligned} K(T) &\leq HD\sqrt{X} x^{-15.5} L^5, \\ \varrho &\ll X^{-0.5} \sqrt{x} HD\sqrt{X} x^{-15.5} L^5 \ll HDx^{-15} L^5 \ll HDx^{-14}. \end{aligned}$$

Лемма 18 доказана.

ЛЕММА 19. Пусть $\eta(s) = \sum_{\nu < x} \delta_{\nu} \nu^{-s}$ – “успокаивающая” функция Сельберга, $\Phi(s) = \zeta(s)\eta(s)$,

$$I = I(\sigma, T) = D^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \dots \int_{-H_1}^{H_1} (|\Phi(\sigma + iT_1)|^2 - 1) dt dt_1 \dots dt_k,$$

где $T_1 = T + t + t_1 + \dots + t_k$, $|t| \leq 2H$, $|t_r| \leq H_1$, $r = 1, \dots, k$, $H_1 = HL^{-1}$. Тогда на промежутке $X < T < 2X$ существует множество E , мера которого не превосходит $c_3 X x^{-1}$ и на дополнении к которому до полного промежутка при любом σ с условием $0.5 + (\ln x)^{-1} < \sigma \leq 1$ справедлива оценка:

$$I < 5.6 H x^{1-2\sigma}.$$

Доказательство этого утверждения повторяет доказательство леммы 10 с той разницей, что следует рассматривать значения T , не принадлежащие объединению E множеств E_1 и E_2 , и в соответствующих местах воспользоваться леммами 17 и 18.

ЛЕММА 20. Для всех T из промежутка $(X, 2X)$, не принадлежащих множеству E предыдущей леммы, и любого σ с условием $0.5 \leq \sigma \leq 1$ справедлива оценка:

$$I = \int_{\sigma}^1 (N(u, T + H) - N(u, T - H)) du < 2.37 \frac{\ln T}{\ln x} H x^{1-2\sigma}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $0.5 + (\ln x)^{-1} < \sigma \leq 1$. Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве леммы 11, приходим к неравенству

$$I \leq (4\pi D)^{-1} \int_{-2H}^{2H} \int_{-H_1}^{H_1} \cdots \int_{-H_1}^{H_1} (|\Phi(\sigma + iT_1)|^2 - 1) dt dt_1 \cdots dt_k + O(\ln^3 T),$$

где, как обычно, $T_1 = T + t + t_1 + \cdots + t_k$, $|t| \leq 2H$, $|t_r| \leq H_1$, $r = 1, \dots, k$. Согласно предыдущей лемме, при σ , отстоящих от 0.5 не менее, чем на $(\ln x)^{-1}$, справедливы следующие неравенства:

$$I \leq (4\pi)^{-1} 5.6 H x^{1-2\sigma} + O(\ln^3 T) < 1.5\pi^{-1} H x^{1-2\sigma}.$$

В случае, когда σ находится между 0.5 и $0.5 + (\ln x)^{-1}$, воспользуемся формулой Римана–Мангольда и уже доказанным неравенством:

$$\begin{aligned} I &\leq \left(\int_{\sigma}^{0.5 + (\ln x)^{-1}} + \int_{0.5 + (\ln x)^{-1}}^1 \right) (N(u, T + H) - N(u, T - H)) du \\ &\leq \int_{\sigma}^{0.5 + (\ln x)^{-1}} (N(T + H) - N(T - H)) du \\ &\quad + \int_{0.5 + (\ln x)^{-1}}^1 (N(u, T + H) - N(u, T - H)) du \\ &\leq \frac{H \ln T}{\pi \ln x} + \frac{1.5H}{\pi} x^{1-2(0.5 + (\ln x)^{-1})} \\ &\leq \frac{e^2 H \ln T}{\pi \ln x} x^{1-2\sigma} + \frac{1.5H}{\pi} x^{1-2\sigma} < 2.37H \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2\sigma}. \end{aligned}$$

Лемма 20 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Докажем, что искомым свойством обладает множество E из леммы 19. Нетрудно видеть, что

$$\text{mes}(E) \leq \text{mes}(E_1) + \text{mes}(E_2) \leq c_3 X x^{-1}.$$

Пусть, далее, $X < T < 2X$, $T \notin E$. Если $0.5 \leq \sigma \leq 0.5 + (2 \ln x)^{-1}$, то плотностная теорема является следствием формулы Римана–Мангольда для $N(T)$. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда $0.5 + (2 \ln x)^{-1} < \sigma \leq 1$. Положим $\sigma_1 = \sigma - (2 \ln x)^{-1}$, так что $\sigma_1 > 0.5$, и воспользуемся неравенствами, полученными при доказательстве лемм 12, 20 и теоремы 1; находим:

$$\begin{aligned} N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) &\leq (2 \ln x) \int_{\sigma_1}^{\sigma} (N(u, T + H) - N(u, T - H)) du \\ &\leq (2 \ln x) \int_{\sigma_1}^1 (N(u, T + H) - N(u, T - H)) du \\ &\leq (2 \ln x) 2.37H \frac{\ln T}{\ln x} x^{1-2(\sigma - (2 \ln x)^{-1})} \\ &< 13H (\ln T) x^{1-2\sigma}. \end{aligned}$$

Теорема 2 доказана.

Замечания к главе I

Результаты, доказательства которых помещены в §§ 1–3, представляют собой содержание статей А. А. Карацубы [13], [14].

Лемма 6, посвященная свойствам “успокаивающей” функции $\eta(s)$, принадлежит А. Сельбергу [2].

Плотностная теорема § 4 доказана М. А. Королёвым в [15], [16].

Глава II. Поведение аргумента дзета-функции на критической прямой

Плотностные теоремы, доказанные в предыдущей главе, могут быть использованы при решении ряда задач о поведении функции $S(t)$.

Одна из таких задач состоит в определении порядка роста величины $M(T)$ – числа перемен знака $S(t)$ на промежутке $0 < t \leq T$. Первый результат здесь принадлежит Г. Бору и Э. Ландау [17], которые в 1913 г. доказали существование положительной постоянной c такой, что

$$\liminf_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{(\ln t)^c} = -\infty, \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} \frac{S(t)}{(\ln t)^c} = +\infty.$$

Из этих предельных соотношений следует, что функция $S(t)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения при t , больших любого наперед заданного значения t_0 , $t_0 > 0$, т.е. $M(T) \rightarrow +\infty$ при $T \rightarrow +\infty$. Простое доказательство этого утверждения было найдено в 1935 г. Е. Титчмаршем (см. [3; с. 222], [18]).

В 1946 г. А. Сельберг [2] разработал новый метод, с помощью которого получил следующую нижнюю оценку числа точек перемены знака $S(t)$ на промежутке $(T, T + H]$:

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T)^{1/3} e^{-c_1 \sqrt{\ln \ln T}}.$$

Длина H рассматриваемого промежутка имела вид $T^{0.5+\varepsilon}$, где ε – произвольное фиксированное число, $0 < \varepsilon \leq 0.5$.

Дальнейшее уточнение этого результата происходило по двум направлениям. Первое связано с нахождением нижних оценок разности $M(T + H) - M(T)$ при $H = T^a$, $a < 0.5$, а второе – с заменой правой части неравенства Сельберга функцией, растущей быстрее, чем $H(\ln T)^{1/3} e^{-c_1 \sqrt{\ln \ln T}}$.

Так, согласно работам [19], [20], самим А. Сельбергом с помощью гипотезы Римана была получена оценка вида

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T)^{1-\varepsilon_1}, \quad H = T^\varepsilon,$$

в которой $\varepsilon, \varepsilon_1$ – произвольные постоянные, $0 < \varepsilon, \varepsilon_1 < 1$, $T \geq T_0(\varepsilon, \varepsilon_1) > 0$.

В 1981 г. А. Гош [19] доказал, что при $H = T^{a+\varepsilon}$

$$M(T + H) - M(T) \geq H(\ln T) \exp\left(-\frac{c_2 \ln \ln T}{(\ln \ln \ln T)^{0.5-\delta}}\right),$$

где δ – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \delta < 0.5$. При этом величину a можно брать равной нулю, если гипотеза Римана верна, и равной 0.5 в противном случае.

Наконец, в работах А. А. Карацубы [13], [14] первое из неравенств А. Сельберга было доказано при $H = T^{27/82+\varepsilon}$.

Доказательства всех приведенных безусловных утверждений опираются на верхнюю оценку числа нулей $\zeta(s)$ в области $\operatorname{Re} s > \sigma$, $T < \operatorname{Im} s \leq T + H$, где $0.5 \leq \sigma \leq 1$. Применение доказанных в предыдущей главе плотностных теорем дает возможность получить новую нижнюю границу разности $M(T+H) - M(T)$ в случае $H = T^{27/82+\varepsilon}$ при произвольном T , а в случае $H = T^\varepsilon$ – для “почти всех” T .

Отметим, что вопрос об истинном порядке роста $M(T)$ при $T \rightarrow +\infty$ в настоящее время остается открытым. Из простейших свойств функции $S(t)$ можно заключить, что любой промежуток $(\gamma, \gamma']$ (γ, γ' – соседние ординаты нулей $\zeta(s)$) содержит не более двух точек перемены знака $S(t)$. Следовательно, $M(T) = O(T \ln T)$. Более точная оценка

$$M(T) \ll \frac{T \ln T}{\sqrt{\ln \ln T}} (\ln \ln \ln T)^2$$

была получена А. Сельбергом [21]. Ему же принадлежит гипотеза, согласно которой при $H = T^\varepsilon$

$$M(T+H) - M(T) \sim \frac{H \ln T}{\sqrt{\pi \ln \ln T}}.$$

Главную роль в исследовании $M(T)$ играют асимптотические формулы для интегралов

$$I(\alpha) = \int_T^{T+H} |S(t)|^\alpha dt \quad \text{и} \quad J(\alpha) = \int_T^{T+H} \left| \int_0^h S(t+u) du \right|^\alpha dt,$$

выводу и применению которых посвящены §§ 1–4 настоящей главы.

Эти же формулы применяются и к рассмотренной в § 6 задаче о распределении значений $S(t)$ на данном промежутке. Задача состоит в нахождении меры множества $E = E(u)$ (как функции u) тех значений t , $T < t \leq T + H$, которые удовлетворяют неравенству $|S(t)| \leq u$.

Новый подход к исследованию величины $M(T)$ был предложен в 1983 г. Дж. Мюллер [20]. С помощью гипотезы Римана ей удалось показать, что любой промежуток $(T, T+a)$, длина a которого имеет порядок $\ln \ln \ln T$, содержит точку перемены знака $S(t)$. Доказательство этого результата и его безусловного аналога представляет собой содержание пятого параграфа.

Изучению средних значений функции $S(t+h) - S(t)$, т.е. интегралов

$$I_k = \int_T^{T+H} (S(t+h) - S(t))^{2k} dt, \quad k = 1, 2, \dots,$$

посвящен последний, седьмой параграф главы II. Следствием оценки I_k является новая верхняя граница для количества нулей $\zeta(s)$ заданной кратности, мнимые части которых попадают в рассматриваемый промежуток.

Обозначения и предположения. В леммах 6, 7, теоремах 1, 2, 3, 6 и 7 предполагается, что ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{a+\varepsilon}$, параметр a принимает значения 0 и $27/82$; при этом $x = H^{0.05} = T^{0.05\varepsilon}$ в первом случае и $x = T^{0.1\varepsilon}$ во втором; кроме того, при любом σ из промежутка $0.5 \leq \sigma \leq 1$ выполняется неравенство:

$$N(\sigma, T + H) - N(\sigma, T - H) \leq 13H(\ln T)x^{1-2\sigma}.$$

§ 1. Вспомогательные утверждения

ЛЕММА 1. Пусть $m \geq 1$, $y > e^3$, $\tau > 0$, и пусть $p_1, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m$ пробегают значения простых чисел промежутка $(1; y]$, удовлетворяющие условию $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m$. Если $a(n)$ – произвольная последовательность комплексных чисел, то для суммы

$$\Sigma = \sum_{p_1, \dots, p_m \leq y} \sum_{q_1, \dots, q_m \leq y} \frac{a(p_1) \cdots a(p_m) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_m)}{(p_1 \cdots p_m q_1 \cdots q_m)^\tau}$$

справедливо равенство

$$\Sigma = m! \Sigma_1^m + \theta m^2 m! \Sigma_1^{m-2} \Sigma_2, \quad \text{где} \quad \Sigma_j = \sum_{p \leq y} \left(\frac{|a(p)|}{p^\tau} \right)^{2j}, \quad j = 1, 2,$$

причем $\theta = 0$ в случае $m = 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $m = 1$ утверждение очевидно. Пусть $m \geq 2$. Представим Σ в виде $S_1 + S_2$. В сумму S_1 включим слагаемые, отвечающие наборам $(p_1, \dots, p_m)$, в которых все числа $p_1, \dots, p_m$ различны, а в сумму S_2 – все остальные слагаемые.

Пусть $(p_1, \dots, p_m)$ – набор, отвечающий какому-либо слагаемому из S_1 . В силу основной теоремы арифметики все наборы $(q_1, \dots, q_m)$ с условием $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m$ отличаются от $(p_1, \dots, p_m)$ лишь перестановкой. Их число равно $m!$. Поэтому

$$\begin{aligned} S_1 &= m! \sum'_{p_1, \dots, p_m} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_m)|^2}{(p_1 \cdots p_m)^{2\tau}} \\ &= m! \left(\sum_{p_1 \leq y} \cdots \sum_{p_m \leq y} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_m)|^2}{(p_1 \cdots p_m)^{2\tau}} - S_3 \right) = m! (\Sigma_1^m - S_3), \end{aligned}$$

где

$$S_3 = \sum''_{p_1, \dots, p_m} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_m)|^2}{(p_1 \cdots p_m)^{2\tau}}.$$

Штрих в этих равенствах означает суммирование по наборам $(p_1, \dots, p_m)$, которые не содержат повторений, а двойной штрих – суммирование по всем наборам, для которых найдется пара различных индексов i и j с условием $p_i = p_j$.

Пусть теперь $(p_1, \dots, p_m)$ – набор, отвечающий слагаемому из S_2 , и пусть среди его элементов имеется ровно l различных, $l \leq m-1$. Обозначив для каждого j с условием $1 \leq j \leq l$ символом α_j количество повторений j -го элемента,

найдем, что число наборов $(q_1, \dots, q_m)$, для которых $p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m$, равно $m! (\alpha_1! \cdots \alpha_l!)^{-1} = 0.5\theta_1 m!$. Оценивая S_2 тривиально, получим: $|S_2| \leq 0.5m! S_3$ и

$$\Sigma = m! \Sigma_1^m + \theta_2 m! S_3.$$

Займемся теперь оценкой S_3 . Множество всех наборов $(p_1, \dots, p_m)$ с повторяющимися элементами, по которым ведется суммирование в S_3 , обозначим буквой $\mathcal{P}$. Построим еще одно множество, которое обозначим буквой $\mathcal{Q}$. Для этого возьмем произвольный набор $(p_1, \dots, p_{m-2})$, элементы которого – простые числа, не превосходящие y , и произвольное простое число p , также не превосходящее y . С их помощью построим $\binom{m}{2} = 0.5m(m-1)$ наборов длины m , дописывая два символа p между элементами $(p_1, \dots, p_{m-2})$. При этом символы допускается вставлять как перед p_1 , так и после p_{m-2} . Все построенные таким образом наборы отнесем к множеству $\mathcal{Q}$. Все $\mathcal{Q}$ получим, перебрав все возможные наборы $(p_1, \dots, p_{m-2})$ и простые $p \leq y$. Любой набор из множества $\mathcal{P}$ будет содержаться в $\mathcal{Q}$ (возможно, будет повторен там несколько раз). Имея в виду это построение, оценим S_3 :

$$\begin{aligned} \binom{m}{2} \Sigma_1^{m-2} \Sigma_2 &= \binom{m}{2} \left(\sum_{p \leq y} \frac{|a(p)|^2}{p^{2\tau}} \right)^{m-2} \left(\sum_{p \leq y} \frac{|a(p)|^4}{p^{4\tau}} \right) \\ &= \binom{m}{2} \sum_{p \leq y} \sum_{p_1 \leq y} \cdots \sum_{p_{m-2} \leq y} \frac{|a(p)|^2 |a(p)|^2 |a(p_1)|^2 \cdots |a(p_{m-2})|^2}{p^{2\tau} p^{2\tau} (p_1 \cdots p_{m-2})^{2\tau}} \\ &= \sum_{(p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{Q}} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_m)|^2}{(p_1 \cdots p_m)^{2\tau}} \\ &\geq \sum_{(p_1, \dots, p_m) \in \mathcal{P}} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_m)|^2}{(p_1 \cdots p_m)^{2\tau}} = S_3. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$m! S_3 \leq m! 0.5m(m-1) \Sigma_1^{m-2} \Sigma_2 < m^2 m! \Sigma_1^{m-2} \Sigma_2.$$

Лемма 1 доказана.

ЛЕММА 2. Пусть $y > e^6$, $\varkappa > 0$, $\delta > 0$, $m \geq 1$, $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$, $\mu + \nu = 2m$, и пусть $p_1, \dots, p_\mu, q_1, \dots, q_\nu$ пробегают значения простых чисел промежутка $(1, y]$, удовлетворяющие условию $p_1 \cdots p_\mu \neq q_1 \cdots q_\nu$. Если $a(n)$ – последовательность комплексных чисел, в которой $|a(n)| \leq \delta$ при всех $n \leq y$, то для интеграла

$$I = \int_0^\varkappa \sum_{p_1, \dots, p_\mu} \sum_{q_1, \dots, q_\nu} \frac{a(p_1) \cdots a(p_\mu) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_\nu)}{(p_1 \cdots p_\mu q_1 \cdots q_\nu)^{0.5}} \left(\frac{q_1 \cdots q_\nu}{p_1 \cdots p_\mu} \right)^{it} dt$$

справедлива оценка:

$$|I| \leq (\delta^2 y^3)^m.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим для краткости $\mathcal{P} = p_1 \cdots p_\mu$, $\mathcal{Q} = q_1 \cdots q_\nu$. Интегрируя, получим:

$$|I| = \left| \sum_{\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}} \frac{a(p_1) \cdots \bar{a}(q_\nu)}{\sqrt{\mathcal{P} \mathcal{Q}}} \frac{(\mathcal{Q} \mathcal{P}^{-1})^{i\varkappa} - 1}{i \ln(\mathcal{Q} \mathcal{P}^{-1})} \right| \leq 2\delta^{2m} \sum_{\mathcal{P} \neq \mathcal{Q}} \frac{|\ln(\mathcal{Q} \mathcal{P}^{-1})|^{-1}}{\sqrt{\mathcal{P} \mathcal{Q}}}.$$

Поскольку $|\ln(\mathcal{Q}\mathcal{P}^{-1})|^{-1} \leq \max(\mathcal{Q}, \mathcal{P}) \leq y^{2m}$, то справедливы неравенства

$$\begin{aligned} |I| &\leq 2(\delta y)^{2m} \sum_{\mathcal{P}, \mathcal{Q}} \frac{1}{\sqrt{\mathcal{P}\mathcal{Q}}} \leq 2(\delta y)^{2m} \left(\sum_{p \leq y} \frac{1}{\sqrt{p}} \right)^{2m} \\ &\leq 2(\delta y)^{2m} \left(\frac{3\sqrt{y}}{\ln y} \right)^{2m} < (\delta^2 y^3)^m, \end{aligned}$$

которые завершают доказательство леммы 2.

