Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, А. А. Гайфуллин, Представления m -значных групп на триангуляциях многообразий, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1751>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 15:15:36

Представления m -значных групп на триангуляциях многообразий

В. М. Бухштабер, А. А. Гайфуллин

Предлагается подход к характеристике триангуляций многообразий средствами теории m -значных групп.

Для произвольного множества X через $(X)^m$ мы обозначим его m -ю симметрическую степень. Говорят, что на множестве X задана структура m -значной группы, если заданы m -значная операция умножения $\mu: X \times X \rightarrow (X)^m$, $\mu(x, y) = x * y$, единица $e \in X$ и операция взятия обратного элемента $\text{inv}: X \rightarrow X$, удовлетворяющие естественным обобщениям аксиом ассоциативной группы (см. [1]). Для любых группы G и ее конечной подгруппы H из m элементов на множестве двойных смежных классов $H \backslash G / H$ существует структура бикосетной m -значной группы с умножением $(Hh_1H) * (Hh_2H) = [Hh_1hh_2H, h \in H]$.

Действием m -значной группы X на множестве S называется отображение $X \times S \rightarrow (S)^m$, $(x, s) \mapsto x \circ s$, такое, что для любых $x_1, x_2 \in X$, $s \in S$ наборы $(x_1 * x_2) \circ s$ и $x_1 \circ (x_2 \circ s)$ из m^2 элементов совпадают, $e \circ s = [s, \dots, s]$.

Отображение $T: S \rightarrow (S)^m$ называется m -значной динамикой на множестве S . Говорят, что m -значная динамика T интегрируема при помощи m -значной группы X с одной образующей a , если существует действие группы X на множестве S такое, что $Ts = a \circ s$ для любого $s \in S$.

Для любого k структура m -значной группы на множестве X определяет на X структуру km -значной группы kX , называемой диагональю исходной группы. Аналогично определяется диагональ m -значной динамики (детали см. в [1]).

Пусть K – симплициальный или симплициально клеточный комплекс (см. [2]), $K(n-2)$ – дополнение к его $(n-2)$ -мерному остову. Комплекс K называется n -мерным псевдомногообразием, если каждый его симплекс содержится в некотором симплексе размерности n , причем каждый $(n-1)$ -мерный симплекс содержится ровно в двух симплексах размерности n , и пространство $K(n-2)$ связно.

Для каждого n -мерного псевдомногообразия K определена $(n+1)$ -значная динамика T на множестве S его n -мерных симплексов, которая каждому симплексу σ сопоставляет набор всех n -мерных симплексов, не совпадающих с σ и имеющих с σ общую $(n-1)$ -мерную грань. В случае симплициально клеточного комплекса симплекс, имеющий с σ несколько общих $(n-1)$ -мерных граней, входит в набор $T\sigma$ с соответствующей кратностью. Обозначим через K' барицентрическое подразделение комплекса K и через S' множество n -мерных симплексов комплекса K' .

ТЕОРЕМА 1. Для любого псевдомногообразия K динамика $n!T$ интегрируема при помощи некоторой бикосетной $(n+1)!$ -значной группы $X = H \backslash G / H$ с одной образующей. При этом в качестве группы G может быть выбрана некоторая подгруппа группы перестановок $\Sigma_{S'}$ множества S' , а подгруппа H изоморфна группе Σ_{n+1} .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Дадим явную конструкцию $(n+1)!$ -значной группы X . Рассмотрим симплекс Δ^n с множеством вершин $\{0, 1, \dots, n\}$ и каноническое симплициальное отображение $\pi: K' \rightarrow \Delta^n$, переводящее вершину $\alpha \in K'$ в вершину $\pi(\alpha) = i \in \Delta^n$, где i – размерность симплекса $\sigma \in K$, барицентром которого является α . Ясно, что ограничение отображения π на любой n -мерный симплекс из K' является гомеоморфизмом. Скажем, что вершина $\alpha \in K'$ имеет тип i , если $\pi(\alpha) = i$, и $(n-1)$ -мерный симплекс $\rho \in K'$ имеет тип i , если i не является вершиной симплекса $\pi(\rho)$.

