Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. А. Бусарова, Робастное оценивание матрицы коэффициентов в многомерной линейной регрессионной модели, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1746>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 16:26:00

Робастное оценивание матрицы коэффициентов в многомерной линейной регрессионной модели

Д. А. Бусарова

Рассмотрим модель многомерной линейной регрессии:

$$Y_i = B_0^T X_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

где Y_i – наблюдаемый $(q \times 1)$ -вектор отклика, X_i – наблюдаемый $(p \times 1)$ -вектор фактора и ε_i – $(q \times 1)$ -вектор случайных ошибок, $\varepsilon_i \stackrel{d}{=} -\varepsilon_i$. Мы будем предполагать, что как фактор X_i , так и отклик Y_i являются случайными. Наша задача – по независимым наблюдениям (X_i, Y_i) , $i = 1, \dots, n$, оценить неизвестную $(p \times q)$ -матрицу коэффициентов B_0 .

Непараметрическая оценка, представленная в статье, робастна и аффинно-эквивариантна. Она базируется на понятиях элементарных множеств и элементарных регрессий. Каждое элементарное множество есть подмножество $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ размера p исходных наблюдений. Далее, пусть $Y(I)$ есть $(p \times q)$ -матрица $(Y_{i_1}, \dots, Y_{i_p})^T$ и $X(I)$ – $(p \times p)$ -матрица $(X_{i_1}, \dots, X_{i_p})^T$. Если $\text{rank}(X(I)) = p$, то элементарная регрессия определяется как $B(I) = X(I)^{-1}Y(I)$. Если же $\text{rank}(X(I)) < p$, то элементарная регрессия вырождена. Векторизуем каждую невырожденную элементарную регрессию с помощью операции вес: $b(I) = \text{vec}(B(I))$ (операция вес преобразует $(p \times q)$ -матрицу в pq -вектор, помещая последовательно столбцы матрицы друг под другом). Обозначим далее $\beta_0 = \text{vec}(B_0)$. Для аффинно-эквивариантного оценивания вектора β_0 (а значит, и матрицы B_0) будем рассматривать медиану Оя (см. [1]) совокупности векторизованных невырожденных элементарных регрессий $\{b(I)\}$.

Введем обозначения. Пусть $I, I_1, I_2, \dots$ обозначают подмножества размера p множества $1, \dots, n$. Обозначим $\mathcal{I} = \{I_1, \dots, I_{pq}\}$, и пусть

$$\mathcal{I}_p = \{I_1, \dots, I_{pq} \in \mathcal{I} : |I_1 \cup \dots \cup I_{pq}| = p^2 q\}.$$

Назовем элемент $\{I_1, \dots, I_{pq}\}$ вырожденным, если хотя бы одно из входящих в него элементарных подмножеств вырождено. Пусть функция $\tau(I_1, \dots, I_{pq})$ является индикатором этого; она равна 0, если элемент $\{I_1, \dots, I_{pq}\}$ вырожден, и 1 иначе. Причем в вырожденном случае для любой функции $f(I_1, \dots, I_{pq})$, принимающей значения из $\mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$, будем считать, что $f(I_1, \dots, I_{pq}) \cdot \tau(I_1, \dots, I_{pq}) = 0$.

Рассмотрим целевую функцию:

$$U_n(\beta) = \frac{1}{|\mathcal{I}_p|} \sum_{\mathcal{I}_p} V(\beta, b(I_1), \dots, b(I_{pq})) \tau(I_1, \dots, I_{pq}),$$

где $V(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1})$ обозначает объем k -мерного симплекса с вершинами $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{k+1} \in \mathbb{R}^k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Оценку $\hat{\beta}_n$ вектора коэффициентов β_0 определим следующей формулой:

$$\hat{\beta}_n = \arg \min_{\beta \in \mathbb{R}^{pq}} U_n(\beta).$$

Разложив определитель по первому столбцу, определим:

$$|d_0(I_1, \dots, I_{pq}) + d^T(I_1, \dots, I_{pq})\beta| = \frac{1}{(pq)!} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \beta & b(I_1) & \dots & b(I_{pq}) \end{pmatrix} \right| \tau(I_1, \dots, I_{pq}).$$