ЛЕММА 3. Пусть $B > 0$, $0 < c \leq 1$, $\varkappa \geq \exp(e^3 c^{-1})$, m – целое число, $m \geq 1$, $\xi = \varkappa^{c/m} > \exp(e^2)$, и пусть $a_1(n)$, $a_2(n)$ – последовательности комплексных чисел, у которых члены с номерами, равными простым числам $p \leq \xi$, удовлетворяют условиям

$$|a_1(p)| \leq B \frac{\ln p}{\ln \xi}, \quad |a_2(p)| \leq B.$$

Тогда для интегралов

$$I_r = \int_0^\varkappa \left| \sum_{p \leq \xi} a_r(p) \left(\frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right)^r \right|^{2m} dt, \quad r = 1, 2,$$

справедливы неравенства

$$I_1 \leq 13(2B^2 m)^m \varkappa, \quad I_2 \leq (B^2 m)^m \varkappa.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала оценим I_1 . Определим функцию $b_1(n)$ равенством

$$b_1(n) = \sum_{\substack{p_1 \cdots p_m = n \\ p_1, \dots, p_m \leq \xi}} a_1(p_1) \cdots a_1(p_m)$$

в случае, если каноническое разложение n содержит ровно m простых сомножителей (не обязательно различных) и каждый из них не превосходит ξ . Для остальных n положим $b_1(n) = 0$. Определенная таким образом функция удовлетворяет при $n \leq \xi^m$ неравенству

$$|b_1(n)| \leq B^m \sum_{p_1 \cdots p_m = n} 1 \leq m! B^m \leq (mB)^m.$$

Интегрируя, будем иметь:

$$I_1 = \int_0^\varkappa \left| \sum_{p \leq \xi} a_1(p) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|^{2m} dt = \varkappa S_1 + \Sigma_1,$$

где

$$\begin{aligned} S_1 &= \sum_{p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m} \frac{a_1(p_1) \cdots \bar{a}_1(q_m)}{\sqrt{p_1 \cdots q_m}} = \sum_{n \leq \xi^m} \frac{|b_1(n)|^2}{n}, \\ \Sigma_1 &= \sum_{\substack{l, n \leq \xi^m \\ l \neq n}} \frac{b_1(l) \bar{b}_1(n)}{\sqrt{ln}} \frac{(ln^{-1})^{i\varkappa} - 1}{i \ln(ln^{-1})}. \end{aligned}$$

К первой сумме применим оценку величины $|b_1(n)|$:

$$\begin{aligned} S_1 &\leq (Bm)^m \sum_{n \leq \xi^m} \frac{|b_1(n)|}{n} \leq (Bm)^m \left(\sum_{p \leq \xi} \frac{|a_1(p)|}{p} \right)^m \\ &\leq (Bm)^m \left(\frac{B}{\ln \xi} \sum_{p \leq \xi} \frac{\ln p}{p} \right)^m \leq (Bm)^m \left(\frac{B}{\ln \xi} 2 \ln \xi \right)^m = (2B^2m)^m. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} |\Sigma_1| &\leq 4 \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \sum_{l < n} \frac{|b_1(l)b_1(n)|}{\sqrt{ln}} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1} \\ &\leq 4(Bm)^m \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \frac{|b_1(n)|}{\sqrt{n}} \sum_{l < n} \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Отдельно рассмотрим сумму по $l < n$:

$$\begin{aligned} \sum_{l < n} \frac{1}{\sqrt{l}} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1} &\leq (\ln 2)^{-1} \sum_{1 \leq l \leq n/2} \frac{1}{\sqrt{l}} + \sum_{1 \leq r \leq n/2} \frac{1}{\sqrt{n-r}} \left(\ln \frac{n}{n-r} \right)^{-1} \\ &\leq \frac{1 + \sqrt{2n} - 2}{\ln 2} + \sqrt{2n} \sum_{1 \leq r \leq n/2} \frac{1}{r} \\ &< \frac{\sqrt{2n} - 1}{\ln 2} + \sqrt{2n} \ln(n+1) \\ &< \sqrt{2n} \left(\ln n + \frac{1}{\ln 2} \right) = \alpha \sqrt{n} \ln n, \end{aligned}$$

где $\alpha \leq 4.4$ при $n = 2$, $\alpha \leq 3.3$ при $n = 3$ и $\alpha \leq 3$ для любого $n \geq 4$. Пользуясь неравенством $\varkappa^c \geq \exp\{e^3\}$, нетрудно заметить, что при любом $n \geq 2$ величина $\alpha \ln n$ не превосходит $3c \ln \varkappa$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} |\Sigma_1| &\leq 12c(\ln \varkappa)(Bm)^m \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} |b_1(n)| \leq 12c(\ln \varkappa)(Bm)^m \left(\sum_{p \leq \xi} |a_1(p)| \right)^m \\ &\leq 12c(\ln \varkappa)(B^2m)^m (\ln \xi)^{-m} \left(\sum_{p \leq \xi} \ln p \right)^m \\ &\leq 12c(\ln \varkappa)(2B^2m)^m (\ln \xi)^{-m} \xi^m \leq \frac{12m}{(\ln \xi)^{m-1}} (2B^2m)^m \xi^m. \end{aligned}$$

Так как $\ln \xi \geq 2$, то $m \leq (\ln \xi)^{m-1}$, и поэтому

$$|\Sigma_1| \leq 12(2B^2m)^m \xi^m \leq 12(2B^2m)^m \varkappa.$$

Отсюда следует неравенство

$$I_1 \leq (2B^2m)^m \varkappa + 12(2B^2m)^m \varkappa = 13(2B^2m)^m \varkappa.$$

Оценим теперь интеграл I_2 . Рассмотрим величины $b_2(n)$, равные

$$b_2(n) = \sum_{\substack{p_1 \cdots p_m = n \\ p_1, \dots, p_m \leq \xi}} a_2(p_1) \cdots a_2(p_m)$$

для n , состоящих из m простых сомножителей, не превосходящих ξ , и равные нулю для остальных n . Для членов этой последовательности справедливо неравенство

$$|b_2(n)| \leq B^m C_m(n) \leq B^m m!,$$

где $C_m(n)$ – число решений уравнения $p_1 \cdots p_m = n$ в простых $p_1, \dots, p_m \leq \xi$. Используя эти обозначения, получаем:

$$I_2 = \kappa S_2 + \Sigma_2,$$

где

$$S_2 = \sum_{n \leq \xi^m} \frac{|b_2(n)|^2}{n^2}, \quad \Sigma_2 = \sum_{l \neq n} \frac{b_2(l) \bar{b}_2(n)}{ln} \frac{(ln^{-1})^{2i\kappa} - 1}{2i \ln(ln^{-1})}.$$

Для оценки S_2 применим формулу леммы 12:

$$\begin{aligned} S_2 &\leq B^{2m} \sum_{n \leq \xi^m} \frac{C_m^2(n)}{n^2} = B^{2m} \sum_{\substack{p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m \\ p_1, \dots, q_m \leq \xi}} (p_1 \cdots q_m)^{-1} \\ &\leq B^{2m} m! \left(\left(\sum_{p \leq \xi} p^{-2} \right)^m + m^2 \left(\sum_{p \leq \xi} p^{-2} \right)^{m-2} \left(\sum_{p \leq \xi} p^{-4} \right) \right) \\ &\leq B^{2m} m! \left(2^{-m} + \frac{m^2}{12} 2^{-(m-2)} \right) \\ &= 2^{-m} B^{2m} m! \left(1 + \frac{m^2}{3} \right) < 0.7 (B^2 m)^m. \end{aligned}$$

Оценивая сумму Σ_2 , будем иметь:

$$\begin{aligned} |\Sigma_2| &\leq 2 \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \sum_{l < n} \frac{|b_2(n) b_2(l)|}{nl} (\ln(nl^{-1}))^{-1} \\ &\leq 2B^{2m} m! \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \frac{C_m(n)}{n} \sum_{l < n} \frac{(\ln(nl^{-1}))^{-1}}{l}. \end{aligned}$$

Внутреннюю сумму по $l < n$ оценим отдельно:

$$\begin{aligned} \sum_{l < n} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1} &= \left(\sum_{l \leq n/2} + \sum_{n/2 < l \leq n-1} \right) \frac{1}{l} \left(\ln \frac{n}{l} \right)^{-1} \\ &\leq (\ln 2)^{-1} \sum_{l \leq n/2} \frac{1}{l} + \sum_{1 \leq r \leq n/2} \frac{1}{n-r} \frac{n}{r} \\ &\leq (2 + (\ln 2)^{-1}) \sum_{l \leq n/2} \frac{1}{l} \leq 3.6 \ln(n+1) < 4 \ln(n+1) < 9c \ln \kappa. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
 |\Sigma_2| &\leq 18cB^{2m}m! (\ln \varkappa) \sum_{2 \leq n \leq \xi^m} \frac{C_m(n)}{n} \\
 &= 18cB^{2m}m! (\ln \varkappa) \sum_{p_1, \dots, p_m \leq \xi} (p_1 \cdots p_m)^{-1} \\
 &\leq 18cB^{2m}m! (\ln \varkappa) \left(\sum_{p \leq \xi} \frac{1}{p} \right)^m \\
 &\leq 18cB^{2m}m! (\ln \varkappa) (1.5 \ln \ln \xi)^m \\
 &< 27.9(B^2m)^m (\ln \varkappa) (\ln \ln \xi)^m.
 \end{aligned}$$

Так как $1 \leq m \leq ce^{-2} \ln \varkappa$, то m можно записать в виде $m = \frac{c}{\lambda} \ln \varkappa$, где $\lambda \geq e^2$. Тогда

$$\xi = \varkappa^{\frac{c}{m}} = \exp\left(\frac{c}{m} \ln \varkappa\right) = e^\lambda$$

и

$$(\ln \ln \xi)^m = (\ln \lambda)^m = \exp\left(m \ln \ln \lambda\right) = \exp\left(c \ln \varkappa \frac{\ln \ln \lambda}{\lambda}\right).$$

Поскольку $\lambda \geq e^2$, то $\ln \ln \lambda \leq 0.5\lambda$ и $(\ln \ln \xi)^m \leq \varkappa^{c/2} \leq \sqrt{\varkappa}$. Из условия следует, что $\varkappa \geq \exp(e^3)$; значит, $|\Sigma_2|$ не превосходит величины

$$27.9\sqrt{\varkappa} (\ln \varkappa) (B^2m)^m < 0.2\varkappa (B^2m)^m.$$

Отсюда получаем, что

$$I_2 \leq 0.7(B^2m)^m \varkappa + 0.2(B^2m)^m \varkappa < (B^2m)^m \varkappa.$$

Лемма 3 доказана.

ЛЕММА 4. Для любых чисел a, b, z , $0 < a \leq 1$, $2 \leq b < 2$, справедливы равенства:

$$|z|^a = \varkappa_1^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(|z|u)}{u^{1+a}} du, \quad |z|^{1+b} = \varkappa_2^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(|z|u)}{u^{2+b}} du,$$

где

$$\varkappa_1 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^{1+a}} du > (4\pi a)^{-1}, \quad \varkappa_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4 u}{u^{2+b}} du > \frac{1}{5}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. При $z \neq 0$ тождества леммы устанавливаются с помощью замены переменной $v = |z|u$ в интегралах

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(|z|u)}{u^{1+a}} du, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(|z|u)}{u^{2+b}} du.$$

Оценивая величины $\varkappa_1$ и $\varkappa_2$ снизу, будем иметь:

$$\begin{aligned}\varkappa_1 &= \sum_{\nu=1}^{+\infty} \int_{2\pi(\nu-1)}^{2\pi\nu} \frac{\sin^2 v}{v^{1+a}} dv \geq \sum_{\nu=1}^{+\infty} (2\pi\nu)^{-1-a} \int_{2\pi(\nu-1)}^{2\pi\nu} \sin^2 v dv \\ &= \frac{\pi}{(2\pi)^a} \sum_{\nu=1}^{+\infty} \nu^{-4-a} > (4\pi)^{-1} \int_1^{+\infty} v^{-1-a} dv = (4\pi a)^{-1}, \\ \varkappa_2 &\geq \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^4 v}{v^2} dv \geq \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2u}{\pi}\right)^4 u^{-2-b} dv = \frac{1}{3-b} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1+b} > \frac{1}{5}.\end{aligned}$$

Лемма 4 доказана.

§ 2. Приближение функции $S(t)$ отрезком ряда Дирихле

Во многих задачах, связанных с поведением аргумента дзета-функции Римана, важную роль играет приближенная формула А. Сельберга. Она позволяет с достаточно хорошей точностью заменять функцию $S(t)$ отрезком ряда Дирихле специального вида.

В дальнейшем нам потребуются следующие два определения.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $z \geq 2$, n – натуральное число. Положим

$$\Lambda_z(n) = \begin{cases} \Lambda(n), & \text{если } 1 \leq n \leq z, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(z^3/n) - 2 \ln^2(z^2/n)}{2 \ln^2 z}, & \text{если } z < n \leq z^2, \\ \Lambda(n) \frac{\ln^2(z^3/n)}{2 \ln^2 z}, & \text{если } z^2 < n \leq z^3. \end{cases}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $2 \leq z \leq t^2$. Определим величину $\sigma_{z,t}$ равенством

$$\sigma_{z,t} = 0.5 + 2 \max(|\beta - 0.5|, \ln^{-1} z),$$

в котором β пробегает вещественные части нулей $\varrho = \beta + i\gamma$ дзета-функции Римана, удовлетворяющие условию

$$|t - \gamma| \leq z^{3|\beta - 0.5|} (\ln z)^{-1}.$$

Символом $r(z, t)$ обозначим сумму

$$\sum_{n \leq z^3} \Lambda_z(n) n^{-\sigma_{z,t} - it}.$$

ЛЕММА 5 (приближенная формула А. Сельберга). Пусть $e^{16} < z \leq t^2$. Тогда справедливо равенство:

$$S(t) = -\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} + 15\theta(\sigma_{z,t} - 0.5)(|r(z, t)| + \ln |t|).$$

Доказательство этого утверждения см. в [1].

Следующая лемма посвящена оценке интеграла специального вида, содержащего величину $\sigma_{z,t}$. Такие интегралы возникают при вычислении моментов функции $S(t)$ с использованием приближенных формул Сельберга. При доказательстве именно этого утверждения нам потребуются плотностные теоремы главы I.

ЛЕММА 6. Пусть m и ν — целые числа, $m \geq 1$, $0 \leq \nu \leq 8m$, $z \geq 2$, $1 \leq \xi \leq z^{4m}$, $z^3 \xi^2 \leq x$. Тогда для интеграла I ,

$$I = \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^\nu \xi^{\sigma_{z,t}-0.5} dt,$$

справедлива оценка:

$$I < H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \left(1 + \frac{\nu!}{32} \left(\frac{\ln z}{\ln x} \right)^\nu \frac{\ln T}{\ln z} \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать рассуждениям А. Сельберга [2]. Обозначим подынтегральную функцию символом $\psi(t)$. Точку t промежутка $(T, T+H]$ отнесем к множеству A_1 , если для всех нулей $\rho = \beta + i\gamma$ функции $\zeta(s)$, удовлетворяющих условию $|\beta - 0.5| \leq z^{3|\beta-0.5|} (\ln z)^{-1}$, имеют место неравенства $|\beta - 0.5| \leq 2(\ln z)^{-1}$. В противном случае точку t отнесем к множеству A_2 . Получаем:

$$I = \left(\int_{A_1} + \int_{A_2} \right) \psi(t) dt = I_1 + I_2.$$

Если t содержится в A_1 , то $\sigma_{z,t} = 0.5 + 2(\ln z)^{-1}$ и

$$\psi(t) = \left(\frac{2}{\ln z} \right)^\nu \xi^{2/\ln z}.$$

Так как $\xi \leq z^{4m}$, то $\psi(t) \leq (2e)^{8m} (\ln z)^{-\nu}$ и $I_1 \leq (2e)^{8m} H (\ln z)^{-\nu}$. Если же t принадлежит множеству A_2 , то для некоторого нуля $\rho = \beta + i\gamma$, ордината γ которого отстоит от t не далее чем на $z^{3|\beta-0.5|} (\ln z)^{-1}$, справедливо равенство:

$$\psi(t) = 2^\nu |\beta - 0.5|^\nu \xi^{2|\beta-0.5|}.$$

Так как $z^{3|\beta-0.5|} \leq z^{1.5} \leq \sqrt{x}$, то γ содержится в промежутке $(T - \sqrt{x}, T + H + \sqrt{x}]$. Окружив каждую из ординат γ , попавших в этот промежуток, окрестностью вида

$$\left(\gamma - \frac{z^{3|\beta-0.5|}}{\ln z}, \gamma + \frac{z^{3|\beta-0.5|}}{\ln z} \right),$$

мы покроем все множество A_2 . Поэтому интеграл I_2 оценится сверху суммой

$$\sum_{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x}} \int_{\gamma - z^{3|\beta-0.5|} (\ln z)^{-1}}^{\gamma + z^{3|\beta-0.5|} (\ln z)^{-1}} 2^\nu |\beta - 0.5|^\nu \xi^{2|\beta-0.5|} dt,$$

которая, в свою очередь, не превосходит

$$\frac{2^{\nu+2}}{\ln z} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} (\beta - 0.5)^\nu (\xi^2 z^3)^{\beta-0.5}.$$

Воспользовавшись тождеством

$$\frac{(\beta - 0.5)^\nu (z^3 \xi^2)^{\beta - 0.5}}{\ln z} = \int_{0.5}^{\beta} \left(\frac{\ln(z^3 \xi^2)}{\ln z} (u - 0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u - 0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 \xi^2)^{u-0.5} du,$$

которое доказывается интегрированием по частям, находим:

$$I_2 \leq 2^{\nu+2} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} \int_{0.5}^{\beta} \left(\frac{\ln(z^3 \xi^2)}{\ln z} (u - 0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u - 0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 \xi^2)^{u-0.5} du.$$

Чтобы поменять местами суммирование и интегрирование, положим

$$g(\varrho; u) = g(\beta + i\gamma; u) = \begin{cases} 1, & \text{если } 0 \leq u < \beta, \\ 0, & \text{если } \beta \leq u \leq 1. \end{cases}$$

Тогда неравенство для I_2 примет вид

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2^{\nu+2} \sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} \int_{0.5}^1 g(\varrho; u) \\ &\quad \times \left(\frac{\ln(z^3 \xi^2)}{\ln z} (u - 0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u - 0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 \xi^2)^{u-0.5} du \\ &= 2^{\nu+2} \int_{0.5}^1 \left(\sum_{\substack{T-\sqrt{x} < \gamma \leq T+H+\sqrt{x} \\ \beta > 0.5}} g(\varrho; u) \right) \\ &\quad \times \left(\frac{\ln(z^3 \xi^2)}{\ln z} (u - 0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u - 0.5)^{\nu-1} \right) (z^3 \xi^2)^{u-0.5} du. \end{aligned}$$

При фиксированном u сумма по γ равна числу нулей ϱ , лежащих в области $\operatorname{Re} \varrho > u$, $T - \sqrt{x} < \gamma \leq T + H + \sqrt{x}$, т.е. величине

$$N(u, T + H + \sqrt{x}) - N(u, T - \sqrt{x}).$$

Так как $x = o(H)$, то эта разность не превосходит величины

$$\begin{aligned} N(u, T + H) - N(u, T) + (N(T + H + \sqrt{x}) - N(T + H)) + (N(T) - N(T - \sqrt{x})) \\ \leq 13H(\ln T)x^{-(2u-1)} + \frac{\sqrt{x}}{\pi}(\ln T + O(1)) \leq 14H(\ln T)x^{-(2u-1)}. \end{aligned}$$

Пользуясь тем, что $z^3 \xi^2 \leq x$, находим:

$$\begin{aligned} I_2 &\leq 2^{\nu+2} 14H(\ln T) \int_{0.5}^1 x^{-(2u-1)} \left(\frac{\ln x}{\ln z} (u - 0.5)^\nu + \frac{\nu}{\ln z} (u - 0.5)^{\nu-1} \right) x^{u-0.5} du \\ &= 2^{\nu+2} 14H \frac{\ln T}{\ln z} \int_0^{0.5} (u^\nu \ln x + \nu u^{\nu-1}) x^{-u} du \\ &= \frac{2^{\nu+2} 14H \ln T}{(\ln x)^\nu \ln z} \int_0^{0.5 \ln x} e^{-u} (u^\nu + \nu u^{\nu-1}) du \leq \frac{2^{\nu+3} 14H \ln T}{(\ln x)^\nu \ln z} \nu!. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$I = I_1 + I_2 \leq \frac{(2e)^{8m} H}{(\ln z)^\nu} + \nu! 2^{\nu+3} 14 H (\ln x)^\nu \frac{\ln T}{\ln z} < H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \left(1 + \frac{\nu!}{32} \left(\frac{\ln z}{\ln x} \right)^\nu \frac{\ln T}{\ln z} \right).$$

Лемма 6 доказана.

СЛЕДСТВИЕ 1. Утверждение леммы 6 справедливо для любого T , $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, с $H = T^{27/82+\varepsilon}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$. Тогда на промежутке $X < T < 2X$ существует множество E , мера которого не превосходит $X^{1-0.04\varepsilon}$ и на дополнении к которому до всего промежутка справедливо утверждение леммы 6 с $H = T^\varepsilon$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если гипотеза Римана верна, то $\sigma_{z,t} - 0.5 = 2(\ln z)^{-1}$ и величина $\sqrt{e}(2/\ln z)^\nu H$ будет верхней оценкой интеграла I из условия леммы. Из доказанного следует, что при $\ln x \asymp \ln T$, $\ln x \asymp \nu \ln z$ имеет место оценка: $I \leq c^m H (\ln z)^{-\nu}$. Иными словами, даже если гипотеза Римана неверна, то функция $\sigma_{z,t} - 0.5$ “в среднем” ведет себя как $(\ln z)^{-1}$.

Лемма 7, доказательство которой приводится ниже, показывает, насколько точна приближенная формула Сельберга “в среднем”. Это утверждение позволит нам заменить в дальнейших выкладках отрезок ряда Дирихле

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n},$$

приближающий $S(t)$, более простым выражением, именно, суммой

$$-\frac{1}{\pi} \sum_{p \leq y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}},$$

в которой $y = y(z)$, а p пробегает значения простых чисел, не превосходящих y .

