Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Зорич, В. М. Кесельман, Канонический вид изопериметрического неравенства на многообразиях конформно-гиперболического типа, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 3, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm175>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 18:16:58

КАНОНИЧЕСКИЙ ВИД ИЗОПЕРИМЕТРИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА НА МНОГООБРАЗИЯХ КОНФОРМНО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

В. А. Зорич, В. М. Кесельман

1. Введение. Как известно, изопериметрическое неравенство – это соотношение вида

$$P(V(D)) \leq S(\partial D)$$

между объемом $V(D)$ области D и площадью $S(\partial D)$ ее границы, где P – функция, называемая *изопериметрической функцией* пространства. Конечно, интерес представляет только нетривиальная, а чаще всего, даже максимальная изопериметрическая функция. Например, для евклидова n -мерного пространства R^n таковой, с точностью до множителя, является функция $P(x) = x^{(n-1)/n}$, а для пространства Лобачевского – линейная функция $P(x) = x$.

Подобно пространствам Евклида и Лобачевского, произвольные открытые римановы (и даже субримановы) многообразия можно конформно-инвариантно разделить на два класса в соответствии с тем, какова конформная емкость абсолюта (бесконечности) этого многообразия. Если эта емкость нулевая (как у пространства Евклида), многообразие относится к конформно-параболическому типу; если эта емкость положительна (как в случае пространства Лобачевского), то многообразие относится к конформно-гиперболическому типу.

Конформная замена метрики (что на физическом языке означает калибровочное преобразование, связанное с произволом в выборе местных масштабов) не меняет конформного типа многообразия, но меняет метрические соотношения на нем.

Нас интересует канонический вид изопериметрического соотношения в конформном классе метрики многообразия, точнее, вопрос о том, к какому каноническому виду приводится изопериметрическое неравенство конформными заменами метрики многообразия.

Результаты, полученные нами в [1], позволили высказать следующую рабочую гипотезу: на любом многообразии конформно-гиперболического типа максимальная изопериметрическая функция приводится к тому же линейному виду $P(x) = x$, что и в пространстве Лобачевского; а на любом многообразии конформно-параболического типа – к тому же виду $P(x) = x^{(n-1)/n}$, что и в пространстве Евклида.

Здесь мы рассмотрим первую часть этой гипотезы и дадим положительный ответ на вопрос, поставленный в работе [2].

2. Конформный тип многообразия. Пусть G – область на открытом римановом многообразии (M, g) , а C – отличный от точки континуум (связный компакт) в G . Пару (C, G) часто называют *конденсатором*, имея в виду, что $G \setminus C$ является полем конденсатора, а составляющие его границу $\partial(G \setminus C)$ множества ∂G и ∂C являются обкладками этого конденсатора.

Конформной емкостью конденсатора (C, G) называется величина

$$\text{cap}(C, G) = \inf \int_G |\nabla f|^n dv,$$

где нижняя грань берется по всем гладким финитным в G функциям f таким, что $f \equiv 1$ на C и $0 \leq f \leq 1$ в G .

Произвольную риманову метрику $\tilde{g}$ на M называют *конформно-эквивалентной* или *конформной* метрике g , если $\tilde{g} = \lambda^2 g$ на M , где λ – некоторая положительная регулярная функция на M . Легко видеть (и это хорошо известно), что величина $\text{cap}(C, G)$ инвариантна относительно конформных замен исходной метрики многообразия.

С помощью емкости можно конформно-инвариантно охарактеризовать массивность абсолюта – идеальной границы многообразия. С этой целью рассмотрим конденсаторы (C, G) , у которых внутренняя обкладка ∂C фиксирована, а внешняя обкладка ∂G уходит в “бесконечность”, т.е. область G расширяется до всего многообразия M . Предел емкостей таких конденсаторов совпадает со значением емкости $\text{cap}(C, M)$. При этом для данного многообразия M величина

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 99-01-01179).

$\text{cap}(C, M)$ либо положительна, либо равна нулю независимо от выбора неворожденного континуума C .

