Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. Б. Мельников, Экстремальные свойства особенностей
распределения Гурса, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 191–
192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1742>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.80.181.102

26 апреля 2023 г., 16:24:09

Экстремальные свойства особенностей распределения Гурса

Н. Б. Мельников

Распределение D коранга $d \geq 2$ на многообразии M размерности $m \geq 4$ называется распределением Гурса, если $D^{i+1} = D^i + [D^i, D^i]$, $D^1 = D$, является распределением при каждом $i = 1, \dots, d$ и выполнено условие $\dim D^{i+1} = \dim D^i + 1$. Через $[X, Y]$, $X, Y \in D$, обозначаем коммутатор векторных полей из D . Набор $(\dim D^1(q), \dim D^2(q), \dots)$ называется большим вектором роста распределения D (не обязательно Гурса) в точке $q \in M$. Малым вектором роста распределения D в точке $q \in M$ называется набор $(\dim D_1(q), \dim D_2(q), \dots)$, где $D_{i+1} = D_i + [D, D_i]$ ($D_1 = D$). В точке общего положения распределения Гурса большой и малый векторы роста совпадают и равны $(r, r+1, r+2, \dots, m)$, $r = m - d$. Точки, в которых это условие не выполнено, называются особыми.

Распределение $\text{Span}(f_0, f_1)$, порожденное парой векторных полей

$$f_0(q) = (v_0 \cos \theta_0, v_0 \sin \theta_0, v_1 \sin(\theta_1 - \theta_0), \dots, v_i \sin(\theta_i - \theta_{i-1}), \dots, v_n \sin(\theta_n - \theta_{n-1}), 0), \quad (1)$$

$$v_i = \prod_{j=i+1}^n \cos(\theta_j - \theta_{j-1}), \quad i = 0, 1, \dots, (n-1), \quad v_n = 1, \quad f_1(q) = (0, \dots, 0, 1), \quad (2)$$

является распределением Гурса на $\mathbb{R}^2 \times (S^1)^{n+1}$ с координатами $q = (x, y, \theta_0, \dots, \theta_n)$ (см. [1]) и моделирует все возможные особенности произвольного распределения Гурса коранга $n+1$ [2].

Особенности распределения $\text{Span}(f_0, f_1)$ задаются одним из соотношений: $\cos(\theta_k - \theta_{k-1}) = 0$, $k = 2, \dots, n$ (см. [1]). М.И. Зеликиным (частное сообщение, 2001) была высказана гипотеза о том, что такие кривые могут быть описаны как особые оптимальные траектории задачи $T \rightarrow \min$, $\dot{q} = f_0(q) + u f_1(q)$, $q(0) = a$, $q(T) = b$, $|u| \leq \omega$. В работе [3] была доказана оптимальность (сильный минимум) малых участков одной из $n-1$ таких особенностей. В настоящей работе доказано, что достаточно малый участок *любой* особой траектории первого порядка соответствующей задачи доставляет слабый минимум (теорема 1). Более того, *произвольная* особенность указанного 2-распределения Гурса является особой траекторией, и любой ее участок – не обязательно малый – доставляет слабый минимум (теорема 2).

Исходную задачу быстродействия преобразуем к задаче на фиксированном отрезке введением дополнительной переменной:

$$\mathcal{J} = z(0) \rightarrow \min, \quad \dot{z} = 0, \quad \dot{q} = z(f_0(q) + u f_1(q)), \quad t \in [0, t_1]. \quad (3)$$

Исследуем получившуюся задачу на минимум среди всех абсолютно непрерывных вектор-функций $q(t)$ и измеримых скалярных функций $u(t)$. Слабый минимум в задаче (3) задается нормой $|z| + \|x\|_C + \|u\|_\infty$; сильный минимум задается полунормой $|z| + \|x\|_C$.

Обозначим траекторию задачи (3) через $\hat{w}(t) = (\hat{z}(t), \hat{q}(t), \hat{u}(t))$, $t \in [0, t_1]$ (не ограничивая общности, считаем $\hat{z} = 1$, $t_1 = \hat{T}$). Набором множителей Лагранжа назовем пару $\lambda = (\psi, \alpha_0)$, где липшицева функция $\psi(t)$ – решение сопряженной системы $\dot{\psi} = -\psi \hat{f}'_0$ и число $\alpha_0 \geq 0$ ($\|\psi\|_C + \alpha_0 \neq 0$) таковы, что выполняется условие максимума: $\max_{|u| \leq \omega} H[\lambda](\hat{z}, \hat{q}, u) = H[\lambda](\hat{z}, \hat{q}, \hat{u}) = \psi(f_0(\hat{q}) + \hat{u} f_1(\hat{q})) = \alpha_0 / \hat{T} \geq 0$.