ЛЕММА 7. Пусть m – целое число, $1 \leq m < (\ln x)/192$, $x^{1/(4m)} < y \leq x^{1/m}$. Тогда имеет место оценка:

$$\int_T^{T+H} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2m} dt < (e^{37} \pi^{-2} \varepsilon^{-3} m^2)^m H.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $z = x^{1/(12m)}$ и заметим, что

$$z > \exp\left(\frac{\ln x}{12} \frac{192}{\ln x}\right) = e^{16}.$$

Прибавим теперь к обеим частям равенства

$$\pi S(t) = - \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln n)}{\ln n} + 15\pi\theta(\sigma_{z,t} - 0.5) \left(\ln t + \left| \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t}+it}} \right| \right)$$

сумму $\sum_{p < y} p^{-0.5} \sin(t \ln p)$. Проводя тождественные преобразования с подынтегральным выражением, домноженным на π , представим его в виде

$$\begin{aligned}
& \pi S(t) + \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \\
&= \left(\sum_{p < z^3} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} - \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right) \\
&+ \left(\sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} \frac{\sin(t \ln p)}{\ln p} - \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{p^{\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(t \ln p)}{\ln p} \right) \\
&+ \left(\sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p} \frac{\sin(2t \ln p)}{2 \ln p} - \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p^{2\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(2t \ln p)}{2 \ln p} \right) \\
&- \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p} \frac{\sin(2t \ln p)}{2 \ln p} - \sum_{r \geq 3} \sum_{p^r \leq z^3} \frac{\Lambda_z(p^r)}{p^{r\sigma_{z,t}}} \frac{\sin(rt \ln p)}{r \ln p} \\
&+ \sum_{z^3 \leq p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} + 15\pi\theta(\sigma_{z,t} - 0.5) \left(\ln t + \left| \sum_{n \leq z^3} \frac{\Lambda_z(n)}{n^{\sigma_{z,t} + it}} \right| \right).
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что модуль последней суммы по $n \leq z^3$ не превосходит следующей величины:

$$\begin{aligned}
& \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} (1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}) p^{it} \right| + \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right| \\
&+ \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p^{2\sigma_{z,t} + 2it}} \right| + \sum_{r \geq 3} \sum_{p^r < z^3} \frac{\ln p}{p^{r/2}}.
\end{aligned}$$

Поэтому, переходя к оценкам и пользуясь тем, что $T < t \leq T + H$, будем иметь:

$$\left| \pi S(t) + \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right| \leq \sum_{j=1}^{10} R_j,$$

где

$$\begin{aligned}
R_1 &= \sum_{r \geq 3} \sum_{p < z} (1 + 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln p) p^{-r/2}, \\
R_2 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{p^{2\sigma_{z,t} + 2it}} \right|, \\
R_3 &= \frac{1}{2} \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} (1 - p^{1 - 2\sigma_{z,t}}) \frac{p^{2it}}{p} \right|, \\
R_4 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln(T + H), \\
R_5 &= \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} (1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \\
R_6 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^3} \Lambda_z(p) (1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 R_7 &= 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \left| \sum_{p < z^{1.5}} \Lambda_z(p) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \\
 R_8 &= \frac{1}{2} \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} \frac{p^{2it}}{p} \right|, \\
 R_9 &= \left| \sum_{p < z^3} \left(1 - \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} \right) \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|, \\
 R_{10} &= \left| \sum_{z^3 \leq p < y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|.
 \end{aligned}$$

Оценим сначала каждую из величин R_j , $j = 1, 2, 3, 4$. Поскольку при $p \geq 2$

$$\sum_{r=3}^{+\infty} p^{-r/2} = \frac{1}{p(\sqrt{p}-1)},$$

то верхней границей R_1 служит выражение

$$\sum_{p \geq 2} \frac{1}{p(\sqrt{p}-1)} + 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \sum_{p \geq 2} \frac{\ln p}{p(\sqrt{p}-1)}.$$

Поскольку $0.5(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z \geq 1$ и $\ln z > 16$, то неравенство для R_1 принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
 R_1 &\leq 0.5(\sigma_{z,t} - 0.5)(\ln z) \sum_{p \geq 2} \frac{1 + 30\pi(\ln p)/(\ln z)}{p(\sqrt{p}-1)} \\
 &\leq 0.5(\sigma_{z,t} - 0.5)(\ln z) \sum_{p \geq 2} \frac{1 + 15\pi(\ln p)/8}{p(\sqrt{p}-1)} \\
 &< 12(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z.
 \end{aligned}$$

Далее, пользуясь соотношением

$$\sum_{p \leq z^{1.5}} \frac{\ln p}{p} < 2 \ln z^{1.5} = 3 \ln z,$$

которое справедливо при $z > e^{16}$, заключаем, что R_2 не превосходит величины

$$15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \sum_{p \leq z^{1.5}} \frac{\Lambda(p^2)}{p} < 45\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z.$$

Для оценки R_3 воспользуемся теоремой Лагранжа о конечных приращениях, согласно которой

$$1 - p^{1-2\sigma_{z,t}} = (2\sigma_{z,t} - 1)(\ln p)p^{\theta(1-2\sigma_{z,t})} \leq 2(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln p, \quad 0 \leq \theta \leq 1.$$

Отсюда следует, что R_3 удовлетворяет неравенствам

$$R_3 \leq 0.5 \sum_{p \leq z^{1.5}} \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} \frac{1}{p} 2(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln p \leq 3(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z.$$

Таким образом, величины R_j , $j = 1, 2, 3, 4$, в сумме не превосходят

$$\begin{aligned} & 12(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z + 45\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z \\ & + 3(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln z + 15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln(T + H) \\ & \leq 15\pi \left(1 + \left(3 + \frac{15}{15\pi} \right) \frac{\ln z}{\ln T} \right) (\sigma_{z,t} - 0.5) \ln(T + H). \end{aligned}$$

Поскольку $z = x^{1/(12m)} \leq T^{\varepsilon/(120m)}$, то дробь $(\ln z)/\ln T$ ограничена сверху произведением $\varepsilon(120m)^{-1} \leq 10^{-5}$. Следовательно, искомая оценка принимает вид

$$\sum_{j=1}^4 R_j < 15\pi(1 + 10^{-5}(3 + \pi^{-1}))(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln(T + H) < 48(\sigma_{z,t} - 0.5) \ln T.$$

Применяя к интегралу из условия леммы (обозначим его I) неравенство Гёльдера, приходим к соотношению

$$\pi^{2m} I \leq 7^{2m-1} \left(I_1 + \sum_{k=5}^{10} I_k \right),$$

в котором

$$\begin{aligned} I_1 &= 48^{2m} (\ln T)^{2m} \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{2m} dt, \\ I_k &= \int_T^{T+H} R_k^{2m}(t) dt, \quad k = 5, 6, \dots, 10. \end{aligned}$$

Полагая в предыдущей лемме $\nu = 2m$, $\xi = 1$, $z = x^{1/(12m)}$, нетрудно заметить, что интеграл I_1 ограничен сверху произведением

$$48^{2m} (\ln T)^{2m} H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{2m}} \left(1 + \frac{(2m)!}{32} \left(\frac{\ln z}{\ln x} \right)^{2m} \frac{\ln T}{\ln z} \right).$$

Следствием формулы Стирлинга является неравенство $(2m)! < 4\sqrt{m} (2m/e)^{2m}$, воспользовавшись которым можно убедиться, что второе слагаемое в скобках не превосходит величины

$$\frac{(2m)!}{32} \left(\frac{1}{12m} \right)^{2m} 12m \frac{\ln T}{\ln x} < 1.5m^{1.5} (6e)^{-2m} 20\varepsilon^{-1} < 0.115\varepsilon^{-1}.$$

Поскольку ε не превосходит 10^{-3} , окончательная оценка I_1 принимает вид

$$\begin{aligned} I_1 &< H \left(\frac{\ln T}{\ln z} \right)^{2m} (48 \cdot 16e^4)^{2m} (1 + 0.115\varepsilon^{-1}) \\ &< H(240m\varepsilon^{-1} \cdot 48 \cdot 16e^4)^{2m} (8\varepsilon)^{-1} < H(me^{16.2})^{2m} \varepsilon^{-(2m+1)}. \end{aligned}$$

Интегралы I_5 и I_6 запишем в виде

$$\begin{aligned} & \int_T^{T+H} (15\pi(\sigma_{z,t} - 0.5))^{2mn} R^{2m}(n) dt, \\ R(n) &= \left| \sum_{p < z^3} \Lambda_z(p) (\ln p)^n \frac{1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}}{\sqrt{p} \ln p} p^{it} \right|, \quad n = 0, 1. \end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством

$$\frac{1 - p^{0.5 - \sigma_{z,t}}}{\sqrt{p} \ln p} = \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} p^{-u} du,$$

будем иметь:

$$R(n) = \left| \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n p^{it}}{p^u} du \right| \leq \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n p^{it}}{p^u} \right| du.$$

Представим теперь множитель p^{-u} в виде

$$z^u \int_u^{+\infty} \frac{\ln(zp)}{(zp)^v} dv.$$

Меняя порядок суммирования и интегрирования и вынося интеграл за знак модуля, приходим к следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} R(n) &\leq \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} \left| z^u \int_u^{+\infty} \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{(zp)^v} p^{it} dv \right| du \\ &\leq \int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} z^u \int_{0.5}^{+\infty} z^{-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^v} p^{it} \right| dv du \\ &\leq \left(\int_{0.5}^{\sigma_{z,t}} z^{u-0.5} du \right) \int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^v} p^{it} \right| dv \\ &\leq (\sigma_{z,t} - 0.5) z^{\sigma_{z,t}-0.5} \int_{0.5}^{+\infty} z^{0.5-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^v} p^{it} \right| dv. \end{aligned}$$

Возвращаясь к оценке $I(n)$ и пользуясь неравенством Коши, находим:

$$\begin{aligned} I(n) &\leq (15\pi)^{2m} \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{2(1+n)m} z^{2m(\sigma_{z,t}-0.5)} \\ &\quad \times \left(\int_0^{+\infty} z^{-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^{0.5+v}} p^{it} \right| dv \right)^{2m} dt \\ &\leq (15\pi)^{2m} \sqrt{j_1} \sqrt{j_2}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} j_1 &= \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{4(1+n)m} z^{4m(\sigma_{z,t}-0.5)} dt, \\ j_2 &= \int_T^{T+H} \left(\int_0^{+\infty} z^{-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^{0.5+v}} p^{it} \right| dv \right)^{4m} dt. \end{aligned}$$

Величину j_1 оценим с помощью леммы 6, в которой следует положить $\nu = 4(1+n)m$, $\xi = z^{4m}$:

$$j_1 \leq H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \left(1 + 60m^{1.5} \varepsilon^{-1} \left(\frac{2}{3e} \right)^{4m} \right) < (4\varepsilon)^{-1} \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} H.$$

Применяя к интегралу j_2 неравенство Гёльдера, приходим к соотношениям

$$\begin{aligned} j_2 &\leq \int_T^{T+H} \left(\int_0^{+\infty} z^{-v} dv \right)^{4m-1} \int_0^{+\infty} z^{-v} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^{0.5+v}} p^{it} \right|^{4m} dv dt \\ &= (\ln z)^{1-4m} \int_0^{+\infty} z^{-v} \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{p^{0.5+v}} p^{it} \right|^{4m} dt dv \\ &= (\ln z)^{4(1+n)m+1} \int_0^{+\infty} z^{-v} \int_0^H \left| \sum_{p < z^3} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{4m} dt dv, \end{aligned}$$

где

$$a(p) = \frac{\Lambda_z(p)(\ln p)^n \ln(zp)}{(\ln z)^{2+n} p^v} p^{iT},$$

а ν по-прежнему равно $4(1+n)m$. Заметим теперь, что при $p \leq z^3$ величина $a(p)$ по модулю не превосходит дроби

$$\frac{36 \ln p}{\ln(z^3)}.$$

Полагая в лемме 3 $\varkappa = H$, $\xi = z^3 = \varkappa^{c/m}$, $c = (\ln x)/(4 \ln H) \leq 1/80$, $B = 36$, убеждаемся, что нижней границей ξ служит величина

$$\exp\left(\frac{\ln x}{4m}\right) > \exp\left(\frac{192}{4}\right) > \exp(e^2),$$

а верхней границей интеграла по t в выражении для j_2 — величина $13(2 \cdot 36^2 \cdot 2m)^{2m} H$. Следовательно, j_2 не превосходит произведения

$$(\ln z)^\nu \cdot 13(72^2 m)^{2m} H.$$

Возвращаясь к оценке $I(n)$, будем иметь:

$$\begin{aligned} I(n) &\leq (15\pi)^{2m} \left((4\varepsilon)^{-1} \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^\nu} \cdot 13(72^2 m)^{2m} (\ln z)^\nu \right)^{0.5} H < \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{24} m)^m, \\ I_5 + I_6 &< \frac{2H}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{24} m)^m. \end{aligned}$$

Интеграл I_7 оценим с помощью лемм 3 и 6, предварительно применив к нему неравенство Коши:

$$\begin{aligned} I_7 &\leq (15\pi)^{2m} \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{2m} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{2m} dt \leq (15\pi)^{2m} \sqrt{j_3} \sqrt{j_4}, \\ j_3 &= \int_T^{T+H} (\sigma_{z,t} - 0.5)^{4m} dt, \\ j_4 &= \int_T^{T+H} \left| \sum_{p < z^3} \frac{\Lambda_z(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{4m} dt \\ &= (\ln z)^{4m} \int_0^H \left| \sum_{p < z^3} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{4m} dt, \quad a(p) = \frac{\Lambda_z(p)}{\ln z} p^{iT}. \end{aligned}$$

Полагая в лемме 6 $\xi = 1$, $\nu = 4m$, получаем

$$j_3 \leq H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{4m}} (1 + 45m^{1.5} \varepsilon^{-1} (3e)^{-4m}) < (80\varepsilon)^{-1} H \frac{(2e)^{8m}}{(\ln z)^{4m}}.$$

Поскольку абсолютная величина $a(p)$ при $p \leq z^3$ не превосходит

$$\frac{3 \ln p}{\ln(z^3)},$$

то, согласно лемме 3, примененной к j_4 с $\varkappa = H$, $\xi = z^3$, $B = 3$, имеет место неравенство

$$j_4 \leq 13(2 \cdot 3^2 \cdot 2m)^{2m} H (\ln z)^{4m}.$$

Переходя к оценке I_7 , будем иметь:

$$I_7 \leq (15\pi)^{2m} \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} (2e)^{4m} (36m)^m < \frac{H}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{19} m)^m.$$

Три оставшихся интеграла также оцениваются с помощью леммы 3. Полагая

$$a(p) = \frac{\Lambda_z(p^2)}{\ln p} p^{2iT},$$

находим, что

$$I_8 = \int_0^H \left| \sum_{p < z^{1.5}} \frac{a(p)}{p} p^{2it} \right|^{2m} dt \leq m^m H.$$

Далее, полагая

$$a(p) = \left(1 - \frac{\Lambda_z(p)}{\ln p} \right) p^{iT}$$

и замечая, что при $p \leq z$ выполнено равенство $a(p) = 0$, а при $z < p \leq z^3$ — неравенство

$$|a(p)| \leq \frac{3 \ln p}{\ln(z^3)},$$

находим:

$$I_9 = \int_0^H \left| \sum_{p < z^3} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{2m} dt \leq 13(2 \cdot 3^2 m)^m H < (e^{5.5} m)^m H.$$

Наконец, полагая $a(p) = 0$ при $p \leq z^3$ и $a(p) = p^{iT}$ при $z^3 < p < y$, получаем, что в последнем случае

$$|a(p)| = 1 = \frac{\ln y}{\ln p} \frac{\ln p}{\ln y} \leq \frac{\ln p}{\ln y} \frac{\ln x^{1/m}}{\ln x^{1/(4m)}} = 4 \frac{\ln p}{\ln y},$$

так что

$$\begin{aligned} I_{10} &\leq \int_T^{T+H} \left| \sum_{z^3 < p < y} \frac{p^{it}}{\sqrt{p}} \right|^{2m} dt \\ &= \int_0^H \left| \sum_{p < y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{it} \right|^{2m} dt \leq 13(2 \cdot 4^2 m)^m H < (e^{6.1} m)^m H. \end{aligned}$$

Сумма полученных оценок дает искомую верхнюю границу интеграла леммы:

$$\begin{aligned} \pi^{2m} I &< 7^{2m-1} \left((e^{16.2} m)^{2m} \varepsilon^{-(2m+1)} + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{24} m)^m \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} (e^{19} m)^m + m^m H + (e^{5.5} m)^m + (e^{6.1} m)^m \right) H \\ &< (7e^{16.2} m)^{2m} \varepsilon^{-(2m+1)} H < (e^{37} \varepsilon^{-3} m^2)^m H. \end{aligned}$$

Лемма 7 доказана.

§ 3. Моменты функций $S(t)$ и $S_1(t+h) - S_1(t)$

Настоящий параграф посвящен вычислению моментов величин $S(t)$ и $S_1(t+h) - S_1(t)$, т.е. нахождению асимптотик интегралов $I(\alpha)$ и $J(\alpha)$, где $\alpha \geq 0$, $h > 0$,

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \int_T^{T+H} |S(t)|^\alpha dt, \\ J(\alpha) &= \int_T^{T+H} |S_1(t+h) - S_1(t)|^\alpha dt = \int_T^{T+H} \left| \int_0^h S(t+u) du \right|^\alpha dt. \end{aligned}$$

Для неотрицательного числа α положим

$$\varkappa(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^\alpha e^{-v^2} dv = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

В частности, если ν – целое неотрицательное число, то

$$\varkappa(2\nu) = \frac{(2\nu)!}{\nu!} \quad \text{и} \quad \varkappa(2\nu+1) = \frac{2^{2\nu+1} \nu!}{\sqrt{\pi}}.$$

Как и выше, предполагаем, что равномерно по σ , $0.5 \leq \sigma \leq 1$, выполняется неравенство

$$N(\sigma, T+H) - N(\sigma, T-H) \leq 13H(\ln T)x^{-(2\sigma-1)},$$

где $H = T^{a+\varepsilon}$, $a = 0$, $x = H^{0.05} = T^{0.05\varepsilon}$ либо $a = 27/82$, $x = T^{0.1\varepsilon}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть m – целое число, $1 \leq m \leq \sqrt{\ln \ln T}$,

$$3(\ln \ln T)(\ln x)^{-1} < h \leq (\ln T)^{-0.5}.$$

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$\begin{aligned} I(2m) &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H(\ln \ln T)^m (1 + 2.4\theta A^m (\ln \ln T)^{-0.5}), \\ J(2m) &= \varkappa(2m) \left(\frac{h}{2\pi}\right)^{2m} H \left(\ln \frac{1}{h}\right)^m (1 + 2.4\theta_1 A^m (\ln \ln T)^{-0.5}), \end{aligned}$$

в которых $A = e^{39} \varepsilon^{-3}$.