Пусть, далее, $Z_i = (X_i^T, Y_i^T)^T$ и $I_k = ((k-1)p+1, \dots, kp)$, $k = 1, \dots, pq$. Определим функцию

$$U(\beta) = \mathbb{E}|d_0(I_1, \dots, I_{pq}) + d^T(I_1, \dots, I_{pq})\beta|,$$

случайный вектор

$$\Lambda(Z_1) = E(\text{sign}(d_0(I_1, \dots, I_{pq}) + d^T(I_1, \dots, I_{pq})\beta_0)d(I_1, \dots, I_{pq}) \mid Z_1),$$

векторную функцию

$$A(T, Z) = E(\text{sign}(d_0(I_1, \dots, I_{pq}) + d^T(I_1, \dots, I_{pq})T)d(I_1, \dots, I_{pq}) \mid Z_1 = Z),$$

где $T \in \mathbb{R}^{pq}$ и $Z \in \mathbb{R}^{p+q}$, и матрицу $\Gamma = \text{cov}(\Lambda(Z_1), \Lambda(Z_1))$. Оценка $\text{vec}^{-1}(\hat{\beta}_n)$ аффинно-эквивариантна, а также обладает следующими свойствами:

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполнены следующие условия:

- (а) $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, $\varepsilon_1 \stackrel{d}{=} -\varepsilon_1$; $X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины; совокупности $\{X_i\}_{i=1}^n$ и $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^n$ независимы;
- (b) $E\|\varepsilon_1\|^2 < \infty$;
- (с) $E(\|X(I)^{-1}\|^2 I(\det X(I) \neq 0)) < \infty$;
- (d) функция $U(\beta)$ достигает минимум в единственной точке $\beta = \beta^*$;
- (е) $\nabla U(\beta)|_{\beta=\beta^*} = E(\nabla | d_0(I_1, \dots, I_{pq}) + d^T(I_1, \dots, I_{pq})\beta)|_{\beta=\beta^*})$;
- (f) в окрестности точки β^* верно следующее разложение:

$$U(\beta) = U(\beta^*) + \frac{1}{2}(\beta - \beta^*)^T W(\beta - \beta^*) + o(\|\beta - \beta^*\|^2),$$

где W – положительно определенная матрица;

- (g) при $\{I_1, \dots, I_{pq}\} \in T_{p,pq}(n)$

$$P\{\{\det(b(I_1) - \beta^*, \dots, b(I_{pq}) - \beta^*) = 0\} \cap \{\det X(I_1) \cdots \det X(I_{pq}) \neq 0\}\} = 0.$$

Тогда $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta_0) \xrightarrow{d} N_{pq}(0, p^4 q^2 W^{-1} \Gamma W^{-1})$ при $n \rightarrow \infty$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть выполнены условия (а), (b), (с), (d), (f) теоремы 1, а также (е') для всех β' из некоторой окрестности точки β^* выполнено

$$\nabla U(\beta)|_{\beta'} = E(\nabla | d_0(I_1, \dots, I_{pq}) + d^T(I_1, \dots, I_{pq})\beta)|_{\beta'});$$

- (h) функция $A(T, Z)$ непрерывна по T в окрестности точки $T = \beta^*$.

Тогда функция влияния оценки $\hat{\beta}_n$ вектора коэффициентов β_0 ограничена и равна

$$IF(Z, F_{\beta_0}, \hat{\beta}_n) = -p^2 q W^{-1} A(\beta_0, Z).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Условие (с) теорем сильно ограничивает множество удовлетворяющих ему законов распределения. Поэтому тестовую статистику ψ_n целесообразно применять для статистических выводов в условиях активного эксперимента (когда исследователь сам выбирает план эксперимента). Как известно из теории оптимального планирования (см. [2]), в условиях активного эксперимента оптимальными являются планы с конечным числом значений, а такие планы (т.е. распределения X_1) удовлетворяют условию (с).

Автор выражает глубокую благодарность Ю. Н. Тюрину, под руководством которого выполнена эта работа, а также М. В. Болдину и В. Н. Тутубалину за ценные замечания и советы.

Список литературы

[1] Н. Oja, *Statist. Probab. Lett.*, **1:6** (1983), 327–332. [2] С. М. Ермаков, А. А. Жиглявский, *Математическая теория оптимального эксперимента*, Наука, М., 1987.

Д. А. Бусарова (D. A. Busarova)

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

E-mail: alekseevad@mail.ru

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

04.04.2006