Для каждого целого числа i , $0 \leq i \leq n$, и любого n -мерного симплекса τ из K' обозначим через $\Phi_i(\tau)$ (единственный) n -мерный симплекс комплекса K' , имеющий с τ общую $(n-1)$ -мерную грань типа i . Таким образом, мы получаем корректно

определенные перестановки $\Phi_i \in \Sigma_{S'}$, $0 \leq i \leq n$. Возьмем в качестве G подгруппу группы $\Sigma_{S'}$, порожденную этими перестановками, и в качестве H – подгруппу, порожденную перестановками $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$.

ЛЕММА 1. *Перестановки Φ_i удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$\Phi_i^2 = 1; \quad \Phi_i \Phi_j = \Phi_j \Phi_i, \quad |i - j| > 1; \quad \Phi_i \Phi_{i+1} \Phi_i = \Phi_{i+1} \Phi_i \Phi_{i+1}, \quad i < n - 1.$$

Группа H изоморфна Σ_{n+1} .

Рассмотрим бикосетную $(n+1)!$ -значную группу $X = H \setminus G / H$ с одной образующей $a = H\Phi_n H$. Группа G действует на множестве S' так, что $S'/H = S$. Следовательно, имеет место действие $(n+1)!$ -значной группы X на множестве S . Несложно проверить, что это действие интегрирует $(n+1)!$ -значную динамику $n!T$.

Если $K = \partial\Delta^{n+1}$, то $(n+1)!$ -значная группа X является диагональю некоторой двухэлементной $(n+1)$ -значной группы, которая в [1] обозначается через $X(\mathbb{Z}_2, 1, n)$. Следовательно, в этом случае динамика T интегрируема.

В общем случае предъявленная $(n+1)!$ -значная группа X не является диагональю какой-либо $(n+1)$ -значной группы. Вопрос о характеристизации n -мерных псевдомногообразий с динамикой T , интегрируемой при помощи $(n+1)$ -значной группы, остается открытым.

Будем говорить, что n -мерная триангуляция K является *симметричной*, если группа $\text{Aut } K$ ее симплициальных автоморфизмов действует транзитивно на множестве n -мерных симплексов ее барицентрического подразделения K' . Симплициальное отображение $\hat{K} \rightarrow K$ назовем *почти накрытием*, если индуцированное отображение $\hat{K}(n-2) \rightarrow K(n-2)$ является накрытием.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место явная конструкция, сопоставляющая каждому n -мерному псевдомногообразию K минимальное симметричное псевдомногообразие $\hat{K}$ и почти накрытие $\hat{K} \rightarrow K$ такие, что если $\hat{K} \rightarrow K$ – почти накрытие и $\hat{K}$ – симметричное псевдомногообразие, то соответствующее $\hat{K}$ накрытие $\hat{K}(n-2) \rightarrow K(n-2)$ пропускается через $\hat{K}(n-2)$. Группа G из теоремы 1 изоморфна группе $\text{Aut } \hat{K}$.*

Динамика T на множестве n -мерных симплексов n -мерного псевдомногообразия может быть реализована в виде канонической $(n+1)$ -значной динамики на множестве вершин соответствующего однородного графа степени $n+1$. Оказывается, что описанные выше методы применимы в более общем случае.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть T – каноническая $(n+1)$ -значная динамика на множестве вершин произвольного однородного графа степени $n+1$. Пусть G_n – группа с образующими $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ и соотношениями из леммы 1, H_n – ее подгруппа, порожденная образующими $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_{n-1}$. Тогда динамика $n!T$ интегрируема при помощи $(n+1)$ -значной группы $X_n = H_n \setminus G_n / H_n$.*

Список литературы

- [1] V. M. Buchstaber, “ n -valued groups: theory and applications”, *Moscow Math. J.*, **6:2** (2006).
 [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Тр. МИАН*, **247** (2004), 41–58.

В. М. Бухштабер (V. M. Buchstaber)
 Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: buchstab@mi.ras.ru

Представлено С. П. Новиковым
 Принято редколлегией
 02.05.2006

А. А. Гайфуллин (A. A. Gaifullin)
 Московский государственный
 университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: gaifull@mcme.ru