В частности, справедливы асимптотические формулы:

$$\int_T^{T+H} |S(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi^2} H(\ln \ln T) (1 + 2.4\theta A(\ln \ln T)^{-0.5}),$$

$$\int_T^{T+H} |S_1(t+h) - S_1(t)|^2 dt = \frac{h^2}{2\pi^2} H\left(\ln \frac{1}{h}\right) (1 + 2.4\theta_1 A(\ln \ln T)^{-0.5}).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Формулы теоремы 1 справедливы для любого $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ с $H = T^{27/82+\varepsilon}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Формулы теоремы 1 с $H = T^\varepsilon$ справедливы для всех T из промежутка $(X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$, за исключением значений, образующих множество E с мерой, не превосходящей $X^{1-0.04\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $y = x^{1/(3m)}$. Положим

$$W(t) = \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}}, \quad R(t) = S(t) + W(t)$$

и обозначим символами I_m и D_m интегралы

$$\int_T^{T+H} W^{2m}(t) dt \quad \text{и} \quad \int_T^{T+H} R^{2m}(t) dt$$

соответственно. Для любых вещественных u и v справедливо равенство

$$(u+v)^{2m} - u^{2m} = \theta m 2^m (|u|^{2m-1}|v| + v^{2m}).$$

Полагая в нем $u = W(t)$, $v = R(t)$ и интегрируя по t , находим:

$$|I(2m) - I_m| = \left| \int_T^{T+H} \{(W(t) + R(t))^{2m} - W^{2m}(t)\} dt \right|$$

$$\leq m 2^{2m} \left(\int_T^{T+H} |R(t)| |W(t)|^{2m-1} dt + D_m \right).$$

Так как

$$\int_T^{T+H} |R(t)| |W(t)|^{2m-1} dt$$

$$\leq \left(\int_T^{T+H} |R(t)|^{2m} dt \right)^{1/(2m)} \left(\int_T^{T+H} |W(t)|^{2m} dt \right)^{1-1/(2m)}$$

$$= D_m^{1/(2m)} I_m^{1-1/(2m)},$$

то формула для $I(2m)$ принимает вид:

$$I(2m) = I_m + \theta_1 m 2^m (D_m^{1/(2m)} I_m^{1-1/(2m)} + D_m).$$

Представим $W(t)$ в виде разности

$$W = \frac{i}{2\pi} (W_1 - \overline{W_1}), \quad \text{где} \quad W_1(t) = \sum_{p < y} \frac{p^{-it}}{\sqrt{p}}.$$

Возводя $W(t)$ в степень $2m$, получим:

$$I_m = \frac{(-1)^m}{(2\pi)^{2m}} \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \binom{2m}{\nu} j_\nu, \quad j_\nu = \int_T^{T+H} W_1^\nu(t) \overline{W}_1^{2m-\nu}(t) dt.$$

Выделяя в случае $\nu = m$ “диагональные” слагаемые, находим:

$$j_m = H \sum_{P_m=Q_m} (P_m Q_m)^{-0.5} + \int_0^H \sum_{P_m \neq Q_m} (P_m Q_m)^{-0.5} \left(\frac{P_m}{Q_m} \right)^{i(T+t)} dt,$$

$$j_\nu = \int_0^H \sum_{P_\nu \neq Q_\nu} (P_\nu Q_\nu)^{-0.5} \left(\frac{P_\nu}{Q_\nu} \right)^{i(T+t)} dt, \quad \nu \neq m,$$

где $P_\nu = p_1 \cdots p_\nu$, $Q_\nu = q_1 \cdots q_{2m-\nu}$. Поскольку условие $P_\nu \neq Q_\nu$ в случае $\nu \neq m$ выполняется автоматически, то по лемме 2 модуль каждого из интегралов по t не превосходит $y^{3m} = x$. Сумма диагональных слагаемых вычисляется с помощью леммы 1 и равна

$$m! \left(\left(\sum_{p < y} p^{-1} \right)^m + \theta m^2 \left(\sum_{p < y} p^{-1} \right)^{m-2} \left(\sum_{p < y} p^{-2} \right) \right)$$

$$= m! \left((\ln \ln y)^m + \theta m^2 (\ln \ln T)^{m-2} \right) = m! (\ln \ln T)^m \left(1 + \theta \frac{m\varepsilon^{-1} \ln(m+2)}{\ln \ln T} \right).$$

Таким образом, выражение для I_m принимает следующий вид:

$$I_m = \frac{m!}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} H (\ln \ln T)^m \left(1 + \theta \frac{m\varepsilon^{-1} \ln(m+2)}{\ln \ln T} \right) + \theta \pi^{-2m} x$$

$$= \frac{m!}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} H (\ln \ln T)^m \left(1 + 2\theta \frac{m\varepsilon^{-1} \ln(m+2)}{\ln \ln T} \right)$$

$$= \frac{m!}{(2\pi)^{2m}} \binom{2m}{m} H (\ln \ln T)^m \left(1 + 2\theta \frac{\varepsilon^{-1} \ln(m+2)}{\sqrt{\ln \ln T}} \right).$$

Считаем T настолько большим, что при m , не превосходящих $\sqrt{\ln \ln T}$, второе слагаемое в скобках меньше единицы; получим:

$$I_m < 4 \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^m H (\ln \ln T)^m.$$

Пользуясь оценкой леммы 6, заключаем, что интеграл D_m не превосходит величины

$$(B\varepsilon^{-3}m^2)^m H < (B\varepsilon^{-3}m)^m H (\ln \ln T)^{m-0.5}, \quad B = e^{37} \pi^{-2},$$

а произведение $D_m^{1/(2m)} I_m^{1-1/(2m)}$ – величины

$$\sqrt{Bm^2\varepsilon^{-3}} \cdot 4 \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^{m-0.5} H (\ln \ln T)^{m-0.5} < B\varepsilon^{-1.5} \left(\frac{m}{\pi e} \right)^m H (\ln \ln T)^{m-0.5}.$$

Складывая полученные оценки, находим:

$$\begin{aligned}
 |I(2m) - I_m| &< m \left((2B\varepsilon^{-3}m)^m + \left(\frac{2m}{\pi e} \right)^m \right) H(\ln \ln T)^{m-0.5} \\
 &< 2m(2B\varepsilon^{-3}m)^m H(\ln \ln T)^{m-0.5}, \\
 I(2m) &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H(\ln \ln T)^m \left(1 + 2\theta \frac{\varepsilon^{-1} \ln(m+2)}{\sqrt{\ln \ln T}} \right) \\
 &\quad + 2\theta_1 m (2B\varepsilon^{-3}m)^m H(\ln \ln T)^{m-0.5} \\
 &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H(\ln \ln T)^m \left(1 + \frac{2\theta}{\sqrt{\ln \ln T}} \left(\varepsilon^{-1} \ln(m+2) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + m(2\pi)^{2m} \left(\frac{e}{4m} \right)^m (2B\varepsilon^{-3}m)^m \right) \right) \\
 &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H(\ln \ln T)^m \left(1 + \frac{2\theta(e^{39}\varepsilon^{-3})^m}{\sqrt{\ln \ln T}} \right) \\
 &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H(\ln \ln T)^m \left(1 + \frac{2.4\theta A^m}{\sqrt{\ln \ln T}} \right).
 \end{aligned}$$

Займемся теперь вычислением $J(2m)$. Записывая подынтегральное выражение в виде

$$S_1(t+h) - S_1(t) = - \int_0^h W(t+u) du + \int_0^h R(t+u) du,$$

с помощью рассуждений, подобных проведенным выше, приходим к формуле

$$J(2m) = J_m + \theta_1 m 2^m (K_m + K_m^{1/(2m)} I_m^{1-1/(2m)}),$$

где

$$J_m = \int_T^{T+H} \left(\int_0^h W(t+u) du \right)^{2m} dt, \quad K_m = \int_T^{T+H} \left(\int_0^h |R(t+u)| du \right)^{2m} dt.$$

Положим

$$V(t) = \sum_{p < y} \frac{a(p)}{\sqrt{p}} p^{-it}, \quad a(p) = \frac{1 - p^{ih}}{\ln p}$$

и запишем интеграл по u от $W(t+u)$ в виде

$$\int_0^h W(t+u) du = \frac{1}{2\pi} (V(t) + \bar{V}(t)).$$

Пользуясь леммой 2 и тем, что

$$|a(p)| = 2 \left| \sin \left(\frac{h}{2} \ln p \right) (\ln p)^{-1} \right| \leq h,$$

получаем:

$$J_m = (2\pi)^{-2m} \binom{2m}{m} H C_m + \theta H h^{2m},$$

где

$$C_m = \sum_{p_1 \cdots p_m = q_1 \cdots q_m} \frac{a(p_1) \cdots a(p_m) \bar{a}(q_1) \cdots \bar{a}(q_m)}{\sqrt{p_1 \cdots p_m q_1 \cdots q_m}}.$$

По лемме 1

$$\begin{aligned} C_m &= m! \left(\left(\sum_{p < y} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{h}{2} \ln p \right)}{p \ln^2 p} \right)^m \right. \\ &\quad \left. + \theta_1 m^2 \left(\sum_{p < y} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{h}{2} \ln p \right)}{p \ln^2 p} \right)^{m-2} \left(\sum_{p < y} \frac{16 \sin^4 \left(\frac{h}{2} \ln p \right)}{p^2 \ln^4 p} \right) \right). \end{aligned}$$

Преобразуем сумму по $p < y$. Так как

$$h > \frac{3 \ln \ln T}{\ln x} > \frac{3m}{\ln x},$$

то $\exp(1/h) < x^{1/(3m)} = y$. Выделяя слагаемые с $p < \exp(1/h)$, получим:

$$\sum_{p < e^{1/h}} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{h}{2} \ln p \right)}{p \ln^2 p} = \sum_{p < e^{1/h}} \frac{h^2 + \theta_2 h^4 \ln^2 p}{p} = h^2 \ln \frac{1}{h} + 2\theta h^2.$$

Оставшиеся слагаемые оценим тривиально:

$$\sum_{e^{1/h} < p < y} \frac{4 \sin^2 \left(\frac{h}{2} \ln p \right)}{p \ln^2 p} \leq 4 \sum_{p > e^{1/h}} (p \ln^2 p)^{-1} = 10 \theta_1 h^2.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} J_m &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H \left(\left(h^2 \ln \frac{1}{h} + 12\theta h^2 \right)^m + \theta_1 (2\pi)^{2m} \left(\frac{e}{4m} \right)^m h^{2m} \right) \\ &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H h^{2m} \left(\ln \frac{1}{h} \right)^m \left(\left(1 + \frac{24\theta}{\ln \ln T} \right)^m + \frac{2\theta}{\ln \ln T} \left(\frac{\pi^2 e}{m} \right)^m \right) \\ &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H h^{2m} \left(\ln \frac{1}{h} \right)^m \left(1 + \frac{4200 \theta m}{\ln \ln T} \right). \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что при достаточно больших T интеграл J_m не превосходит величины

$$\frac{2\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} H h^{2m} \left(\ln \frac{1}{h} \right)^m < 3 \left(\frac{m}{\pi^2 e} \right)^m H h^{2m} \left(\ln \frac{1}{h} \right)^m.$$

Из неравенства Гёльдера, примененного к K_m , следует, что

$$\begin{aligned} K_m &\leq \int_T^{T+H} h^{2m-1} \int_0^h |R(t+u)|^{2m} du dt \\ &= h^{2m-1} \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |R(t)|^{2m} dt du \\ &\leq (B\varepsilon^{-3} m^2)^m H h^{2m} \leq (B\varepsilon^{-3} m)^m H h^{2m} (\ln \ln T)^{m-0.5} \end{aligned}$$

и

$$K_m^{1/(2m)} J_m^{1-1/(2m)} < B m \varepsilon^{-1.5} \left(\frac{m}{\pi e^2} \right)^m H h^{2m} (\ln \ln T)^{m-0.5}.$$

Таким образом, модуль разности $J(2m) - J_m$ ограничен сверху выражением

$$\begin{aligned} & \left(Bm^2 \varepsilon^{-1.5} \left(\frac{2m}{\pi e^2} \right)^m + m(2B\varepsilon^{-3}m)^m \right) Hh^{2m} (\ln \ln T)^{m-0.5} \\ & < 2m(2B\varepsilon^{-3}m)^m Hh^{2m} (\ln \ln T)^{m-0.5}. \end{aligned}$$

Отсюда и из формулы для J_m следует, что

$$\begin{aligned} J(2m) &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} Hh^{2m} \left(\ln \frac{1}{h} \right)^m \left(1 + \frac{\theta}{\sqrt{\ln \ln T}} \right. \\ & \quad \times \left. \left(4200 + 2m(2\pi)^{2m} \left(\frac{e}{4m} \right)^m (2B\varepsilon^{-3}m)^m \right) \right) \\ &= \frac{\varkappa(2m)}{(2\pi)^{2m}} Hh^{2m} \left(\ln \frac{1}{h} \right)^m \left(1 + \frac{2.4\theta(e^{39}\varepsilon^{-3})^m}{\sqrt{\ln \ln T}} \right). \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $A = e^{39}\varepsilon^{-3}$,

$$0 \leq \alpha \leq \frac{e}{A} \frac{\ln \ln \ln T}{\ln \ln \ln \ln T},$$

и пусть

$$\gamma(\alpha) = \gamma = \begin{cases} \frac{\alpha}{2}, & \text{если } 0 \leq \alpha \leq 1, \\ \frac{1}{2} + \left\{ \frac{\alpha - 1}{2} \right\}, & \text{если } \alpha > 1. \end{cases}$$

Тогда справедливы следующие асимптотические формулы:

$$\begin{aligned} I(\alpha) &= \frac{\varkappa(\alpha)}{(2\pi)^\alpha} H (\ln \ln T)^{\alpha/2} (1 + O((A^{-1} \ln \ln \ln T)^{-\gamma})), \\ J(\alpha) &= \varkappa(\alpha) \left(\frac{h}{2\pi} \right)^\alpha H \left(\ln \frac{1}{h} \right)^{\alpha/2} (1 + O((A^{-1} \ln \ln \ln T)^{-\gamma})), \end{aligned}$$

причем постоянные в знаках O не превосходят 93, если $0 \leq \alpha \leq 1$, и не превосходят 2^{13} при $\alpha > 1$. В частности,

$$\begin{aligned} \int_T^{T+H} |S(t)| dt &= \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln T} (1 + 93\sqrt{A}\theta(\ln \ln \ln T)^{-0.5}), \\ \int_T^{T+H} |S_1(t+h) - S_1(t)| dt &= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \frac{1}{h}} (1 + 93\sqrt{A}\theta(\ln \ln \ln T)^{-0.5}). \end{aligned}$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Формулы теоремы 2 для интегралов $I(a)$ и $J(a)$ имеют место при любом $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ с $H = T^{27/82+\varepsilon}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Формулы теоремы 2 для интегралов $I(a)$ и $J(a)$ с $H = T^\varepsilon$ справедливы для всех $T \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$, за исключением значений, принадлежащих множеству E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0.04\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F_1(t) = \frac{2\pi S(t)}{\sqrt{\ln \ln T}}, \quad F_2(t) = \frac{2\pi(S_1(t+h) - S_1(t))}{h\sqrt{\ln(h^{-1})}}$$

и рассмотрим интеграл

$$j(\alpha) = H^{-1} \int_T^{T+H} |F(t)|^\alpha dt,$$

где F — одна из функций F_1 или F_2 . Из теоремы 1 следует, что при целых m , удовлетворяющих условию $1 \leq m \leq \sqrt{\ln \ln T}$, для $j(2m)$ верна формула:

$$j(2m) = \varkappa(2m)(1 + 2.4\theta A^m (\ln \ln T)^{-0.5}), \quad A = e^{39} \varepsilon^{-3}.$$

Нам достаточно показать, что

$$j(\alpha) = \varkappa(\alpha)(1 + O((A^{-1} \ln \ln \ln T)^{-\gamma})).$$

Рассмотрим сначала случай $0 < \alpha \leq 1$. Положим

$$\lambda = \frac{1}{4\sqrt{A}} \sqrt{\ln \ln \ln T}, \quad N = \left\lceil \frac{e}{3A} \ln \ln \ln T \right\rceil + 1.$$

Тогда для $\nu \leq N + 1$ имеем:

$$2.4A^\nu (\ln \ln T)^{-0.5} \leq 2.4A^2 (\ln \ln T)^{\frac{e \ln A}{3A} - 1/2} \leq 2.4A^2 (\ln \ln T)^{1/3 - 1/2} < 1,$$

так что $j(2\nu) < 2\varkappa(2\nu)$.

Полагая в тождестве леммы 4 $z = F(t)$ и интегрируя обе части полученного равенства по t в пределах от $t = T$ до $t = T + H$, приходим к следующему выражению для $j(\alpha)$:

$$j(\alpha) = (\varkappa_1 H)^{-1} \int_T^{T+H} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(uF(t))}{u^{1+\alpha}} du dt.$$

Заменим промежуток $(0, +\infty)$ на конечный и приближим величину $\sin^2(uF(t))$ отрезком ряда Тейлора по четным степеням $uF(t)$. Если затем поменять порядок интегрирования, то правая часть равенства представится в виде линейной комбинации интегралов $j(2m)$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Таким образом, вычисление дробного момента $F(t)$ сведется к вычислению некоторой суммы, в которой участвуют лишь четные моменты этой функции.

Произведем теперь необходимые вычисления. Представим $j(\alpha)$ в виде $j(\alpha) = j_1 + r_1$, где

$$j_1 = (\varkappa_1 H)^{-1} \int_0^\lambda \int_T^{T+H} \frac{\sin^2(uF(t))}{u^{1+\alpha}} du dt,$$

$$0 \leq r_1 = (\varkappa_1 H)^{-1} \int_\lambda^{+\infty} \int_T^{T+H} \frac{\sin^2(uF(t))}{u^{1+\alpha}} dt du \leq (\varkappa_1 \alpha \lambda^\alpha)^{-1} \leq 4\pi \lambda^{-\alpha}.$$

Согласно формуле Тейлора,

$$\sin^2(uF(t)) = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^N \frac{(-1)^{\nu-1}}{(2\nu)!} (2uF(t))^{2\nu} + \frac{\theta_1}{2} \frac{(2uF(t))^{2N+2}}{(2N+2)!}.$$

Подставляя это выражение в равенство для j_1 , находим: $j_1 = j_2 + r_2$, где

$$j_2 = \varkappa_1^{-1} \int_0^\lambda u^{-(1+\alpha)} \left(\sum_{\nu=1}^N (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu-1}}{(2\nu)!} j(2\nu) u^{2\nu} \right) du,$$

$$|r_2| \leq 2\varkappa_1^{-1} \frac{2^{2N}}{(2N+2)!} j(2N+2) \int_0^\lambda u^{2N+1-\alpha} du.$$

Пользуясь неравенством $j(2N+2) < 2\kappa(2N+2)$ и формулой Стирлинга для $N!$, получаем:

$$|r_2| < 2\varkappa_1^{-1} \frac{2^{2N}}{(2N+2)!} \frac{(2N+2)!}{(N+1)!} \frac{\lambda^{2N+2-\alpha}}{2N+2-\alpha}$$

$$< 4\sqrt{2\pi} \frac{\lambda^2}{N^{2.5}} \left(\frac{4e\lambda^2}{N} \right)^N \lambda^{-\alpha} < (0.75)^N \lambda^{-\alpha} < 0.25\lambda^{-\alpha}.$$

Заменяя в формуле для j_2 величины $j(2\nu)$ их явными выражениями, находим: $j_2 = j_3 + r_3$, где

$$j_3 = \varkappa_1^{-1} \int_0^\lambda u^{-(1+\alpha)} \left(\sum_{\nu=1}^N (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu-1}}{(2\nu)!} u^{2\nu} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} (2v)^{2\nu} e^{-v^2} dv \right) \right) du,$$

$$|r_3| < \frac{1.2\varkappa_1^{-1}}{\sqrt{\ln \ln T}} \int_0^\lambda u^{-(1+\alpha)} \left(\sum_{\nu=1}^N \frac{2^{2\nu} A^\nu}{(2\nu)!} \frac{(2\nu)!}{\nu!} u^{2\nu} \right) du$$

$$< \frac{16}{\sqrt{\ln \ln T}} \sum_{\nu=1}^N \frac{(4A)^\nu}{\nu!} \frac{\lambda^{2\nu-\alpha}}{2\nu-\alpha}$$

$$< 16\lambda^{-\alpha} \frac{e^{4A\lambda^2}}{\sqrt{\ln \ln T}} < 16\lambda^{-\alpha} (\ln \ln T)^{0.25-0.5} < 0.25\lambda^{-\alpha}.$$

Для преобразования j_3 снова воспользуемся формулой Тейлора:

$$j_3 = \frac{2\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \int_0^\lambda u^{-(1+\alpha)} \left(\sum_{\nu=1}^N (-1)^{\nu-1} \frac{2^{2\nu-1}}{(2\nu)!} (2uv)^{2\nu} \right) du dv$$

$$= \frac{2\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \int_0^\lambda u^{-(1+\alpha)} \left(\sin^2(2uv) + \theta_3 \frac{(4uv)^{2N+2}}{(2N+2)!} \right) du dv$$

$$= \frac{2\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(2uv)}{u^{1+\alpha}} du dv + r_4$$

$$= \frac{2\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \varkappa_1(2v)^\alpha dv + r_4 = \varkappa(\alpha) + r_4,$$

где

$$|r_4| \leq \frac{2\varkappa^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \left(\int_0^\lambda u^{-(1+\alpha)} \frac{(4uv)^{2N+2}}{(2N+2)!} du + \int_\lambda^{+\infty} \frac{\sin^2(2uv)}{u^{1+\alpha}} du \right) dv.$$

Первое слагаемое в правой части последнего неравенства не превосходит величины

$$\begin{aligned} & 2\kappa_1^{-1} \frac{2^{2N}}{(2N+2)!} \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^{2N+2} e^{-v^2} dv \right) \left(\int_0^\lambda u^{2N+1-\alpha} du \right) \\ & = 2\kappa_1^{-1} \frac{2^{2N}}{(N+1)!} \frac{\lambda^{2N+2-\alpha}}{2N+2-\alpha} < 4\pi\lambda^{-\alpha} \left(\frac{4e\lambda^2}{N} \right)^N \leq 4\pi\lambda^{-\alpha} \left(\frac{3}{4} \right)^N < 0.25\lambda^{-\alpha}, \end{aligned}$$

