Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. А. Большакова, Непрimitive n -мерные параллелоэдры первого типа: комбинаторика и символы, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1748>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.64.247

26 апреля 2023 г., 16:19:00

Непримитивные n -мерные параллелеэдры первого типа: комбинаторика и символы

Е. А. Большакова

1. Задачей настоящего сообщения является описание одного метода кодировки комбинаторной структуры параллелеэдра первого типа (подробное изложение результатов предполагается опубликовать в Чебышёвском сборнике). С основными понятиями теории параллелеэдров можно познакомиться по статье [1], а далее – по цитированной в ней литературе. Понятия и факты теории графов, если они не определены в тексте, см. в [2]. Всю необходимую информацию о зоноэдрах можно найти, например, в [3].

В N -мерном ($N = \frac{n(n+1)}{2}$) евклидовом пространстве коэффициентов квадратичных форм от n переменных выделяется выпуклый замкнутый конус положительных $\mathbb{K}^N$. Внутренним точкам этого конуса отвечают положительно определенные квадратичные формы, а граничным – неотрицательно определенные квадратичные формы ранга меньшего, чем n . Конус $\mathbb{K}^N$ разбивается на области так называемых арифметических L -типов [4]. Эти области суть выпуклые конечногранные полиэдральные конусы, к каждому из которых естественно причислять и его границу, в том числе экстремальные лучи. Квадратичная форма, соответствующая произвольной фиксированной точке, лежащей на экстремальном луче, называется *реберной формой* соответствующей области типа. Из [1] следует, что *любой параллеледр есть взвешенная сумма Минковского параллелеэдров, соответствующих реберным формам той области типа, которой принадлежит соответствующая ему квадратичная форма.*

Среди всех областей L -типа наиболее простое описание имеет область *первого типа*, при любом n представляющая собой симплициальный конус. Ей принадлежат квадратичные формы, представимые следующей суммой:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{0 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} (x_i - x_j)^2, \quad \text{где } \lambda_{ij} \geq 0, \quad \sum \lambda_{ij}^2 > 0. \quad (*)$$

Здесь формально полагается $x_0 = 0$. Параллелеэдры, соответствующие квадратичным формам ранга 1 от n переменных суть отрезки. Таким образом, *все параллелеэдры первого типа суть суммы Минковского отрезков, т.е. зоноэдры.*

Поскольку параллелеэдры, соответствующие точкам одной и той же открытой грани области Δ_1 , отличаются друг от друга только метрическими характеристиками, достаточно описать структуру одного параллелеэдра из этого множества, отвечающего “эталонной” квадратичной форме, в разложении (*) которой каждый коэффициент λ_{ij} равен либо 0, либо 1.

Такие квадратичные формы описываются символом Рышкова: для квадратичной формы $f(x_1, \dots, x_n)$ это граф с вершинами $v_0, v_1, \dots, v_n$, и ребро (v_i, v_j) в нем есть тогда и только тогда, когда в разложении (*) формы f коэффициент λ_{ij} равен 1.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем k -вырезом ($0 \leq k \leq n$) в графе G всякое множество R^k ребер графа G такое, что его удаление из графа увеличивает количество компонент связности на k , а удаление всякого множества $R' \subset R^k$, $R' \neq R^k$ увеличивает количество компонент связности менее, чем на k .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Допустимой ориентацией k -выреза $R^k \subset E$ в графе $G = (V, E)$ будем называть всякое приращение ориентации всем ребрам $x \in R^k$, обладающее свойством: невозможно так ориентировать ребра $y \in E \setminus R^k$, чтобы в графе G образовался орицикл, имеющий хотя бы одно ребро $x_0 \in R^k$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем k -остатком графа $G = (V, E)$ граф $G_k = (V, E \setminus R^k)$, где R^k – некоторый k -вырез в графе G .

¹Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS, грант № 03-51-5070.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\mathcal{P}$ – параллелоэдр первого типа, соответствующий символу G , а F – его грань размерности $k \leq n$. Тогда грань F параллельно конгруэнтна параллелоэдру, отвечающему некоторому $(n - k)$ -остатку графа G . Обратно, если G_{n-k} – это $(n - k)$ -остаток ($1 \leq k \leq n$) символа G и $\mathcal{P}_*$ – соответствующий ему параллелоэдр, то в параллелоэдре $\mathcal{P}$ есть семейство k -мерных граней, параллельно конгруэнтных параллелоэдру $\mathcal{P}_*$.

