Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Благовещенская, Теоремы реализации и классификации для одного класса колец без кручения конечного ранга, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 4, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1744>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 11:47:03

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Теоремы реализации и классификации для одного
класса колец без кручения конечного ранга

Е. А. Благовещенская

Рассматривается класс $\mathcal{K}$ коммутативных колец с единицей таких, что для любого $K \in \mathcal{K}$ аддитивная группа K^+ кольца K является группой без кручения конечного ранга специального вида, а именно блочно-жесткой почти вполне разложимой группой с циклическим регуляторным фактором. Это означает, что группа K^+ содержит вполне разложимую вполне характеристическую подгруппу – ее регулятор $R = R(K^+)$, определенную единственным образом, такую, что K/R является конечной циклической группой, при этом множество $T = T_{\text{cr}}(R) = T_{\text{cr}}(K)$, определенное каноническим разложением $R = \bigoplus_{\tau \in T_{\text{cr}}(R)} R_{\tau}$ на однородные компоненты, состоит из попарно несравнимых типов, см. [1; гл. 13]. Тогда для блочно-жесткой группы K^+ каноническое разложение ее регулятора определяется однозначно.

Для структуры, порожденной некоторым множеством элементов, мы используем обозначение $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Как обычно, $V \subset X$ означает, что V – подгруппа X , а $V_*^X = \{g \in X : \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\}$ обозначает чистую оболочку группы V в X . Рассматриваются кольца эндоморфизмов $\text{End}(R^+)$ и $\text{End}(K^+)$ соответствующих групп. Групповые характеристики, примененные к кольцу, относятся к его аддитивной группе. Нам понадобится обозначение $\prod_{i \in \mathcal{J}} C_i$ для прямого произведения колец.

Хорошо известно, что кольцо $\text{End}(K^+)$ содержит подкольцо, изоморфное K , которое состоит из эндоморфизмов группы K^+ , отождествляемых с умножениями слева на элементы из K . Вложение $K \subset \text{End}(K^+)$ называется *регулярным представлением* кольца K . Из общей теории почти вполне разложимых групп следует, что $T_{\text{cr}}(R)$ состоит только из идемпотентных типов τ (представляемых характеристиками, в которых присутствуют только символы “0” и “ ∞ ”, см. [2; гл. XIII]), а также существует цепь колец

$$R \subset K \subset \text{End}(K^+) \subset \text{End}(R^+),$$

на основе которой доказывается следующая теорема.

ТЕОРЕМА РЕАЛИЗАЦИИ. Пусть $K \in \mathcal{K}$ и R – регулятор K . Существует и единственно разложение регулятора $R = \bigoplus_{i \in \mathcal{J}} R_i$ в прямую сумму идеалов ранга 1 такое, что $K = \text{End}(K^+) \cap \prod_{i \in \mathcal{J}} \text{End}(R_i^+)$.

Доказательство основывается на единственности разложения вполне разложимого коммутативного кольца $R' = R_*^{\text{End}(R^+)}$ с единицей в прямую сумму неразложимых идеалов [3; гл. 4, теорема 11] и на связанном с ним известном разложении Пирса кольца $\text{End}(R^+)$, см. [2; гл. XV].

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого кольца $K \in \mathcal{K}$ с регулятором $R = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} R_i$ существуют и однозначно определены положительные целые числа $m_i = m_i(K)$, $i \in \mathcal{I}$, такие, что $K \cong \langle \prod_{i \in \mathcal{I}} m_i \operatorname{End}(R_i^+), I \rangle$, где $R_i \cong m_i \operatorname{End}(R_i^+)$ и I – тождественный автоморфизм группы R^+ (имеются в виду изоморфизмы колец, а не только их аддитивных групп).

СЛЕДСТВИЕ 2. Кольцо $K \in \mathcal{K}$ разложимо в прямую сумму идеалов, $K = K_1 \oplus K_2$, тогда и только тогда, когда существует разбиение $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_2$, для которого числа $\operatorname{lcm}(m_i : i \in \mathcal{I}_1)$, $\operatorname{lcm}(m_i : i \in \mathcal{I}_2)$ являются взаимно простыми.

Заметим, что кольцо $K \in \mathcal{K}$ однозначно разложимо в прямую сумму неразложимых идеалов, которые сами являются кольцами, принадлежащими классу $\mathcal{K}$, при этом неразложимость кольца не обеспечивается неразложимость его аддитивной группы. Показано, что множество $R \subset K$ является подкольцом в K , которое мы естественно называем регулятором кольца K (а не только регулятором группы K^+). Его кольцевая структура полностью определяет строение кольца K , что утверждает

ТЕОРЕМА ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ 1. Кольца $K, K' \in \mathcal{K}$ изоморфны, если и только если их регуляторы $R(K)$ и $R(K')$ изоморфны.

Из теоремы реализации, а также классификации рассматриваемых почти вполне разложимых групп, полученной в [4], заключаем, что из изоморфизма аддитивных групп K^+ и K'^+ в общем случае не следует изоморфизм самих колец K и K' . Проблема определения кольцевых структур данного вида на группах полностью решает

ТЕОРЕМА ОБ ИЗОМОРФИЗМЕ 2. Аддитивные группы колец $K, K' \in \mathcal{K}$ изоморфны тогда и только тогда, когда изоморфны их регуляторы $R = R(K) = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}} R_i$ и $R' = R(K') = \bigoplus_{i \in \mathcal{I}'} R'_i$, рассматриваемые как вполне разложимые группы (т.е. подходящая перенумерация их слагаемых ранга 1 приводит к изоморфизмам $R_i^+ \cong R'^+_{i'}$, $i \in \mathcal{I} = \mathcal{I}'$), и справедливы равенства $\operatorname{lcm}(m_i : R_i^+ \cong \tau) = \operatorname{lcm}(m'_{i'} : R'^+_{i'} \cong \tau)$ для всех $\tau \in T_{\text{cr}}(R) = T_{\text{cr}}(R')$, где $m_i = m_i(K)$ и $m'_{i'} = m_{i'}(K')$.

Список литературы

- [1] A. Mader, *Almost completely decomposable groups*, Algebra, Logic Appl., **13**, Gordon & Breach, Amsterdam, 2000. [2] Л. Фукс, *Бесконечные абелевы группы*, **1, 2**, Мир, М., 1974, 1977. [3] Н. Джекобсон, *Теория колец*, ИЛ, М., 1947. [4] E. Blagoveshchenskaya, *Rings, modules, algebras, and Abelian groups*, Proceedings of the algebra conference – Venezia 2002 (Venice, Italy, 2002), Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **236**, Marcel Dekker, New York, NY, 2004, 45–54.

Е. А. Благовещенская (Е. А. Blagoveshchenskaya)
Санкт-Петербургский государственный политехнический
университет
E-mail: kate@robotek.ru

Представлено А. В. Михалевым
Принято редколлегией
30.03.2006