а второе слагаемое – величины

$$\frac{2\kappa_1^{-1}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2} dv \int_\lambda^{+\infty} u^{-(1+\alpha)} du = (\kappa_1 \alpha \lambda^\alpha)^{-1} \leq 4\pi\lambda^{-\alpha}.$$

Суммируя оценки $|r_j|$, $j = 1, 2, 3, 4$, получаем:

$$\begin{aligned} j(\alpha) &= \kappa(\alpha) + 26\theta\lambda^{-\alpha} = \kappa(\alpha)(1 + 13\sqrt{\pi}\theta\lambda^{-\alpha}) \\ &= \kappa(\alpha)(1 + 93\theta(A^{-1} \ln \ln \ln T)^{-\alpha/2}). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\alpha > 1$. Представим α в виде $2n + 1 + b$, где $n \geq 0$ – целое, а $0 \leq b < 2$, и положим

$$\lambda = \frac{1}{8\sqrt{A}} \sqrt{\ln \ln \ln T}, \quad N = \left\lceil \frac{4e^2}{A} \ln \ln \ln T \right\rceil + 1.$$

Тогда из неравенств, которым удовлетворяет α , следует, что

$$n \leq \frac{e}{2A} \frac{\ln \ln \ln T}{\ln \ln \ln \ln T} < \frac{N}{\log_2 N}, \quad \text{т.е.} \quad N^n < 2^N.$$

Далее, для любого ν , не превосходящего $N + 1$,

$$2.4A^{n+\nu+3} \leq 2.4A^{2N} \leq 2.4A^2 (\ln \ln T)^{\frac{4e^2 \ln A}{A}} < \sqrt{\ln \ln T}.$$

Поэтому для целых r , $r \leq n + N + 3$, справедлива оценка $j(2r) < 2\kappa(2r)$. Полагая во втором тождестве леммы 4 $z = F(t)$, домножим обе его части на $H^{-1}|F(t)|^{2n}$ и проинтегрируем по t :

$$\begin{aligned} j(\alpha) &= H^{-1} \int_T^{T+H} |F(t)|^{2n+1+b} dt \\ &= H^{-1} \int_T^{T+H} |F(t)|^{2n} \kappa_2^{-1} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(uF(t))}{u^{2+b}} du dt. \end{aligned}$$

Преобразуя $j(\alpha)$ подобно тому, как это делалось в случае $0 < \alpha \leq 1$, последовательно получим: $j(\alpha) = j_1 + r_1$, где

$$\begin{aligned} j_1 &= (\kappa_2 H)^{-1} \int_T^{T+H} |F(t)|^{2n} \int_0^\lambda \frac{\sin^4(uF(t))}{u^{2+b}} du dt, \\ |r_1| &\leq (\kappa_2 H)^{-1} \int_T^{T+H} |F(t)|^{2n} dt \int_\lambda^{+\infty} \frac{du}{u^{2+b}} \leq (\kappa_2 \lambda^{1+b})^{-1} j(2n) < 10\kappa(\alpha) \lambda^{-(1+b)}. \end{aligned}$$

Заменим в выражении для j_1 величину $\sin^4(uF(t))$ суммой

$$\sum_{\nu=2}^N b_{\nu} \frac{(2u)^{2\nu}}{(2\nu)!} |F(t)|^{2\nu} + \frac{\theta_1}{2} \frac{(4uF(t))^{2N+2}}{(2N+2)!},$$

в которой $b_{\nu} = 0.5(-1)^{\nu}(2^{2\nu-2} - 1)$. Тогда j_1 представится в виде $j_2 + r_2$, где

$$\begin{aligned} j_2 &= \varkappa_2^{-1} \int_0^{\lambda} u^{-(2+b)} \left(\sum_{\nu=2}^N b_{\nu} \frac{(2u)^{2\nu}}{(2\nu)!} j(2n+2\nu) \right) du, \\ |r_2| &\leq (2\varkappa_2)^{-1} \frac{4^{2N+2}}{(2N+2)!} j(2n+2N+2) \int_0^{\lambda} u^{2N-b} du \\ &< \frac{80\lambda^2}{N} \frac{(2^4\lambda^2)^N}{(2N+2)!} \frac{(2N+2n+2)!}{(N+n+1)!} \lambda^{-(1+b)} \\ &< \frac{40}{\sqrt{\pi}} \frac{\lambda^2}{N^{3.5}} \left(\frac{16e^2\lambda^2}{4N^2} \right)^N (2(N+n+1))^{N+n+1} \lambda^{-(1+b)} \\ &< \frac{24\lambda^2}{N^{3.5}} \left(\frac{4e^2\lambda^2}{N^2} \right)^N (4N)^{N+n+1} \lambda^{-(1+b)} \\ &< \frac{24\lambda^2}{N^{2.5}} \left(\frac{4e^2\lambda^2}{N^2} \right)^N 4^{2N} N^N 2^N \lambda^{-(1+b)} \\ &< \left(\frac{128\lambda^2 e^2}{N} \right)^N \lambda^{-(1+b)} \\ &< 2^{-N} \lambda^{-(1+b)} < \frac{\varkappa(\alpha)}{3} \lambda^{-(1+b)}. \end{aligned}$$

Представим j_2 в виде $j_3 + r_3$, где

$$\begin{aligned} j_3 &= \varkappa_2^{-1} \int_0^{\lambda} u^{-(2+b)} \sum_{\nu=2}^N b_{\nu} \frac{(2u)^{2\nu}}{(2\nu)!} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^{+\infty} (2v)^{2n+2\nu} e^{-v^2} dv \right) du \\ &= \varkappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^{2n} e^{-v^2} \int_0^{\lambda} u^{-(2+b)} \left(\sum_{\nu=2}^N b_{\nu} \frac{(4uv)^{2\nu}}{(2\nu)!} \right) du dv \\ &= \varkappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^{2n} e^{-v^2} \int_0^{\lambda} u^{-(2+b)} \left(\sin^4(2uv) + \frac{\theta_2}{2} \frac{(4uv)^{2N+2}}{(2N+2)!} \right) du dv, \\ |r_3| &< \frac{1.2\varkappa_2^{-1} A^n}{\sqrt{\ln \ln X}} \int_0^{\lambda} u^{-(2+b)} \sum_{\nu=2}^N \frac{2^{4\nu} A^{\nu}}{(2\nu)!} \varkappa(2n+2\nu) u^{2\nu} du \\ &< \frac{6A^n}{\sqrt{\ln \ln T}} \sum_{\nu=2}^N \frac{(16A)^{\nu}}{\nu!} \varkappa^{-1}(2\nu) \varkappa(2n+2\nu) \frac{\lambda^{2\nu-1-b}}{2\nu-1-b}. \end{aligned}$$

Поскольку α не превосходит величины

$$\frac{e}{A} \frac{\ln \ln \ln T}{\ln \ln \ln \ln T},$$

то

$$A^n \leq A^{\alpha/2} \leq \exp\left(\frac{e}{2} \frac{\ln A}{A} \frac{\ln \ln \ln T}{\ln \ln \ln \ln T}\right) \leq \exp\left(0.5 \frac{\ln \ln \ln T}{\ln \ln \ln \ln T}\right) < (\ln \ln T)^{0.1}.$$

Покажем теперь, что для $2 \leq \nu \leq N+1$

$$\varkappa^{-1}(2\nu)\varkappa(2n+2\nu) < 2^{4N}N^{2n+1}.$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \varkappa(2n+2\nu) &= (n+\nu+1)(n+\nu+2) \cdots (2n+2\nu) \\ &< (2n+2\nu)^{n+\nu+1} = 2^{n+\nu+1}(n+\nu)(n+\nu)^n(n+\nu)^\nu \\ &< 2^{2N}2N(2N)^n(n+\nu)^\nu \leq 2^{3N}N^{n+1}(n+\nu)^\nu, \end{aligned}$$

так что

$$\begin{aligned} \varkappa^{-1}(2\nu)\varkappa(2n+2\nu) &= \frac{\nu!}{(2\nu)!}\varkappa(2n+2\nu) < \sqrt{2}\left(\frac{e}{4\nu}\right)^\nu 2^{3N}N^{n+1}(n+\nu)^\nu \\ &< 2^{3N}N^{n+1}(n\nu^{-1}+1)^\nu. \end{aligned}$$

Если $\nu \leq n$, то

$$(n\nu^{-1}+1)^\nu \leq (n+1)^n \leq N^n < 2^N N^n,$$

а если $n < \nu \leq N+1$, то

$$(n\nu^{-1}+1)^\nu < 2^\nu \leq 2^{N+1} \leq 2^N N^n.$$

Отсюда следует искомое неравенство. Возвращаясь к оценке r_3 , будем иметь:

$$\begin{aligned} |r_3| &< 6\lambda^{-(1+b)}(\ln \ln T)^{0.1-0.5}2^{4N}N^{2n+1} \sum_{\nu=2}^N \frac{(16A\lambda^2)^\nu}{\nu!} \\ &< 6\lambda^{-(1+b)} \frac{2^{4N}N^{2n+1}}{(\ln \ln T)^{0.4}} e^{16A\lambda^2}. \end{aligned}$$

Так как

$$e^{16A\lambda^2} \leq (\ln \ln T)^{0.25}, \quad 2^{4N}N^{2n+1} < 2^{4N}N^{3n} < 2^{4N}2^{3N} = 2^{7N} < (\ln \ln T)^{0.05},$$

то

$$|r_3| < 6\lambda^{-(1+b)}(\ln \ln T)^{0.25+0.05-0.4} < \varkappa(\alpha)\lambda^{-(1+b)}/3.$$

Представим интеграл j_3 суммой $j_4 + r_4$, в которой

$$\begin{aligned} j_4 &= \varkappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^{2n} e^{-v^2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(2uv)}{u^{2+b}} du dv, \\ |r_4| &\leq \varkappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^{2n} e^{-v^2} \\ &\quad \times \left(\int_\lambda^{+\infty} \frac{\sin^4(2uv)}{u^{2+b}} du + \int_0^\lambda u^{-(2+b)} \frac{(4uv)^{2N+2}}{(2N+2)!} du \right) dv. \end{aligned}$$

Пользуясь определением $\varkappa(\alpha)$, находим:

$$j_4 = \varkappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^{2n} e^{-v^2} (2v)^{1+b} \varkappa_2 dv = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^\alpha e^{-v^2} dv = \varkappa(\alpha).$$

Первое слагаемое в оценке для $|r_4|$ не превосходит величины

$$\varkappa_2^{-1} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^{2n} e^{-v^2} dv \int_{\lambda}^{+\infty} u^{-(2+b)} du \leq \varkappa_2^{-1} \lambda^{-(1+b)} \varkappa(2n) < 5\varkappa(\alpha) \lambda^{-(1+b)},$$

а второе – величины

$$\begin{aligned} & (2\varkappa_2)^{-1} \frac{2^{2N+2}}{(2N+2)!} \varkappa(2n+2N+2) \int_0^{\lambda} u^{2N-b} du \\ & < (2\varkappa_2)^{-1} \frac{2^{2N+2}}{(N+1)!} \frac{\lambda^{2N+1-b}}{2N+1-b} \varkappa^{-1}(2N+2) \varkappa(2n+2N+2) \\ & < \frac{10 \cdot 2^{2N}}{(N+1)!} \frac{\lambda^{2N+1-b}}{2N+1-b} 2^{4N} N^{2n+1} < \frac{4\lambda^2}{N^{1.5}} \frac{(4e\lambda^2)^N}{N^N} 2^{4N} N^{2n} \lambda^{-(1+b)} \\ & < \frac{4\lambda^2}{N^{1.5}} \left(\frac{2^8 e \lambda^2}{N} \right)^N \lambda^{-(1+b)} < e^{-N} \lambda^{-(1+b)} < \varkappa(\alpha) \lambda^{-(1+b)} / 3. \end{aligned}$$

Складывая полученные оценки для $|r_j|$, $j = 1, 2, 3, 4$, находим:

$$j(\alpha) = \varkappa(\alpha) (1 + 2^{13} \theta (A^{-1} \ln \ln \ln T)^{-(1+b)/2}).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\frac{1+b}{2} = \frac{1}{2} + \left\{ \frac{\alpha-1}{2} \right\}.$$

Теорема 2 доказана.

§ 4. Число перемен знака функции $S(t)$

В этом параграфе будет получена нижняя оценка для числа точек промежутка $(T, T+H]$, в которых $S(t)$ меняет свой знак.

ТЕОРЕМА 3. При $C = e^{26.2} \varepsilon^{-1.5}$ справедливо следующее неравенство:

$$M(T+H) - M(T) > H(\ln T) \exp\left(-C \frac{\ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}\right).$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Неравенство теоремы 3 справедливо при любом $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ с $H = T^{27/82+\varepsilon}$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Неравенство теоремы 3 с $H = T^\varepsilon$ справедливо для всех $T \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0.04\varepsilon}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть параметр h , точное значение которого будет выбрано ниже, удовлетворяет неравенствам

$$3(\ln \ln T)(\ln x)^{-1} < h < (\ln T)^{-0.5}.$$

Положим

$$j_1(t; h) = \int_0^h |S(t+u)| du, \quad j_2(t; h) = \left| \int_0^h S(t+u) du \right|$$

и обозначим буквой $\mathcal{E}$ множество тех точек t , $T < t \leq T + H$, для которых

$$j_1(t; h) > j_2(t; h).$$

Тогда для всех t , принадлежащих множеству $\mathcal{E}_1 = (T, T + H] - \mathcal{E}$, выполнено равенство $j_1(t; h) = j_2(t; h)$. Положим $\nu_0 = [Hh^{-1}]$, $H' = h\nu_0$. Пусть ν_1 – количество промежутков вида $(T + (\nu - 1)h, T + \nu h] = (T', T' + h]$, $1 \leq \nu \leq \nu_0$, пересечение которых с $\mathcal{E}$ непусто. Занумеруем их в порядке возрастания правых концов и отнесем к множеству $\mathcal{G}$ те из них, номера которых – четные числа: $2, 4, \dots, 2\nu_2 = 2[0.5\nu_1]$.

Если точка τ множества $\mathcal{E}$ принадлежит промежутку $(T', T' + h]$ из $\mathcal{G}$, то справедливо неравенство

$$j_1(t; h) = \int_{\tau}^{\tau+h} |S(t)| dt > \left| \int_{\tau}^{\tau+h} S(t) dt \right| = j_2(t; h).$$

Оно означает, что на интервале $(\tau, \tau + h)$ имеется точка перемены знака $S(t)$. Так как $\tau + h \leq T' + 2h$, то эта точка содержится в интервале $(T', T' + 2h)$. Поскольку расстояние между любыми двумя точками соседних промежутков из $\mathcal{G}$ больше h , то никакие два из ν_2 построенных таким образом интервалов $(T', T' + 2h)$ не пересекаются. Отсюда следует, что на промежутке $(T, T + H']$ имеется по меньшей мере ν_2 точек, в которых $S(t)$ меняет знак. Таким образом,

$$M(T + H) - M(T) \geq M(T + H') - M(T) \geq \nu_2 \geq \nu_1/2 - 1.$$

Так как множество $\mathcal{E}$ целиком покрыто объединением ν_1 промежутков длины h , то $\text{mes}(\mathcal{E}) \leq \nu_1 h$. Поэтому число перемен знака $S(t)$ на $(T, T + H]$ оценивается снизу величиной

$$\frac{\text{mes}(\mathcal{E})}{2h} - 1.$$

Оценим теперь меру множества $\mathcal{E}$ снизу. Пользуясь определением множеств $\mathcal{E}$ и $\mathcal{E}_1$ и неравенством Коши, находим:

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_T^{T+H} j_1(t; h) dt = \left(\int_{\mathcal{E}} + \int_{\mathcal{E}_1} \right) j_1(t; h) dt \\ &= \int_{\mathcal{E}_1} j_2(t; h) dt + \int_{\mathcal{E}} j_1(t; h) dt \leq I_2 + \sqrt{\text{mes}(\mathcal{E})} \sqrt{I_3}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_T^{T+H} j_2(t; h) dt = \int_T^{T+H} |S_1(t + h) - S_1(t)| dt, \\ I_3 &= \int_T^{T+H} \left(\int_0^h |S(t + u)| du \right)^2 dt. \end{aligned}$$

После несложных преобразований получаем:

$$\text{mes}(\mathcal{E}) \geq \frac{(I_1 - I_2)^2}{I_3}.$$

Согласно теореме 2,

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |S(t)| dt du \\
 &= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln T} (1 + 93\sqrt{A} \theta(\ln \ln \ln T)^{-0.5}) \\
 &\geq \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln T} - \frac{93\sqrt{A}}{\pi\sqrt{\pi}} Hh \sqrt{\frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}}, \\
 I_2 &= \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \frac{1}{h}} (1 + 93\sqrt{A} \theta(\ln \ln \ln T)^{-0.5}) \\
 &\leq \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \frac{1}{h}} + \frac{93\sqrt{A}}{\pi\sqrt{\pi}} Hh \sqrt{\frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}},
 \end{aligned}$$

где $A = e^{39}\varepsilon^{-3}$, так что

$$I_1 - I_2 \geq \frac{Hh}{\pi\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{\ln \ln T} - \sqrt{\ln \frac{1}{h}} \right) - \frac{186\sqrt{A}}{\pi\sqrt{\pi}} Hh \sqrt{\frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}}.$$

Положим теперь

$$h = (\ln T)^{-1} \exp \left(4 \cdot 186\sqrt{A} \frac{\ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}} \right).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 \sqrt{\ln \ln T} - \sqrt{\ln \frac{1}{h}} &= \frac{\ln(h \ln T)}{\sqrt{\ln \ln T} + \sqrt{\ln \frac{1}{h}}} \geq \frac{\ln(h \ln T)}{2\sqrt{\ln \ln T}} = 2 \cdot 186\sqrt{A} \frac{\ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}}, \\
 I_1 - I_2 &\geq (2 \cdot 186 - 186) \frac{\sqrt{A}}{\pi\sqrt{\pi}} Hh \sqrt{\frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}} = \frac{186\sqrt{A}}{\pi\sqrt{\pi}} Hh \sqrt{\frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}}.
 \end{aligned}$$

Интеграл I_3 оценим, пользуясь теоремой 1:

$$\begin{aligned}
 I_3 &\leq h \int_T^{T+H} \int_0^h |S(t+u)|^2 du dt \leq h \int_0^h \int_{T+u}^{T+H+u} |S(t)|^2 dt du \\
 &\leq h^2 \left(\frac{H}{2\pi^2} \ln \ln T + O(HA\sqrt{\ln \ln T}) \right) < Hh^2 \ln \ln T.
 \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\text{mes}(\mathcal{E}) \geq \left(\frac{186\sqrt{A}}{\pi\sqrt{\pi}} Hh \sqrt{\frac{\ln \ln T}{\ln \ln \ln T}} \right)^2 (Hh^2 \ln \ln T)^{-1} = \pi^{-3} 186^2 A H (\ln \ln \ln T)^{-1}.$$

Переходя к оценке разности $M(T+H) - M(T)$, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 M(T+H) - M(T) &\geq 0.5\pi^{-3} 186^2 A \frac{H \ln T}{\ln \ln \ln T} \exp \left(-4 \cdot 186\sqrt{A} \frac{\ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}} \right) - 1 \\
 &\geq H(\ln T) \exp \left(-e^{26.2} \varepsilon^{-1.5} \frac{\ln \ln T}{\sqrt{\ln \ln \ln T}} \right).
 \end{aligned}$$

Теорема 3 доказана.

§ 5. Верхняя оценка длины промежутка, содержащего точку перемены знака $S(t)$

Еще один подход к исследованию функции $M(T)$ был предложен в 1983 г. Дж. Мюллер [20].

Пусть T – достаточно большое положительное число. При каком наименьшем значении A промежуток $(T - A, T + A)$ будет содержать точку перемены знака функции $S(t)$?

Цель настоящего параграфа состоит в доказательстве двух утверждений, удовлетворительно отвечающих на поставленный вопрос.

ТЕОРЕМА 4. *Если гипотеза Римана верна, то при $T \geq T_0 > 0$, $A = 4.39 \times \ln \ln \ln T$ любой промежуток $(T - A, T + A)$ содержит точку перемены знака $S(t)$.*

ТЕОРЕМА 5. *Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $A = 4.39 \ln \ln \ln T$. Тогда интервал $(t - A, t + A)$ содержит точку перемены знака функции $S(t)$ при любом t , $T \leq t \leq T + H$, за исключением значений из множества E с мерой $\text{mes}(E) = O(H(\ln \ln T)^{-0.5})$.*

Основой доказательства этих утверждений является следующее соображение. Пусть неотрицательные функции $\psi_0(u)$ и $\psi_1(u)$ таковы, что при некотором положительном A для данного T выполнены неравенства:

$$\int_{-A}^A \psi_0(u) S(T+u) du < 0, \quad \int_{-A}^A \psi_1(u) S(T+u) du > 0.$$

Тогда функция $S(t)$ меняет знак по крайней мере в одной точке промежутка $(T - A, T + A)$. Специальный подбор функций $\psi_k(u)$, $k = 0, 1$, позволяет выбрать в теореме 4 величину A достаточно малой (порядка $\ln \ln \ln T$). Отказ от использования гипотезы Римана и применение плотностной теоремы 1 главы I позволяет получить подобный результат для “почти всех” T , но с еще меньшим значением A .