Таким образом, указанное свойство обращения или необращения в нуль емкости $\text{cap}(C, M)$ определяется только геометрией многообразия M на “бесконечности” и в этом смысле часто говорят о нулевой или положительной конформной емкости абсолюта многообразия. Например, для евклидова пространства $\text{cap}(C, R^n) = 0$, а для пространства Лобачевского $\text{cap}(C, H^n) > 0$.

Многообразие M будем называть многообразием *конформно-параболического типа*, если конформная емкость его абсолюта равна нулю, т.е. $\text{cap}(C, M) = 0$ для любого неворожденного континуума $C \subset M$; если же эта емкость положительна, то будем называть M многообразием *конформно-гиперболического типа*.

Такое разделение многообразий по указанным конформным типам, очевидно, инвариантно относительно конформных замен римановой метрики многообразия.

3. Формулировка основных результатов. Далее рассматривается произвольное n -мерное некомпактное и без края риманово многообразие M с некоторой исходной метрикой g . При переходе от метрики g к конформной ей метрике $\tilde{g}$ одноименные геометрические объекты будут наделаться тильдой.

ТЕОРЕМА. *Риманово многообразие (M, g) имеет конформно-гиперболический тип тогда и только тогда, когда существует конформно-эквивалентная метрике g риманова метрика $\tilde{g}$, в которой выполняется изопериметрическое неравенство:*

$$(*) \quad \tilde{V}(D) \leq \tilde{S}(\partial D)$$

для всех регулярных областей $D \subset M$, объем $\tilde{V}(D)$ которых больше фиксированного (произвольно малого) положительного числа.

Здесь под регулярной областью понимается область с кусочно-гладкой границей, имеющая конечный n -мерный объем $\tilde{V}(D)$ и конечную $(n-1)$ -меру Хаусдорфа $\tilde{S}(\partial D)$ границы области.

Таким образом, в конформном классе метрики риманова многообразия конформно-гиперболического типа изопериметрическая функция приводится к тому же линейному виду $P(x) = x$, что и в пространстве Лобачевского.

ДОПОЛНЕНИЕ 1. *Указанное в теореме неравенство $(*)$ является асимптотически точным в том смысле, что отношение величин $\tilde{V}(D)$ и $\tilde{S}(\partial D)$ может быть сколь угодно близким к единице для регулярных областей сколь угодно большого $\tilde{g}$ -объема.*

ДОПОЛНЕНИЕ 2. *Указанную в теореме метрику $\tilde{g}$ можно выбрать так, что объем геодезического шара радиуса r в этой метрике имеет порядок величины e^r при $r \rightarrow +\infty$.*

Напомним [3], что *изопериметрической размерностью* многообразия бесконечного объема называется точная верхняя грань всех чисел $m > 0$, для каждого из которых функция $P(x) = x^{(m-1)/m}$ (при всех $x > \varepsilon > 0$) является изопериметрической функцией многообразия. Точную верхнюю грань изопериметрических размерностей многообразия по всем метрикам, конформным исходной метрике многообразия, будем называть (см. [4]) *конформной изопериметрической размерностью* многообразия. Используя сформулированную выше теорему, можно получить

СЛЕДСТВИЕ. *Риманово многообразие M имеет конформно-гиперболический тип тогда и только тогда, когда его конформная изопериметрическая размерность равна $+\infty$.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Зорич В. А., Кесельман В. М. // Функци. анализ и его прил. 1996. V. 30. № 2. P. 40–55.
 [2] Grimaldi R., Pansu P. // J. Math. Pures Appl. 1992. V. 71. № 1. P. 1–19. [3] Gromov M. // Textes Mathematiques, 1. Paris: Cedic/Fernand Nathan, 1981. [4] Зорич В. А., Кесельман В. М. // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 3. С. 379–385.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
 Кемеровский государственный университет
E-mail: vzor@glasnet.ru, kvm@kvm.kemerovo.su

Принято редколлегией
 02.06.1999