Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Топологии и двойственность κ -нормированных векторных пространств, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1743>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.5.30

26 апреля 2023 г., 12:37:56

Топологии и двойственность κ -нормированных векторных пространств

С. В. Лютковский

κ -метризуемые топологические пространства были введены и исследованы в [1], [2], но без линейной структуры [3]. Топологические векторные пространства с κ -нормой, т.е. неотрицательной функцией ρ на $X \times S_X$, удовлетворяющей определенным условиям, где $S_X = 2_o^X$ или $S_X = 2_\delta^X$ – семейство канонических замкнутых или G_δ -подмножеств соответственно в X , были определены и исследованы в работе [4]. В данной работе исследована двойственность κ -нормированных пространств $X \times S_X$.

Замечания и определения. Пусть X и Y – два локально выпуклых пространства (ЛВП) над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$ или неархимедовым сферически полным полем $\mathbb{K}$ с нетривиальным нормированием, образующих двойственную пару (X, Y) , т.е. задан билинейный функционал $\langle x, y \rangle$ такой, что X разделяет точки в Y (из $\langle x, y \rangle = 0$ для всех $y \in Y$ следует $x = 0$), а Y разделяет точки в X , где $x \in X, y \in Y$. Предположим, что хаусдорфова топология T на X является топологией двойственной пары, т.е. Y является непрерывным двойственным пространством для (X, T) .

Тогда формой κ -двойственности назовем отображение $\langle (x, A)|(y, B) \rangle$ из $(X, S_X) \times (Y, S_Y)$ в $[0, \infty)$, определяемое следующими условиями (D1)–(D8):

(D1)(a) ограничение $\langle *|* \rangle$ на $(X \times \{M\}) \times (Y \times \{M^\perp\})$ таково, что $\langle (x, M)|(y, N) \rangle = |\langle x + M, y + N \rangle|$, где $M \in S_X$ и $N \in S_Y$ – это $\mathbb{K}$ -линейные подпространства, $M^\perp := \{z \in Y : z(M) = \{0\}\}$, $\langle x + M, y + M^\perp \rangle$ – это билинейный функционал на $(X/M) \times (Y/M^\perp)$;

(D1)(b) для любого $b \in Y/N$ (или $a \in X/M$), если $\langle a, b \rangle = 0$ для всех $a \in X/M$ (или $b \in Y/N$), то $b = 0$ (или $a = 0$ соответственно);

(D1)(c) для любых $x \notin A, A \in S_X$ (или $y \notin B, B \in S_Y$) существуют $y \in Y$ и $B \in S_Y$ (или $x \in X$ и $A \in S_X$ соответственно) такие, что $\langle (x, A)|(y, B) \rangle > 0$;

(D2) $\langle (x, A_1)|(y, B_1) \rangle \leq \langle (x, A_2)|(y, B_2) \rangle$ для любых $A_2 \subset A_1$ и $B_2 \subset B_1$;

(D3) $\langle (x, A)|(y, B) \rangle$ – равномерно непрерывная функция по $x \in X$ (или $y \in Y$) при фиксированных $A \in S_X, y \in Y$ и $B \in S_Y$ (или $x \in X, A \in S_X$ и $B \in S_Y$ соответственно);

(D4) $\inf_\alpha \langle (x, A_\alpha)|(y, B) \rangle = \langle (x, A)|(y, B) \rangle = \inf_\beta \langle (x, A)|(y, B_\beta) \rangle$ для любых $x \in X, y \in Y$ и возрастающих трансфинитных последовательностей $\{A_\alpha\} \subset S_X$ и $\{B_\beta\} \subset S_Y$ с $A = \text{cl}(\bigcup_\alpha A_\alpha), B = \text{cl}(\bigcup_\beta B_\beta), A \in S_X, B \in S_Y$;

(D5)(a) $\langle (x_1 + x_2, \text{cl}(A_1 + A_2))|(y, B) \rangle \leq \langle (x_1, A_1)|(y, B) \rangle + \langle (x_2, A_2)|(y, B) \rangle$ и $\langle (x, A)|(y_1 + y_2, \text{cl}(B_1 + B_2)) \rangle \leq \langle (x, A)|(y_1, B_1) \rangle + \langle (x, A)|(y_2, B_2) \rangle$;

(D5)(b) $\langle (x, A)|(y, B) \rangle \leq \langle (x, C)|(y, B) \rangle + \sup_{z \in E} \langle (z, A)|(y, B) \rangle$ и $\langle (x, A)|(y, B) \rangle \leq \langle (x, A)|(y, E) \rangle + \sup_{z \in E} \langle (x, A)|(z, B) \rangle$ для любых $x, x_1, x_2 \in X, y, y_1, y_2 \in Y, A, A_1, A_2, C \in S_X, B, B_1, B_2, E \in S_Y$ или с тах вместо $+$ в правых частях неравенств в неархимедовом случае;