Доказательству теорем 4 и 5 предпошем ряд вспомогательных утверждений.

ЛЕММА 8. *Пусть $\psi(z)$ – функция, вещественная на вещественной прямой, аналитическая в полосе $|\text{Im } z| \leq 1$ и удовлетворяющая там условию $|\psi(z)| \leq c(|z| + 1)^{-(1+\alpha)}$, где c и α – положительные абсолютные постоянные. Пусть символ $\widehat{\psi}(x)$ обозначает интеграл*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) e^{-ixu} du.$$

Тогда при любом вещественном t справедлива формула:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(u) S(t+u) du &= \pi^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \ln n} \text{Im}(n^{-it} \widehat{\psi}(\ln n)) \\ &+ 2 \left(\sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta-0.5} \text{Im} \psi(\gamma - t - ix) dx - \int_0^{0.5} \text{Im} \psi(-t - ix) dx \right), \end{aligned}$$

где β пробегает вещественные части нулей дзета-функции, лежащие правее критической прямой.

Доказательство см. в [1].

Пусть $K(z) = \exp(-(e^z + e^{-z}))$. Полагая $z = x + iy$, где $|y| \leq 1$, нетрудно убедиться, что

$$|K(x + iy)| = \exp(-(e^x + e^{-x}) \cos y) \leq c(1 + |x + iy|)^{-(1+\alpha)}$$

при $c = 3$ и $\alpha = 1$.

ЛЕММА 9. При обозначениях леммы 8 для любых вещественных x и b , $0 < b < \pi/2$, справедливо неравенство:

$$|\hat{K}(x)| \leq \varkappa(b) \exp(-b|x|), \quad \text{где} \quad \varkappa(b) = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-(e^u + e^{-u}) \cos b) du.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $x \geq 0$. Возьмем $R > 1$ и рассмотрим интеграл

$$I = \int_{\Gamma} K(z) e^{-ixz} dz,$$

где Γ – граница прямоугольника с вершинами в точках $\pm R$, $\pm R - ib$, обходимая против часовой стрелки. По теореме Коши о вычетах $I = 0$. Сумма интегралов по боковым сторонам контура по модулю не превосходит величины

$$\begin{aligned} \int_0^b (|K(R + it)| + |K(R - it)|) e^{-xt} dt &\leq 2 \int_0^b \exp(-(e^R + e^{-R}) \cos b) dt \\ &< \pi \exp(-e^R \cos b). \end{aligned}$$

Следовательно, при некотором θ , модуль которого не превосходит единицы, имеет место равенство:

$$\int_{-R}^R K(u) e^{-ixu} du = \int_{-R}^R K(u - ib) e^{-ix(u - ib)} du + \pi \theta \exp(-e^R \cos b).$$

Устремим R к бесконечности и заметим, что предел левой части равен $\hat{K}(x)$. Получаем:

$$\begin{aligned} |\hat{K}(x)| &\leq e^{-xb} \int_{-\infty}^{+\infty} |K(u - ib)| du \\ &\leq e^{-xb} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-(e^u + e^{-u}) \cos b) du = \varkappa(b) e^{-xb}. \end{aligned}$$

В случае, когда $x < 0$, доказательство проводится аналогично, с той лишь разницей, что в качестве пути интегрирования Γ следует взять контур, симметричный относительно вещественной оси рассмотренному выше. Лемма 9 доказана.

ЛЕММА 10. Пусть $1 < a < 5$, $0 < b < \pi/2$, $2ab > 1$, $A > 0$. Определим неотрицательные функции $\psi_k(u)$, $k = 0, 1$, равенством

$$\psi_k(u) = \frac{1}{a} K\left(\frac{u}{a}\right) (1 + (-1)^k \sin((t+u) \ln 2)).$$

Тогда для любого $t > t_0 > 1$ справедливы соотношения:

$$\int_{-A}^A \psi_k(u) S(t+u) du = (-1)^{k+1} c + \theta_k (U + V + W + 0.8a^{-1} \exp(-(0.5t/a)^2)),$$

где $k = 0, 1$,

$$c = \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \exp(-(e^u + e^{-u})) du = 0.02563512796 \dots, \quad |\theta_k| \leq 1,$$

$$U = U(t; a) = 3.1a^{-1} \sum_{\beta > 0.5} (\beta - 0.5)^2 \exp\left(-\left(\frac{\gamma - t}{2a}\right)^2\right),$$

$$V = V(t; A, a) = 4a^{-1} \int_A^{+\infty} K(u/a) (|S(t+u)| + |S(t-u)|) du,$$

$$W = W(a, b) = (2\pi)^{-1} \varkappa(b) ((\zeta(ab + 0.5) - 1)(2^{0.5ab} + 2^{-0.5ab})^2 - 1/\sqrt{2}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего заметим, что в полосе $|\operatorname{Im} z| \leq 1$, $z = x + iy$, модуль каждой из функций $\psi_0(z)$, $\psi_1(z)$ не превосходит величины

$$\begin{aligned} a^{-1} (1 + 0.5(2^y + 2^{-y})) \exp\left(-(e^{x/a} + e^{-x/a}) \cos \frac{y}{a}\right) \\ = 2.25 \theta \exp(-e^{|x|/a} \cos 1), \quad |\theta| \leq 1, \end{aligned}$$

верхней границей которой при $c = 30$ и $\alpha = 1$ служит дробь $c/(1 + |z|)^{1+\alpha}$. Следовательно, к интегралам

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(u) S(t+u) du, \quad k = 0, 1,$$

можно применить лемму 1. Согласно этой лемме, I_k представляется рядом

$$\pi^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \ln n} \operatorname{Im}(n^{-it} \widehat{\psi}_k(\ln n)),$$

сложенным с величиной U_k ,

$$U_k = 2 \left(\sum_{\beta > 0.5} \int_0^{\beta-0.5} \operatorname{Im} \psi_k(\gamma - t - ix) dx - \int_0^{0.5} \operatorname{Im} \psi_k(-t - ix) dx \right).$$

По определению значение $n^{-it} \widehat{\psi}_k(\ln n)$ равняется следующему несобственному интегралу:

$$\begin{aligned} n^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_k(u) n^{-iu} du \\ = n^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1} K\left(\frac{u}{a}\right) (1 + (-1)^k \sin((t+u) \ln 2)) n^{-iu} du. \end{aligned}$$

Заменяя по формуле Эйлера величину $\sin((t+u)\ln 2)$ разностью $(2^{i(t+u)} - 2^{-i(t+u)})/2i$, получим:

$$\begin{aligned} n^{-it}\widehat{\psi}_k(\ln n) &= n^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1}K\left(\frac{u}{a}\right) \left(1 + \frac{(-1)^k}{2i}(2^{i(t+u)} - 2^{-i(t+u)})\right) n^{-iu} du \\ &= n^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1}K\left(\frac{u}{a}\right) n^{-iu} du \\ &\quad + \frac{(-1)^k}{2i} \left(\frac{n}{2}\right)^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1}K\left(\frac{u}{a}\right) \left(\frac{n}{2}\right)^{-iu} du \\ &\quad - \frac{(-1)^k}{2i} (2n)^{-it} \int_{-\infty}^{+\infty} a^{-1}K\left(\frac{u}{a}\right) (2n)^{-iu} du \\ &= n^{-it}\widehat{K}(a \ln n) + \frac{(-1)^k}{2i} \left(\left(\frac{n}{2}\right)^{-it} \widehat{K}\left(a \ln \frac{n}{2}\right) - (2n)^{-it} \widehat{K}(a \ln 2n)\right). \end{aligned}$$

Из последнего соотношения видно, что при $n = 2$ в выражении для $n^{-it}\widehat{\psi}_k(\ln n)$ присутствует чисто мнимое слагаемое

$$-\frac{i}{2}(-1)^k \widehat{K}(0),$$

вклад которого в интеграл I_k равен

$$\frac{(-1)^{k+1}}{2\sqrt{2}\pi} \widehat{K}(0) = \frac{(-1)^{k+1}}{\pi\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} \exp(-(e^u + e^{-u})) du = (-1)^{k+1}c.$$

Таким образом, формула для интеграла I_k принимает следующий вид:

$$I_k = (-1)^{k+1}c + U_k + W_k,$$

где

$$\begin{aligned} W_k &= \pi^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \ln n} \operatorname{Im}(n^{-it} \widehat{K}(a \ln n)) \\ &\quad + (-1)^k (2\pi)^{-1} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \ln n} \operatorname{Im}(i(2n)^{-it} \widehat{K}(a \ln 2n)) \\ &\quad - (-1)^k (2\pi)^{-1} \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{\Lambda(n)}{\sqrt{n} \ln n} \operatorname{Im}\left(i\left(\frac{n}{2}\right)^{-it} \widehat{K}\left(a \ln \frac{n}{2}\right)\right). \end{aligned}$$

Пользуясь неравенством леммы 9, оценим W_k по абсолютной величине:

$$\begin{aligned} |W_k| &\leq \frac{\varkappa(b)}{\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-0.5-ab} + \frac{\varkappa(b)}{2\pi} \sum_{n=2}^{+\infty} n^{-0.5} (2n)^{-ab} \\ &\quad + \frac{\varkappa(b)}{2\pi} \sum_{n=3}^{+\infty} n^{-0.5} (n/2)^{-ab}. \end{aligned}$$

Так как $2ab > 1$, то ряды в правой части последнего неравенства сходятся, и их суммы равны

$$\zeta(ab + 0.5) - 1, \quad 2^{-ab}(\zeta(ab + 0.5) - 1), \quad 2^{ab}(\zeta(ab + 0.5) - 1 - 2^{-ab}/\sqrt{2}).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |W_k| &\leq \varkappa(b)\pi^{-1}(\zeta(ab + 0.5) - 1) \\ &\quad + \varkappa(b)(2\pi)^{-1}(2^{-ab}(\zeta(ab + 0.5) - 1) + 2^{ab}(\zeta(ab + 0.5) - 1 - 2^{-ab}/\sqrt{2})) \\ &= \varkappa(b)(2\pi)^{-1}((\zeta(ab + 0.5) - 1)(2^{0.5ab} + 2^{-0.5ab})^2 - 1/\sqrt{2}) = W(a, b). \end{aligned}$$

Оценим U_k . Обозначим символом $I(\varrho)$ интеграл

$$\int_0^{\beta-0.5} \operatorname{Im} \psi_k(\gamma - t - ix) dx, \quad \varrho = \beta + i\gamma.$$

Из определения функций ψ_k заключаем, что подынтегральное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} a^{-1} \exp\left(-e^{(\gamma-t)/a} + e^{-(\gamma-t)/a}\right) \cos \frac{x}{a} \\ \times \left((1 + 0.5(-1)^k \sin(\gamma \ln 2)(2^x + 2^{-x})) \sin(\sin(x/a)(e^{(\gamma-t)/a} - e^{-(\gamma-t)/a})) \right. \\ \left. - 0.5(-1)^k \cos(\gamma \ln 2)(2^x - 2^{-x}) \cos(\sin(x/a)(e^{(\gamma-t)/a} - e^{-(\gamma-t)/a})) \right). \end{aligned}$$

Поскольку $|\sin \xi| \leq |\xi|$ для любого вещественного ξ , то мнимая часть $\psi_k(\gamma - t - ix)$ удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} |\operatorname{Im} \psi_k(\gamma - t - ix)| &\leq a^{-1} \exp(-e^{|\gamma-t|/a} \cos(0.5/a)) \\ &\quad \times ((1 + 0.5(\sqrt{2} + 1/\sqrt{2}))xa^{-1}e^{|\gamma-t|/a} + 0.5(2^x - 2^{-x})) \\ &< a^{-1} \exp(-e^{|\gamma-t|/a} \cos 0.5) (2.1a^{-1}xe^{|\gamma-t|/a} + x\sqrt{2} \ln 2) \\ &< 3.1a^{-1}x \exp(-e^{|\gamma-t|/a} \cos 0.5 + |\gamma - t|/a). \end{aligned}$$

Заменим показатель экспоненты более простым выражением. При любом неотрицательном ξ верны неравенства:

$$\left(\cos \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\right)e^\xi > e^{\xi-1} > 1 + (\xi - 1) = \xi \quad \text{и} \quad -\frac{1}{2}e^\xi < -\left(\frac{\xi}{2}\right)^2.$$

Отсюда следует, что

$$-e^{|\gamma-t|/a} \cos \frac{1}{2} + \frac{|\gamma-t|}{a} < -0.5e^{|\gamma-t|/a} < -\left(\frac{\gamma-t}{2a}\right)^2.$$

Таким образом, интеграл $I(\varrho)$ по модулю не превосходит величины

$$\int_0^{\beta-0.5} 3.1a^{-1}x \exp\left(-\left(\frac{\gamma-t}{2a}\right)^2\right) dx = 1.55a^{-1}(\beta - 0.5)^2 \exp\left(-\left(\frac{\gamma-t}{2a}\right)^2\right),$$

а интеграл $I(1) = \int_0^{0.5} \operatorname{Im} \psi_k(-t - ix) dx$ — величины

$$0.4a^{-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{2a}\right)^2\right).$$

Отсюда следует нужная оценка U_k :

$$\begin{aligned} |U_k| &< 3.1a^{-1} \sum_{\beta > 0.5} (\beta - 0.5)^2 \exp\left(-\left(\frac{\gamma - t}{2a}\right)^2\right) + 0.8a^{-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{2a}\right)^2\right) \\ &= U(t) + 0.8a^{-1} \exp\left(-\left(\frac{t}{2a}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Для завершения доказательства леммы представим I_k суммой

$$\left(\int_{-A}^A + \int_{-\infty}^{-A} + \int_A^{+\infty}\right) \psi_k(u) S(t+u) du = \int_{-A}^A \psi_k(u) S(t+u) du + V_k$$

и заметим, что вклад V_k от двух несобственных интегралов по абсолютной величине не превосходит

$$\begin{aligned} &\int_A^{+\infty} |\psi_k(u)| |S(t+u)| du + \int_A^{+\infty} |\psi_k(-u)| |S(t-u)| du \\ &\leq 2a^{-1} \int_A^{+\infty} \left(K\left(\frac{u}{a}\right) |S(t+u)| + K\left(-\frac{u}{a}\right) |S(t-u)|\right) du = V(t). \end{aligned}$$

Лемма 10 доказана.

ЛЕММА 11. Пусть ε — сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, и пусть

$$j_1(T) = \int_T^{T+H} U(t) dt.$$

Тогда имеет место неравенство $j_1(T) < (90\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим интеграл

$$j(T; \gamma) = \int_T^{T+H} \exp\left(-\left(\frac{\gamma - t}{2a}\right)^2\right) dt.$$

Так как при $T \leq t \leq T+H$ дробь $(t-T)^2/H^2$ не превосходит единицы, то справедливы оценки:

$$\begin{aligned} j(T; \gamma) &\leq e \int_T^{T+H} \exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2 - \left(\frac{\gamma - t}{2a}\right)^2\right) dt \\ &< e \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{t-T}{H}\right)^2 - \left(\frac{\gamma - t}{2a}\right)^2\right) dt. \end{aligned}$$

Выделяя в показателе экспоненты полный квадрат и делая замену переменной интегрирования, будем иметь:

$$\begin{aligned} j(T; \gamma) &< e \exp\left(-\frac{(\gamma - T)^2}{H^2 + (2a)^2}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\left(\frac{1}{H^2} + \frac{1}{(2a)^2}\right)t^2\right) dt \\ &= e \sqrt{\frac{\pi}{H^{-2} + (2a)^{-2}}} \exp\left(-\frac{(\gamma - T)^2}{H^2 + (2a)^2}\right) \\ &< 2ae\sqrt{\pi} \exp\left(-\left(\frac{\gamma - T}{2H}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл из условия леммы не превосходит величины

$$\begin{aligned} &3.1a^{-1} \cdot 2ae\sqrt{\pi} \sum_{\beta > 0.5} (\beta - 0.5)^2 \exp\left(-\left(\frac{\gamma - T}{2H}\right)^2\right) \\ &= 30\theta \sum_{\beta > 0.5} (\beta - 0.5)^2 \exp\left(-\left(\frac{\gamma - T}{2H}\right)^2\right), \quad |\theta| \leq 1. \end{aligned}$$

Представим сумму по нулям дзеты в виде

$$\sum_{\nu=0}^{+\infty} \sum_{2\nu H < |\gamma - T| \leq 2(\nu+1)H} (\beta - 0.5)^2 \exp\left(-\left(\frac{\gamma - T}{2H}\right)^2\right) = U^{(1)} + U^{(2)},$$

относя к $U^{(1)}$ члены с $\nu \leq TH^{-1}/3$, а к $U^{(2)}$ – все остальные слагаемые; получим:

$$U^{(1)} = \sum_{\nu=0}^{+\infty} e^{-\nu^2} \left(\sum_{T+2\nu H < \gamma \leq T+2(\nu+1)H} (\beta - 0.5)^2 + \sum_{T-2(\nu+1)H \leq \gamma < T+2\nu H} (\beta - 0.5)^2 \right).$$

Оценим сначала первую внутреннюю сумму. Фиксируя произвольное целое число k из промежутка $0 \leq k \leq 0.5 \ln T$, убеждаемся, что количество членов этой суммы, удовлетворяющих условию $k(\ln T)^{-1} < \beta - 0.5 \leq (k+1)(\ln T)^{-1}$, не превосходит разности

$$N(0.5 + k(\ln T)^{-1}, T + 2(\nu+1)H) - N(0.5 + k(\ln T)^{-1}, T + 2\nu H),$$

верхней границей которой, согласно теореме 1 главы I, служит величина

$$13 \cdot 2H(\ln T)T^{-0.1\varepsilon(2(0.5+k/\ln T)-1)} = 26H(\ln T)e^{-0.2k\varepsilon}.$$

При этом вклад в сумму от каждого из этих слагаемых не превосходит величины

$$\left(0.5 + \frac{k+1}{\ln T} - 0.5\right)^2 = \left(\frac{k+1}{\ln T}\right)^2.$$

Следовательно, имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned}
 \sum_{T+2\nu H < \gamma \leq T+2(\nu+1)H} (\beta - 0.5)^2 &\leq \sum_{0 \leq k \leq 0.5 \ln T} \left(\frac{k+1}{\ln T} \right)^2 26H(\ln T) e^{-0.2k\varepsilon} \\
 &\leq \frac{26H}{\ln T} \sum_{k=0}^{+\infty} (k+1)^2 e^{-0.2k\varepsilon} \\
 &= \frac{26H}{\ln T} \frac{1 + e^{-0.2\varepsilon}}{(1 - e^{-0.2\varepsilon})^3} \\
 &< 52(5.5\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Поскольку $T - 2(\nu+1)H \asymp T$, то для суммы по γ из промежутка $T - 2(\nu+1)H \leq \gamma < T - 2\nu H$ будет справедлива та же оценка. Поэтому верхняя граница для $U^{(1)}$ имеет следующий вид:

$$U^{(1)} < 104(5.5\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1} \sum_{\nu=0}^{+\infty} e^{-\nu^2} < 144.2(5.5\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1}.$$

Сумму $U^{(2)}$ оценим грубо, пользуясь формулой Римана–Мангольдта:

$$\begin{aligned}
 U^{(2)} &\leq \sum_{\nu > TH^{-1}/3} \exp(-\nu^2) \sum_{2\nu H < |\gamma - T| \leq 2(\nu+1)H} 1 \\
 &< \sum_{\nu > TH^{-1}/3} \exp(-\nu^2) \sum_{|\gamma| \leq T+2(\nu+1)H} 1 \\
 &\ll \sum_{\nu > TH^{-1}/3} \exp(-\nu^2) \nu H \ln(\nu H) < 0.8.
 \end{aligned}$$

Полученные выше неравенства приводят нас к искомой оценке интеграла $j_1(T)$:

$$\begin{aligned}
 j_1(T) &< 30(144.2(5.5\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1} + 0.8) \\
 &< 4350(5.5\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1} < (90\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1}.
 \end{aligned}$$

Лемма 11 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть $\varkappa_1 > 0$, и пусть $E_1 = E_1(\varkappa_1; T)$ – множество тех t , $T \leq t \leq T + H$, для которых $U(t) > \varkappa_1$. Тогда для меры множества E_1 справедлива оценка:

$$\text{mes}(E_1) < \varkappa_1^{-1} (90\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение следует из цепочки неравенств:

$$\varkappa_1 \text{mes}(E_1) \leq \int_{E_1} U(t) dt \leq \int_T^{T+H} U(t) dt \leq (90\varepsilon^{-1})^3 H(\ln T)^{-1}.$$