Траектория $\hat{w}$ задачи (3) называется особой, если управление не входит в условие максимума: $\psi \hat{f}_1 = 0$. Порядок особой траектории $\hat{w}$ равен единице, если $\psi[f_0, f_1] = 0$ и $\psi[f_1, [f_0, f_1]] \neq 0$.

Траектория называется регулярной (нормальной), если существует такой набор множителей Лагранжа $\lambda = (\psi, \alpha_0)$, что $\alpha_0 \neq 0$. Преобразование Гоха (см. [4]) на

регулярной особой траектории задачи (1)–(3) может быть записано в виде $(\bar{q}, \bar{u}) \mapsto (\bar{\xi}, \bar{v})$, где $\bar{\xi} = \bar{q} - \bar{v}\hat{f}_1$, $\dot{\bar{v}} = \bar{u}$, $\bar{v}(0) = 0$.

ЛЕММА 1. Пусть $\hat{w}$ – регулярная особая траектория. Тогда в переменных Гоха критические вариации задаются системой $\dot{\bar{\xi}} = \widehat{f'_0 \bar{\xi} - \bar{v}[f_0, f_1]}$, $\bar{\xi}(0) = 0$, и вторая вариация имеет вид

$$\Omega(\bar{w}) = \int_0^{\hat{T}} (-\psi(\widehat{f''_0 \bar{\xi}}, \bar{\xi}) + 2\bar{v}\psi[\widehat{f_0, f_1}]'\bar{\xi} + \bar{v}^2\psi[\widehat{f_1, [f_0, f_1]}]) dt. \quad (4)$$

ЛЕММА 2. Пусть f_0, f_1 заданы формулами (1), (2). Тогда $[f_1, [f_0, f_1]] = f_0$.

ТЕОРЕМА 1. Малые участки любой особой траектории первого порядка доставляют слабый минимум в задаче (1)–(3).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Из леммы 2 и условия максимума следует, что на особой траектории первого порядка выполняется строгое условие Келли: $\psi[f_1, [f_0, f_1]] > 0$. Это условие обеспечивает положительную определенность квадратичной формы (4) на малых отрезках времени (см. [4]).

ТЕОРЕМА 2. Пусть γ – допустимая траектория задачи (1)–(3), принадлежащая поверхности $\Gamma_k = \{\cos(\theta_k - \theta_{k-1}) = 0\}$, $k = 1, \dots, n$, и $\omega > 1$. Тогда γ является особой траекторией первого порядка и доставляет слабый минимум в задаче (1)–(3).

СХЕМА ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Непосредственно проверяется, что на кривой $\gamma \subset \Gamma_k$ управление $\hat{u} = \pm(n - k + 1)^{-1/2}$ внутреннее: $|\hat{u}| < \omega$, следовательно, $\gamma \subset \Gamma_k$ – особая траектория. Кроме того, $\psi(t) = (0, \dots, 0, 1, \dots, 1, 0)$, где единицы начинаются с $(k + 2)$ -й координаты, – решение сопряженной системы. Тогда вторая вариация имеет вид

$$\Omega(\bar{w}) = (n - k + 1)^{-1/2} \int_0^{\hat{T}} \sum_{j=k+3}^{n+3} (j - k - 2)(\bar{q}_j - \bar{q}_{j-1})^2 dt$$

и является положительно определенной квадратичной формой при любом $\hat{T}$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В случае $\omega = 1$ кривая $\gamma \subset \Gamma_n$ доставляет сильный минимум.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке. Автор благодарен М. И. Зеликину и А. В. Дмитруку за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] F. Jean, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **1** (1996), 241–266. [2] R. Montgomery, M. Zhitomirskii, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **18**:4 (2001), 459–493. [3] О. Е. Долгалева, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех.*, 2005, № 5, 34–39. [4] A. V. Dmitruk, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **64** (1999), 163–198.

Н. Б. Мельников (N. B. Melnikov)

Центральный экономико-математический институт РАН;
Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: melnikov@cs.msu.ru

Представлено М. И. Зеликиным

Принято редколлегией
21.03.2006