(D6) $\langle (\lambda x, \lambda A)|(y, B) \rangle = |\lambda| \langle (x, A)|(y, B) \rangle = \langle (x, A)|(\lambda y, \lambda B) \rangle$ для любых $x \in X, A \in S_X, y \in Y, B \in S_Y, 0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$;

(D7) $\langle (x, A)|(y, B) \rangle = \langle (x + a, A + a)|(y + b, B + b) \rangle$ для любых a и $x \in X, b$ и $y \in Y, A \in S_X, B \in S_Y$;

(D8) $\langle (x, A)|(y, \emptyset) \rangle = \infty$ и $\langle (x, \emptyset)|(y, B) \rangle = \infty$ для любых $x \in X \setminus A, A \in S_X, y \in Y \setminus B, B \in S_Y$, причем $\langle (x, A)|(y, B) \rangle < \infty$, если $A \neq \emptyset$ и $B \neq \emptyset$.

Если на $X \times S_X \times Y \times S_Y$ задана форма κ -двойственности, то $((X, S_X), (Y, S_Y), \langle (*, *)|(*, *) \rangle)$ называется системой κ -двойственности или κ -двойственностью.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X и Y – двойственная пара ЛВП, а $(X, 2_\delta^X)$ κ -нормируемо, тогда $(Y, 2_\delta^Y)$ тоже κ -нормируемо.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X является ЛВП и $(X, 2_o^X, \rho)$ – это κ -нормированное пространство. Предположим, что топология пространства X определяется семейством преднорм $\{p_\alpha : \alpha \in \Omega\}$ таким, что

(А) $q_\Lambda(x) < \infty$ для любых $x \in X$ и $q_\Lambda(x)$ непрерывно по $x \in X$ для любого счетного подмножества $\Lambda \subset \Omega$, где $q_\Lambda(x) := \sup_{\alpha \in \Lambda} p_\alpha(x)$. Тогда κ -норма ρ имеет продолжение на $X \times 2_\delta^X$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X является полным ЛВП, удовлетворяющим условию (А) из теоремы 2 с κ -нормой ρ на $(X, 2_o^X)$, которая индуцирует метрику D на 2_o^X согласно определению 7 в [4]. Тогда пополнение 2_o^X равно 2_δ^X .

ТЕОРЕМА 4. Пусть $(X, 2_\delta^X, \rho)$ является κ -нормированным пространством. Тогда X есть ЛВП.

ТЕОРЕМА 5. Пусть X является полным κ -нормируемым ЛВП над полем $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ и задано непрерывное отображение $f: \mathbb{R} \times (2_\delta^X \cup X) \rightarrow 2_\delta^X \cup X$ такое, что $f(t, 2_\delta^X) \subset 2_\delta^X$, $f(t, X) \subset X$ и $\rho_X(f(t, x), f(t, A)) \leq C_A \rho_X(x, A)$ для любых $A \in 2_\delta^X$ и $x \in X$ (где постоянная $C_A > 0$ может зависеть от A), $f(t, M) = M$ для любых $t \in \mathbb{R}$ и $\mathbb{K}$ -линейного подпространства M из семейства F такого, что $F \subset 2_\delta^X$, $M_1 \cap M_2 \in F$ для любых M_1 и $M_2 \in F$, $\bigcap_{M \in F} M = \{0\}$. Тогда дифференциальное уравнение $dx(t)/dt = f(t, x(t))$ (или $dA(t)/dt = f(t, A(t))$) с начальным условием $x(0) = x_0 \in X$ (или $A(0) = A_0 \in 2_\delta^X$ для выпуклого уравновешенного $A_0 - x_0$ при некотором $x_0 \in X$) имеет единственное решение $x: \mathbb{R} \rightarrow X$ (или $A: \mathbb{R} \rightarrow 2_\delta^X$ при $F = 2_\delta^X$ соответственно).

Доказательства этих теорем даны в [5].

Список литературы

- [1] Е. В. Щепин, УМН, **31**:5 (1976), 191–226. [2] Е. В. Щепин, Изв. АН СССР. Сер. матем., **43**:2 (1979), 442–478. [3] Х. Шефер, Топологические векторные пространства, Мир, М., 1971. [4] С. В. Людковский, Сиб. матем. журн., **41**:1 (2000), 167–184. [5] S. V. Ludkovsky, “Duality of κ -normed topological vector spaces and their applications”, [arXiv: math.GN/0101088](https://arxiv.org/abs/math.GN/0101088).

С. В. Людковский (S. V. Lyudkovskii)
Институт общей физики им. А. М. Прохорова РАН
E-mail: ludkovsky@ran.gpi.ru

Представлено В. М. Тихомировым
Принято редколлегией
23.03.2006