ЛЕММА 12. Пусть $t > t_0 > 1$, $1 < a < 5$, $A = a \ln \ln \ln t$. Тогда $V(t) < 72(\ln \ln t)^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь оценкой $|S(t)| < 8.9 \ln |t|$, которая справедлива при $|t| > t_0 > 1$ (см. [1]), получаем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} V(t) &= 4a^{-1} \int_A^{+\infty} K\left(\frac{u}{a}\right) (|S(t+u)| + |S(t-u)|) du \\ &< 71.2a^{-1} \int_A^{+\infty} \exp(-e^{u/a}) \ln(t+u) du \\ &< 71.2a^{-1} \ln(2t) \int_A^t \exp(-e^{u/a}) \ln(t+u) du \\ &\quad + 71.2a^{-1} \int_t^{+\infty} \exp(-e^{u/a}) \ln(2u) du. \end{aligned}$$

Положив $x = e^{u/a}$ в двух последних интегралах и заменив предварительно в первом $\ln(t+u)$ величиной $\ln(2t)$, получим:

$$V(t) < 71.2 \ln(2t) \int_{\exp(A/a)}^{+\infty} e^{-x} \frac{dx}{x} + 71.2 \int_{\exp(t/a)}^{+\infty} e^{-x} \ln(2a \ln x) \frac{dx}{x}.$$

Возьмем первый интеграл по частям, а во втором подынтегральную функцию оценим сверху; находим:

$$\begin{aligned} V(t) &< 71.2 \ln(2t) \left(\frac{\exp(-e^{A/a})}{e^{A/a}} - \int_{\exp(A/a)}^{+\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^2} \right) + 71.2 \int_{\exp(t/a)}^{+\infty} e^{-x} dx \\ &< 71.2 \ln(2t) \frac{\exp(-e^{A/a})}{e^{A/a}} + 71.2 \exp(-e^{t/a}) \\ &= 71.2 \ln(2t) \frac{\exp(-\ln \ln t)}{\ln \ln t} + 71.2 \exp(-e^{t/a}) < 72(\ln \ln t)^{-1}, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

ЛЕММА 13. Пусть ε – сколь угодно малое фиксированное число, $0 < \varepsilon < 0.001$, $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$, $1 < a < 5$, $A = a \ln \ln \ln T$, и пусть

$$j_2(T) = \int_T^{T+H} V(t) dt.$$

Тогда справедливо неравенство $j_2(T) < H(\ln \ln T)^{-0.5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, пользуясь определением функции $V(t)$, преобразуем интеграл j_2 :

$$j_2(T) = 4a^{-1} \int_A^{+\infty} K\left(\frac{u}{a}\right) \left(\int_{T+u}^{T+u+H} |S(t)| dt + \int_{T-u}^{T-u+H} |S(t)| dt \right) du.$$

Бесконечный промежуток интегрирования разобьем на два: $A \leq u \leq 0.5T$, $0.5T < u < +\infty$. Если u меняется в первом промежутке, то величины $T \pm u$ заключены между $0.5T$ и $1.5T$. Согласно формуле теоремы 3, сумма двух интегралов по t в $j_2(T)$ равна

$$\frac{2H}{\pi\sqrt{\pi}} (\ln \ln T)^{0.5} (1 + O((\ln \ln \ln T)^{-0.5}))$$

и при больших T не превосходит $0.4H(\ln \ln T)^{0.5}$. В случае, когда u велико ($u > 0.5T$), указанная сумма оценивается сверху удвоенной длиной промежутка интегрирования, умноженной на максимум подынтегральной функции $|S(t)|$ на отрезке $T - u \leq t \leq T + u + H$, равный $O(\ln(T + u))$ (см. [1]). Таким образом, приходим к цепочке неравенств

$$\begin{aligned}
 j_2(T) &< 4 \cdot 0.4H(\ln \ln T)^{0.5} \int_A^{+\infty} a^{-1} K(u/a) du \\
 &\quad + O\left(H \int_{0.5T}^{+\infty} a^{-1} K(u/a) H \ln(T + u) du\right) \\
 &< 1.6H(\ln \ln T)^{0.5} \int_A^{+\infty} a^{-1} \exp(-e^{u/a}) du \\
 &\quad + O\left(H \int_{0.5T}^{+\infty} a^{-1} \exp(-e^{u/a}) \ln u du\right) \\
 &< 1.6H(\ln \ln T)^{0.5} \exp(-e^{A/a}) e^{-A/a} + O(H(\ln T) e^{-T/2a}) \\
 &= 1.6H(\ln \ln T)^{0.5} \exp(-\ln \ln \ln T - \ln \ln \ln \ln T) + O(H(\ln T) e^{-T/2a}) \\
 &< H(\ln \ln T)^{-0.5}.
 \end{aligned}$$

Лемма 13 доказана.

СЛЕДСТВИЕ. Пусть T , H , a и A – те же, что и в условии леммы 13, $\varkappa_2 > 0$, и пусть $E_2 = E_2(\varkappa_2; T)$ – множество тех t , $T \leq t \leq T + H$, для которых $V(t) > \varkappa_2$. Тогда $\text{mes}(E_2) < \varkappa_2^{-1} H(\ln \ln T)^{-0.5}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 4. Согласно леммам 10 и 12, для $k = 0, 1$ имеют место равенства

$$\int_{-A}^A \psi_k(u) S(T + u) du = (-1)^{k+1} c + \theta_k(V + W + 0.8a^{-1} e^{-(0.5T/a)^2}),$$

в которых $c = 0.02563512796 \dots$, $|\theta_k| \leq 1$,

$$0 \leq V(T; A) \leq 72(\ln \ln T)^{-0.5},$$

$$W(a, b) = (2\pi)^{-1} \varkappa(b) ((\zeta(ab + 0.5) - 1)(2^{0.5ab} + 2^{-0.5ab})^2 - 1/\sqrt{2}),$$

$$\varkappa(b) = 2 \int_0^{+\infty} \exp(-(e^u + e^{-u}) \cos b) du,$$

причем $1 < a < 5$, $0 < b < \pi/2$, $2ab > 1$ и $A = a \ln \ln \ln T$.

Положим теперь $a = 4.39$, $b = 1.1$ и выберем T настолько большим, чтобы каждая из величин

$$72(\ln \ln T)^{-0.5} \quad \text{и} \quad 0.8a^{-1} e^{-(0.5T/a)^2}$$

не превосходила 10^{-5} . При таком выборе a и b справедливо неравенство $W(a, b) < 0.02557048$, так что

$$\int_{-A}^A \psi_0(u) S(T + u) du < -c + 0.02557048 + 2 \cdot 10^{-5} < -4 \cdot 10^{-5} < 0,$$

$$\int_{-A}^A \psi_1(u) S(T + u) du > c - 0.02557048 - 2 \cdot 10^{-5} > 4 \cdot 10^{-5} > 0.$$

Поскольку функции $\psi_0(u)$ и $\psi_1(u)$ неотрицательны, то из полученных соотношений следует, что на промежутке $-A < u < A$ функция $S(T+u)$ меняет знак. Теорема 4 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 5. Положим в лемме 10 $a = 4.39$, $b = 1.1$ и возьмем T настолько большим, чтобы выполнялось неравенство

$$0.8a^{-1}e^{-(0.5T/a)^2} < 10^{-5}.$$

Получим ($c = 0.02563512796 \dots$):

$$\int_{-A}^A \psi_k(u)S(T+u) du = (-1)^{k+1}c + \theta_k(U+V+0.02557048+10^{-5}).$$

Пользуясь следствиями лемм 11 и 13, построим множества E_1 и E_2 , содержащиеся в промежутке $T \leq t \leq T+H$ и такие, что $U(t) > 10^{-5}$ при $t \in E_1$ и $V(t) > 10^{-5}$ при $t \in E_2$. Тогда

$$\text{mes}(E_1) = O(H(\ln T)^{-1}), \quad \text{mes}(E_2) = O(H(\ln \ln T)^{-0.5}).$$

Положим $E = E_1 + E_2$. Исключая из рассмотрения множество E , для оставшихся значений t будем иметь: $U(t) \leq 10^{-5}$, $V(t) \leq 10^{-5}$ и

$$\begin{aligned} \int_{-A}^A \psi_0(u)S(T+u) du &< -c + 0.02557048 + 3 \cdot 10^{-5} < -3 \cdot 10^{-5} < 0, \\ \int_{-A}^A \psi_1(u)S(T+u) du &> c - 0.02557048 - 3 \cdot 10^{-5} > 3 \cdot 10^{-5} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, промежуток $(-A, A)$ содержит точку перемены знака функции $S(t+u)$. Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\text{mes}(E) = O(H(\ln \ln T)^{-0.5}).$$

Теорема 5 доказана.

§ 6. Распределение значений функций $|S(t)|$ и $|S_1(t+h) - S_1(t)|$

Асимптотическая формула

$$\int_T^{T+H} |S(t)| dt \sim \frac{H}{\pi\sqrt{\pi}} \sqrt{\ln \ln T}$$

позволяет предположить, что для “большинства” значений t порядок величины $S(t)$ близок к $\sqrt{\ln \ln t}$. Теорема 6, доказательство которой приводится ниже, более точно характеризует множества тех $t \in (T, T+H]$, при которых функции $|S(t)|$ и $|S_1(t+h) - S_1(t)|$ принимают значения из заданного промежутка значений.

Пусть h – произвольное число, удовлетворяющее неравенствам

$$\begin{aligned} 3(\ln \ln T)(\ln x)^{-1} < h < (\ln T)^{-0.5}, \\ F_1(t) = \frac{2\pi S(t)}{\sqrt{\ln \ln T}}, \quad F_2(t) = \frac{2\pi(S_1(t+h) - S_1(t))}{h\sqrt{\ln(1/h)}}. \end{aligned}$$

Символом $E_j(\alpha)$, $j = 1, 2$, при $\alpha \geq 0$ обозначим множества тех $t \in (T, T + H]$, для которых $|F_j(t)| \leq \alpha$.

ТЕОРЕМА 6. *Справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$\text{mes}(E_j(\alpha)) = H(P(\alpha) + O((\ln \ln \ln \ln T)^{-0.5})), \quad j = 1, 2,$$

где

$$P(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\alpha e^{-u^2/4} du.$$

СЛЕДСТВИЕ 1. *Формулы теоремы 6 справедливы при любом $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$ с $H = T^{27/82+\varepsilon}$.*

СЛЕДСТВИЕ 2. *Формулы теоремы 6 с $H = T^\varepsilon$ справедливы для всех $T \in (X, 2X)$, $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$, за исключением значений, образующих множество E с мерой $\text{mes}(E) < X^{1-0.04\varepsilon}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 6. Для доказательства теоремы потребуется следующая лемма (неравенство Берри–Эссена). Пусть $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ – две функции распределения, причем $\Psi(x)$ дифференцируема и $|\Psi'(x)| \leq B$ для любого вещественного x . Пусть также $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ – характеристические функции, отвечающие $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$, и при некоторых положительных δ и λ

$$\int_{-\lambda}^\lambda \frac{|\varphi(\xi) - \psi(\xi)|}{|\xi|} d\xi < \delta.$$

Тогда для любого вещественного x

$$|\Phi(x) - \Psi(x)| \leq c(\delta + B\lambda^{-1}),$$

где c – положительная абсолютная постоянная.

Пусть F обозначает любую из функций F_1 и F_2 , а $E(\alpha)$ – соответствующее множество $E_j(\alpha)$. Обозначим $\varphi(\xi)$ характеристическую функцию величины $|F(t)|$. Тогда

$$\varphi(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{i\xi x} d\Phi(x) = H^{-1} \int_T^{T+H} e^{i\xi |F(t)|} dt,$$

где $\Phi(x) = H^{-1} \text{mes}(E(x))$ – функция распределения $|F(t)|$.

Основная идея доказательства заключается в том, чтобы приблизить $\varphi(\xi)$ некоторой функцией $\psi(\xi)$, которая является характеристической для легко вычисляемой функции распределения $\Psi(x)$. Зная точность такого приближения, с помощью неравенства Берри–Эссена можно сделать вывод о “близости” $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$. Проведем необходимые вычисления. Положим

$$\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\ln \ln \ln \ln T}, \quad N = [4e\lambda^2] + 1, \quad \delta = (\ln \ln \ln \ln T)^{-0.5}.$$

Из теоремы 2 следует, что для всех ν , $\nu \leq N + 1$, имеют место соотношения:

$$j(\nu) = H^{-1} \int_T^{T+H} |F(t)|^\nu dt = \varkappa(\nu)(1 + 2^{13}\theta(A(\ln \ln \ln T)^{-1})^\gamma) < 2\varkappa(\nu),$$

$$\gamma = 0.5 + \{0.5\nu - 0.5\}.$$

Приблизим мнимую экспоненту в выражении для $\varphi(\xi)$ отрезком ряда Тейлора длины N . Тогда $\varphi(\xi)$ представится суммой $\varphi_1(\xi) + r_1(\xi)$, где

$$\varphi_1(\xi) = 1 + \sum_{\nu=1}^N \frac{(i\xi)^\nu}{\nu!} j(\nu),$$

а

$$|r_1(\xi)| \leq \frac{|\xi|^{N+1}}{(N+1)!} j(N+1) < \frac{2|\xi|^{N+1}}{(N+1)!} \varkappa(N+1).$$

Так как

$$\varkappa(N+1) = \frac{2^{N+1}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right) < 2.5\sqrt{N} \left(\frac{2N}{e}\right)^{N/2},$$

то

$$\begin{aligned} |r_1(\xi)| &< \frac{2|\xi|^{N+1}}{N \cdot N!} 2.5\sqrt{N} \left(\frac{2N}{e}\right)^{N/2} \\ &< \frac{5}{\sqrt{2\pi}} \frac{|\xi|}{N} \left(\frac{e^2 \xi^2}{N^2} \frac{2N}{e}\right)^{N/2} < \frac{2|\xi|}{N} \left(\frac{2e\xi^2}{N}\right)^{N/2}. \end{aligned}$$

Подставим теперь явные выражения для $j(\nu)$ и $\varkappa(\nu)$. Тогда $\varphi_1(\xi)$ запишется в виде $\varphi_2(\xi) + r_2(\xi)$, где

$$\begin{aligned} \varphi_2(\xi) &= 1 + \sum_{\nu=1}^N \frac{(i\xi)^\nu}{\nu!} \varkappa(\nu) = \sum_{\nu=0}^N \frac{(i\xi)^\nu}{\nu!} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} (2v)^\nu e^{-v^2} dv \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-v^2} \left(\sum_{\nu=0}^N \frac{(2vi\xi)^\nu}{\nu!} \right) dv, \\ |r_2(\xi)| &< R|\xi| \sum_{\nu=1}^N \frac{|\xi|^{\nu-1}}{\nu!} \varkappa(\nu), \quad R = 2^{13} \sqrt{A} (\ln \ln \ln T)^{-0.5}. \end{aligned}$$

Заменяя в формуле для $\varphi_2(\xi)$ сумму под знаком интеграла на величину $e^{2iv\xi}$, находим: $\varphi_2(\xi) = \psi(\xi) + r_3(\xi)$, где

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= \int_0^{+\infty} e^{-v^2+2iv\xi} dv = \int_0^{+\infty} e^{i\xi w} d\Psi(w), \quad \Psi(w) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^w e^{-u^2/4} du, \\ |r_3(\xi)| &\leq \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{(2|\xi|v)^{N+1}}{(N+1)!} e^{-v^2} dv = \frac{|\xi|^{N+1}}{(N+1)!} \Gamma\left(\frac{N}{2} + 1\right) < \frac{|\xi|}{N} \left(\frac{2e\xi^2}{N}\right)^{N/2}. \end{aligned}$$

Рассмотрим интеграл I_λ ,

$$I_\lambda = \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{|\varphi(\xi) - \psi(\xi)|}{|\xi|} d\xi.$$

Из полученных оценок следуют неравенства:

$$I_\lambda \leq \int_{-\lambda}^{\lambda} \frac{1}{|\xi|} \sum_{j=1}^3 |r_j(\xi)| d\xi < \int_{-\lambda}^{\lambda} \left(\frac{3}{N} \left(\frac{2e\xi^2}{N}\right)^{N/2} + R \sum_{\nu=1}^N \frac{|\xi|^{\nu-1}}{\nu!} \varkappa(\nu) \right) d\xi.$$

Первое слагаемое в последнем выражении не превосходит величины

$$\frac{4\lambda}{N} \left(\frac{2e\lambda^2}{N} \right)^{N/2} \ll (e\lambda)^{-1} 2^{-N/2} < 0.5\delta,$$

а второе – величины

$$2R \sum_{\nu=1}^N \int_0^{+\infty} \frac{(2v\lambda)^\nu}{\nu!} e^{-v^2} dv < \frac{4R}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-v^2+2v\lambda} dv < 4Re^{\lambda^2} < 0.5\delta.$$

Таким образом, $I_\lambda < \delta$. С помощью леммы заключаем, что при любом $x \geq 0$

$$|\Phi(x) - \Psi(x)| \ll \lambda^{-1} + \delta \ll \delta.$$

Следовательно,

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/4} du + O(\delta) \quad \text{и} \quad \text{mes}(E(x)) = H \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2/4} du + O(\delta) \right).$$

Теорема 6 доказана.

§ 7. Верхняя оценка количества нулей $\zeta(s)$ с заданной кратностью

Известно, что при переходе через точку разрыва функция $S(t)$ совершает скачок, равный суммарной кратности нулей $\zeta(s)$, имеющих γ своей ординатой. Следовательно, если $\varrho = \beta + i\gamma$ – нуль дзета-функции и кратность его равна m , $m \geq m_0 > 0$, то при достаточно малом h и $t < \gamma < t + h$ значение разности $S(t + h) - S(t)$ будет мало отличаться от величины $m = S(\gamma + 0) - S(\gamma - 0)$. Иными словами, вблизи нулей с высокой кратностью функция $S(t + h) - S(t)$ принимает большие положительные значения.

С другой стороны, “среднее” значение этой разности не превосходит постоянной величины. Отсюда можно заключить, что мера множества точек данного промежутка, в которых функция $S(t + h) - S(t)$ велика, является малой по сравнению с длиной всего промежутка, а доля кратных нулей $\zeta(s)$ в общем числе нулей быстро убывает с ростом кратности.

Введем определение, необходимое для дальнейшего.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Для целого числа j символом $N_j(T)$ будем обозначать количество нулей $\zeta(s)$ кратности j , которые лежат в прямоугольнике $0 \leq \text{Re } s \leq 1$, $0 < \text{Im } s \leq T$.

В 1975 г. А. Фуджи [22] доказал одно предельное соотношение, следствием которого стала оценка $N_j(T) \leq N(T) \exp(-c\sqrt{j})$, справедливая для всех целых чисел j , начиная с некоторого номера $j_0 > 0$, и для всех $T \geq T_0(j) > 0$.

Настоящий параграф посвящен доказательству утверждения, уточняющего оценку А. Фуджи.

ТЕОРЕМА 7 (М. А. Королёв). Для любого целого числа $j \geq 1$ имеет место оценка

$$N_j(T + H) - N_j(T) \leq e^{7.2} (N(T + H) - N(T)) \exp(-\varkappa j),$$

где $\varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e\sqrt{10B}}$, $B = e^{37}\pi^{-2}$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любых $T \geq T_0(\varepsilon) > 0$, $H = T^{27/82+\varepsilon}$ и $j \geq 1$ справедливо неравенство:

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq e^{7.2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\kappa j).$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть $X \geq X_0(\varepsilon) > 0$. Тогда на промежутке $(X, 2X)$ существует множество E , мера которого не превосходит $X^{1-0.04\varepsilon}$ и на дополнении к которому до полного промежутка $X < T < 2X$ справедлива оценка

$$N_j(T+H) - N_j(T) \leq e^{7.2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\kappa j),$$

где $H = T^\varepsilon$, а $j \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 3. Для любых $T \geq T_0 > 0$ и $j \geq 1$ имеет место неравенство

$$N_j(T) \ll N(T) \exp(-\kappa_1 j),$$

в котором κ_1 – положительная абсолютная постоянная.