Отклоняющим вектором грани $\mathcal{F}$ с центром симметрии O_F параллелоэдра $\mathcal{P}$ с центром симметрии O_P будем называть вектор $x = \overrightarrow{O_P O_F}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $\mathcal{P}$ – параллелоэдр первого типа, G – его символ, R^{n-k} – $(n - k)$ -вырез в графе G и G_{n-k} – соответствующий $(n - k)$ -остаток, $\mathcal{P}_*$ – параллелоэдр, отвечающий символу G_{n-k} . Среди k -мерных граней параллелоэдра $\mathcal{P}$, параллельно конгруэнтных параллелоэдру $\mathcal{P}_*$, тогда и только тогда есть грань с отклоняющим вектором x , когда существует такая допустимая ориентация $(n - k)$ -выреза R^{n-k} , что $x = \sum_{(v_i \rightarrow v_j) \in R^{n-k}} (e_j - e_i)$, где $(v_i \rightarrow v_j)$ – ребра ориентированного $(n - k)$ -выреза R^{n-k} , а $e_1, \dots, e_n$ – координатные векторы.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ – два графа. Отображение $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$ множества ребер первого графа в множество ребер второго графа сохраняет простой цикл C графа G_1 , состоящий из ребер $x_1, \dots, x_k$, если ребра $\varphi(x_1), \dots, \varphi(x_k)$ образуют, возможно в другом порядке, простой цикл в графе G_2 .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Назовем два графа $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ циклически неразличимыми, если между ребрами одного и другого графа установлено взаимно однозначное соответствие $\varphi: E_1 \rightarrow E_2$, которое сохраняет все простые циклы графа G_1 , и притом обратное отображение $\varphi^{-1}: E_2 \rightarrow E_1$ сохраняет все простые циклы графа G_2 . Пример неизоморфных циклически неразличимых графов см. в [2; рис. 13.3].

ТЕОРЕМА 3. Пусть G_1 и G_2 – два символа первого типа, f_1 и f_2 – соответствующие им квадратичные формы первого типа, а $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ – соответствующие параллелоэдры. Тогда следующие три утверждения эквивалентны.

1. Параллелоэдры $\mathcal{P}_1$ и $\mathcal{P}_2$ комбинаторно эквивалентны.
2. Символы G_1 и G_2 циклически неразличимы.
3. Формы f_1 и f_2 целочисленно унимодулярно эквивалентны.

Импликация $3 \Rightarrow 1$ практически очевидна, доказательство импликации $1 \Rightarrow 2$ несложно. Импликации $2 \Rightarrow 3$ автором дано два доказательства, опирающихся на теорему Уитни [5]. Первое из них проще, зато второе попутно положительно решает вопрос о возможности согласованной с отображением φ ориентации двух циклически неразличимых графов. Формулировку и нетривиальную историю доказательства теоремы Уитни также см. [6; с. 255–258].

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 также положительно решает вопрос об эквивалентности понятий комбинаторного типа и L -типа параллелоэдров в частном случае (непримитивных параллелоэдров первого типа).

Автор очень благодарен своему научному руководителю С. С. Рышкову.

Список литературы

- [1] С. С. Рышков, Е. А. Большакова, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **69**:6 (2005), 187–210.
 [2] Ф. Харари, *Теория графов*, Мир, М., 1973. [3] P. McMullen, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **159** (1971), 91–109. [4] С. С. Рышков, Е. П. Барановский, *УМН*, **34**:4 (1979), 3–63. [5] H. Whitney, *Amer. J. Math.*, **55**:2 (1933), 245–254. [6] А. А. Зыков, *Основы теории графов*, Вузовская книга, М., 2004.

Е. А. Большакова (Е. А. Bol'shakova)
 Московский государственный университет
 им. М. В. Ломоносова

Представлено В. М. Бухштабером
 Принято редколлегией
 19.04.2006