При формулировке и доказательстве утверждений этого параграфа наряду с введенными ранее будем пользоваться следующим обозначением:

$$h = \frac{\pi}{3} \left(\ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-1}.$$

ЛЕММА 14. Пусть k – целое число, $1 \leq k < (\ln x)/192$. Тогда интеграл I_k ,

$$I_k = \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2k} dt,$$

не превосходит величины $(10B\varepsilon^{-3}k^2)^k H$, $B = e^{37}\pi^{-2}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим $y = x^{1/k}$ и обозначим символом $U(t)$ следующий тригонометрический полином:

$$\sum_{p < y} a(p) p^{-0.5+it}, \quad a(p) = p^{ih} \sin(h \ln p).$$

Тогда разность $S(t+2h) - S(t)$ запишется в виде

$$\left(S(t+2h) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin((t+2h) \ln p)}{\sqrt{p}} \right) - \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right) - \frac{1}{\pi} (U(t) + \overline{U}(t)).$$

Возводя это выражение в степень $2k$ и применяя к нему неравенство Гёльдера, приходим к соотношению $I_k < 3^{2k-1} (2I^{(1)} + I^{(2)})$, в котором

$$I^{(1)} = \int_T^{T+H+2h} \left(S(t) + \frac{1}{\pi} \sum_{p < y} \frac{\sin(t \ln p)}{\sqrt{p}} \right)^{2k} dt,$$

$$I^{(2)} = \pi^{-2k} \int_T^{T+H} (U(t) + \overline{U}(t))^{2k} dt.$$

Согласно лемме 7, верхней границей $I^{(1)}$ служит величина $(B\varepsilon^{-3}k^2)^k(H + 2h)$, где $B = e^{37}\pi^{-2}$. Асимптотическая формула для второго интеграла получена при доказательстве теоремы 1 настоящей главы и имеет вид:

$$I^{(2)} = \pi^{-2k} \left(\binom{2k}{k} H S_k + \theta \sum_{\nu=0}^{2k} \binom{2k}{\nu} y^{3k} \right), \quad S_k = \sum_{\substack{p_1, \dots, q_k < y \\ p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_k}} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_k)|^2}{p_1 \cdots p_k}.$$

Поскольку число решений уравнения $p_1 \cdots p_k = q_1 \cdots q_k$ в простых числах $q_1, \dots, q_k$ при фиксированной левой части не превосходит $k!$, то сумма S_k удовлетворяет следующей цепочке неравенств:

$$\begin{aligned} S_k &\leq k! \sum_{p_1, \dots, q_k < y} \frac{|a(p_1)|^2 \cdots |a(p_k)|^2}{p_1 \cdots p_k} \\ &\leq k! \left(\sum_{p < y} \frac{|a(p)|^2}{p} \right)^k = k! \left(\sum_{p < y} \frac{\sin^2(h \ln p)}{p} \right)^k \\ &\leq k! \left(h^2 \ln y \sum_{p < y} \frac{\ln p}{p} \right)^k < k! (2h \ln y)^{2k} < k! \left(\frac{2\pi}{3} \left(\ln \frac{T}{2\pi} \right)^{-1} \frac{\varepsilon \ln T}{10k} \right)^{2k} < 1. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} I^{(2)} &< \pi^{-2k} \left(\binom{2k}{k} H + 2^{2k} x^3 \right) < \left(\frac{2}{\pi} \right)^{2k} (H + H^{0.15}) < H, \\ I_k &< 3^{2k-1} (2(B\varepsilon^{-3}k^2)^k (H + 2h) + H) < (10B\varepsilon^{-3}k^2)^k H. \end{aligned}$$

Лемма 14 доказана.

ЛЕММА 15. Пусть $D(\lambda)$ – множество тех значений t из промежутка $T \leq t \leq T + H$, для которых выполняется неравенство $|S(t + 2h) - S(t)| \geq \lambda$. Тогда при любом λ для меры такого множества справедлива следующая оценка:

$$\text{mes } D(\lambda) \leq e^4 H \exp(-\varkappa \lambda),$$

$$\text{где } \varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e\sqrt{10B}}, \quad B = e^{37}\pi^{-2}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $0 \leq \lambda \leq 4\varkappa^{-1}$, то меру $D(\lambda)$ достаточно оценить тривиально длиной промежутка:

$$\text{mes } D(\lambda) \leq H \leq e^4 H \exp(-\varkappa \lambda).$$

Если же $\lambda \geq 18 \ln T$, то множество $D(\lambda)$ оказывается пустым. Это следует из оценки $|S(t)| < 8.9 \ln t$ (см. [1]), которая справедлива при всех достаточно больших t :

$$|S(t + 2h) - S(t)| < 17.8 \ln(t + 2h) < 18 \ln T.$$

Пусть, наконец, $4\varkappa^{-1} < \lambda < 18 \ln T$. В этом случае возведем обе части неравенства

$$\lambda^{-1} |S(t + 2h) - S(t)| \geq 1$$

в степень $2k = 2[0.5\kappa\lambda]$ и проинтегрируем по множеству $D(\lambda)$; получим:

$$\text{mes } D(\lambda) \leq \lambda^{-2k} \int_{D(\lambda)} (S(t+2h) - S(t))^{2k} dt \leq \lambda^{-2k} \int_T^{T+H} (S(t+2h) - S(t))^{2k} dt.$$

Поскольку целое число $k = [0.5\kappa\lambda]$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} k &\geq 0.5\kappa\lambda - 1 \geq 0.5\kappa \cdot 4\kappa^{-1} - 1 = 1, \\ k &\leq 0.5\kappa(18 \ln T + 1) < 10\kappa \ln T < \frac{0.01\varepsilon}{192} \ln T \leq \frac{1}{192} \ln x, \end{aligned}$$

то к последнему интегралу можно применить лемму 14:

$$\begin{aligned} \text{mes } D(\lambda) &\leq \lambda^{-2k} (10B\varepsilon^{-3}k^2)^k H = \left(\frac{2k}{e\kappa\lambda} \right)^{2k} H \\ &\leq \left(\frac{2}{e\kappa\lambda} \frac{\kappa\lambda}{2} \right)^{2k} H = e^{-2k} H \leq e^2 H \exp(-\kappa\lambda). \end{aligned}$$

Лемма 15 доказана.

ЛЕММА 16. Пусть γ – ордината нуля $\zeta(s)$, $T \leq \gamma - h < \gamma \leq T + H$, и пусть промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ содержит ровно ν ординат нулей, кратность каждого из которых равна j , $j \geq 1$. Тогда для любого t из промежутка $(\gamma - 2h, \gamma - h]$ справедливо неравенство

$$S(t+2h) - S(t) \geq \nu j - 0.5.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем произвольное число t , $\gamma - 2h < t < \gamma - h$. Пусть $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_k$ – все различные ординаты нулей $\zeta(s)$, попавшие на промежуток $(t, t+2h]$ и занумерованные в порядке возрастания. Для каждой величины γ_r символом n_r обозначим сумму кратностей нулей, имеющих γ_r своей ординатой. Поскольку $\gamma - h \geq t$ и $\gamma \leq t+2h$, то промежуток $(\gamma - h, \gamma]$ целиком содержится в промежутке $(t, t+2h]$. Но тогда из условия леммы следует, что в ряде $n_1, n_2, \dots, n_k$ найдется не менее ν чисел, больших или равных j .

Пусть (a, b) – промежуток, целиком лежащий в $(t, t+2h]$ и не содержащий точек разрыва $S(t)$. Запишем разность значений $S(t)$ на концах этого промежутка с помощью формулы конечных приращений Лагранжа; получим:

$$S(b) - S(a) = (b - a)S'(\xi) = -(b - a) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{\xi}{2\pi} + O(\xi^{-2}) \right),$$

где ξ – некоторое число, лежащее между a и b . Так как величины $\ln \xi$ и $\ln T$ равны с точностью до слагаемого порядка $HT^{-1} \ll T^{-0.5}$, то:

$$S(b) - S(a) = -(b - a) \left(\frac{1}{2\pi} \ln \frac{T}{2\pi} + O(T^{-0.5}) \right) = -(b - a) ((6h)^{-1} + O(T^{-0.5})).$$

Пользуясь этим соотношением, преобразуем следующее тождество:

$$\begin{aligned} S(t+2h) - S(t) &= (S(\gamma_1 - 0) - S(t)) \\ &\quad + (S(\gamma_1 + 0) - S(\gamma_1 - 0)) + (S(\gamma_2 - 0) - S(\gamma_1 + 0)) \\ &\quad + (S(\gamma_2 + 0) - S(\gamma_2 - 0)) + (S(\gamma_3 - 0) - S(\gamma_2 + 0)) \\ &\quad + \dots + (S(\gamma_k + 0) - S(\gamma_k - 0)) + (S(t+2h) - S(\gamma_k + 0)). \end{aligned}$$

Поскольку при переходе через точку $t = \gamma_r$ функция $S(t)$ имеет скачок, равный n_r , то $S(\gamma_r + 0) - S(\gamma_r - 0) = n_r$. Таким образом, разность $S(t + 2h) - S(t)$ равна

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + \dots + n_r - ((6h)^{-1} + O(T^{-0.5})) \\ \times ((\gamma_1 - t) + (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2) + \dots + (t + 2h - \gamma_k)) \\ = n_1 + n_2 + \dots + n_r - 2h \cdot (6h)^{-1} + O(hT^{-0.5}) \\ \geq \nu j - 1/3 + O(hT^{-0.5}) \geq \nu j - 0.5. \end{aligned}$$

Лемма 16 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7. Заметим, что нам достаточно рассмотреть лишь случай, когда $j < 18 \ln(T + H)$, так как для $j \geq 18 \ln(T + H)$ величины $N_j(T)$ и $N_j(T + H)$ тождественно равны нулю. Это следует из формулы Римана–Мангольдта для $N(t)$: если $\varrho = \beta + i\gamma$ — нуль кратности j , то

$$j \leq N(\gamma + 0) - N(\gamma - 0) = S(\gamma + 0) - S(\gamma - 0) \leq 8.9 \ln \gamma + 8.9 \ln \gamma < 18 \ln(T + H).$$

Если j не превосходит $\varkappa^{-1} \ln 2$, то искомая разность оценивается тривиально:

$$N_j(T + H) - N_j(T) \leq N(T + H) - N(T) \leq 2(N(T + H) - N(T)) \exp(-\varkappa j).$$

Пусть, наконец, $\varkappa^{-1} \ln 2 < j < 18 \ln T$, $N_j(T + H) - N_j(T) > 0$, и пусть γ_1 — наибольшая из ординат нулей $\zeta(s)$ с кратностью, большей или равной j , лежащая на промежутке между T и $T + H$. Положим $e_1 = (\gamma_1 - h, \gamma_1]$ и обозначим γ_2 наибольшую из таких ординат, не попавших в e_1 , $\gamma_2 \leq \gamma_1 - h$. Положим $e_2 = (\gamma_2 - h, \gamma_2]$ и определим тем же способом величины $\gamma_3, \gamma_4, \dots$ и промежутки $e_3, e_4, \dots$. Это построение мы продолжим до тех пор, пока на промежутке $(T, \gamma_k - h]$ не останется ординат нулей с указанным свойством, или же пока мы не получим ординату γ_k с условием $\gamma_k - h < T \leq \gamma_k$.

Промежутки $e_1, e_2, \dots, e_k$ попарно не пересекаются и имеют одинаковую длину h . Кроме того, в их объединении содержатся все ординаты нулей $\zeta(s)$, кратность которых больше или равна j . Построенные промежутки разобьем на классы $E_1, E_2, \dots$, относя к классу E_r те из них, которые содержат в точности r искомым ординат. Если k_r — число промежутков в классе с номером r , то справедливо следующее неравенство:

$$N_j(T + H) - N_j(T) \leq 1 \cdot k_1 + 2 \cdot k_2 + \dots + r \cdot k_r + \dots$$

Оценим каждую из величин k_r сверху. Пусть промежуток $e = (\gamma - h, \gamma]$ принадлежит E_r . Положим тогда $e' = e - h = (\gamma - 2h, \gamma - h]$. Согласно предыдущей лемме, для любого t из e' справедливо неравенство: $S(t + 2h) - S(t) \geq rj - 0.5$. Таким образом, e' целиком содержится во множестве $D(rj - 0.5)$. Проведя такое построение для каждого элемента e из E_r , убеждаемся, что все k_r промежутков e' попарно не пересекаются, имеют одинаковую длину h и содержатся в $D(rj - 0.5)$. Следовательно, их общая длина не превосходит меры $D(rj - 0.5)$:

$$k_r \cdot h \leq \text{mes } D(rj - 0.5).$$

Для оценки величины $\text{mes } D(rj - 0.5)$ воспользуемся леммой 15:

$$\text{mes } D(rj - 0.5) \leq e^4 H \exp(-\varkappa(rj - 0.5)), \quad \varkappa = \frac{2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}}{e\sqrt{10B}}, \quad B = e^{37}\pi^{-2}.$$

Следовательно, k_r не превосходит величины $Hh^{-1}e^{4+0.5\kappa} \exp(-\kappa rj)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} N_j(T+H) - N_j(T) &\leq Hh^{-1}e^{4+0.5\kappa} \sum_{r=1}^{+\infty} r \exp(-\kappa rj) = Hh^{-1}e^{4+0.5\kappa} \frac{e^{-\kappa j}}{(1 - e^{-\kappa j})^2} \\ &\leq e^{7.2} (N(T+H) - N(T)) \exp(-\kappa j). \end{aligned}$$

Теорема 7 доказана.

Замечания к главе II

Идея сведения вычисления дробных моментов $S(t)$ к вычислению первых четных моментов была реализована А. Гошем в [19]. Эта идея также используется при решении некоторых теоретико-вероятностных задач (см., например, [23; с. 27, задача 5], [24]).

По поводу условных результатов и гипотез, касающихся поведения функции $M(T)$, см. [20], [21].

Леммы 1 и 3 (в несколько иной формулировке) принадлежат А. Гошу [19]. Леммы 6 и 7 доказаны в [2].

Первый и второй моменты $S(t)$ изучались Дж. Литтлвудом [25], [26] и Э. Титчмаршем [27]. Асимптотические формулы для четных моментов впервые получены А. Сельбергом [2], [28], для дробных моментов – А. Гошем [19], для дробных моментов с $H = T^{27/82+\varepsilon}$ – А. А. Карацубой [13], [14], для дробных моментов с $H = T^\varepsilon$ для “почти всех” T – М. А. Королёвым [15], [16].

Пользуясь гипотезой Римана, асимптотическую формулу для второго момента $S(t)$ можно уточнить (см. [29]):

$$\int_0^T |S(t)|^2 dt = \frac{T}{2\pi^2} \ln \ln T + \frac{a}{2\pi^2} T + o(T),$$

где

$$a = \int_1^{+\infty} \frac{F(\alpha, T)}{\alpha^2} d\alpha + \mathbf{E} + \sum_{m=2}^{+\infty} \sum_p \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} \right) \frac{1}{p^m},$$

$\mathbf{E}$ – постоянная Эйлера,

$$F(\alpha, T) = \left(\frac{T}{2\pi} \ln T \right)^{-1} \sum_{0 < \gamma, \gamma' \leq T} \frac{4}{4 + (\gamma - \gamma')^2} T^{i\alpha(\gamma - \gamma')},$$

причем

$$\frac{2}{3} - o(1) < \int_1^{+\infty} \frac{F(\alpha, T)}{\alpha^2} d\alpha < 2.$$

Метод подсчета количества точек перемен знака вещественной функции, используемый при доказательстве теоремы 3, восходит к Э. Ландау [30; с. 78–85]. К рассматриваемой задаче этот метод был впервые применен А. Сельбергом [2].

Нижние оценки разности $M(T+H) - M(T)$ с $H = T^{27/82+\varepsilon}$ получены в [13], [14], [31], [32], с $H = T^\varepsilon$ для “почти всех” T – в [15], [16]. Теорема 5 доказана М. А. Королёвым [33].

Задача о распределении значений $|S(t)|$ впервые рассмотрена А. Гошем [34]. Результаты 7 принадлежат М. А. Королёву.

Список литературы

- [1] А. А. Карацуба, М. А. Королёв, “Аргумент дзета-функции Римана”, *УМН*, **60**:3 (2005), 41–96.
- [2] A. Selberg, “Contributions to the theory of the Riemann zeta-function”, *Arch. Math. Naturvid.*, **48**:5 (1946), 89–155.
- [3] Е. К. Титчмарш, *Теория дзета-функции Римана*, ИЛ, М., 1953.
- [4] С. М. Воронин, А. А. Карацуба, *Дзета-функция Римана*, Физматлит, М., 1994.
- [5] A. A. Karatsuba, “Approximation of exponential sums by shorter ones”, *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, **97**:1–3 (1987), 167–178.
- [6] А. А. Карацуба, “Дзета-функция Римана и ее нули”, *УМН*, **40**:5 (1985), 19–70.
- [7] А. А. Карацуба, “О нулях функции $\zeta(s)$ на коротких промежутках критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:3 (1984), 569–584.
- [8] А. А. Карацуба, “О нулях функции $\zeta(s)$ в окрестности критической прямой”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **49**:2 (1985), 326–333.
- [9] А. А. Карацуба, “Распределение простых чисел”, *УМН*, **45**:5 (1990), 81–140.
- [10] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “The zeros of Riemann’s zeta-function on the critical line”, *Math. Z.*, **10** (1921), 283–317.
- [11] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, “The approximate functional equation in the theory of the zeta-function, with applications to the divisor-problems of Dirichlet and Piltz”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **21** (1922), 39–74.
- [12] А. А. Карацуба, “Распределение нулей функции $\zeta(1/2 + it)$ ”, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, **48**:6 (1984), 1214–1224.
- [13] А. А. Карацуба, “Плотностная теорема и поведение аргумента дзета-функции Римана”, *Матем. заметки*, **60**:3 (1996), 448–449.
- [14] А. А. Карацуба, “О функции $S(t)$ ”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **60**:5 (1996), 27–56.
- [15] М. А. Королёв, “Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:2 (2003), 21–60.
- [16] М. А. Королёв, “О поведении функции $S(t)$ на коротких промежутках”, *Докл. РАН*, **390**:5 (2003), 588–589.
- [17] H. Bohr, E. Landau, “Beiträge zur Theorie der Riemannschen Zetafunktion”, *Math. Ann.*, **74**:1 (1913), 3–30.
- [18] E. C. Titchmarsh, “The zeros of the Riemann zeta-function”, *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A*, **151** (1935), 234–255.
- [19] A. Ghosh, “On Riemann’s zeta-function—sign changes of $S(T)$ ”, *Recent progress in analytic number theory* (Durham, 1979), **1**, Academic Press, London, New York, 1981, 25–46.
- [20] J. Mueller, “On the Riemann zeta-function $\zeta(s)$ —gaps between sign changes of $S(t)$ ”, *Mathematika*, **29**:2 (1982), 264–269.
- [21] A. Selberg, “Old and new conjectures and results about a class of Dirichlet series”, *Proceedings of the Amalfi Conference on Analytic Number Theory* (Maiori, 1989), Univ. di Salerno, Salerno, 1992, 367–385.
- [22] A. Fujii, “On the distribution of the zeros of the Riemann zeta function in short intervals”, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **81**:1 (1975), 139–142.
- [23] М. Кац, *Статистическая независимость в теории вероятностей, анализе и теории чисел*, ИЛ, М., 1963.
- [24] А. Г. Постников, *Эргодические вопросы теории сравнений и теории диофантовых приближений*, Труды МИАН, **82**, Наука, М., 1966.

- [25] J. E. Littlewood, “On the zeros of the Riemann Zeta-function”, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **22** (1924), 295–318.
- [26] J. E. Littlewood, “On the Riemann zeta-function”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **24** (1925), 175–201.
- [27] E. C. Titchmarsh, “On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$ ”, *Proc. London Math. Soc.* (2), **27**:6 (1928), 449–458.
- [28] A. Selberg, “On the remainder in the formula for $N(T)$, the number of zeros of $\zeta(s)$ in the strip $0 < t < T$ ”, *Avh. Norske Vid. Akad. Oslo I*, 1944, № 1.
- [29] D. A. Goldston, “On the function $S(T)$ in the theory of the Riemann zeta-function”, *J. Number Theory*, **27**:2 (1987), 149–177.
- [30] E. Landau, *Vorlesungen über Zahlentheorie*, S. Hirzel, Leipzig, 1927.
- [31] М. А. Королёв, “О числе перемен знака функции $S(t)$ на коротком промежутке”, *Докл. РАН*, **382**:4 (2002), 446–447.
- [32] М. А. Королёв, “Об аргументе дзета-функции Римана на критической прямой”, *Дискретная геометрия и геометрия чисел. К 70-летию со дня рождения профессора Сергея Сергеевича Рышкова*, Труды МИАН, **239**, Наука – МАИК Наука/Интерпериодика, М., 2002, 215–238.
- [33] М. А. Королёв, “Изменение знака функции $S(t)$ на коротких промежутках”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:4 (2005), 75–88.
- [34] A. Ghosh, “On the Riemann zeta-function—mean value theorems and the distribution of $|S(T)|$ ”, *J. Number Theory*, **17**:1 (1983), 93–102.

А. А. Карацуба (A. A. Karatsuba)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: karatsuba@mi.ras.ru

Поступила в редакцию

15.01.2006

М. А. Королёв (M. A. Korolev)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова

E-mail: hardy_ramanujan@mail.ru