Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Чехов, Решения матричных моделей в $1/N$ -разложении, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 93–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1754>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 15:04:11

УДК 514.753.2

Решения матричных моделей в $1/N$ -разложении

Л. О. Чехов

В работе описаны свойства наиболее общих, многоразрезных решений одноматричных моделей. Рассмотрение начинается с одноматричной модели в присутствии жестких стенок, т.е. в случае, когда носитель плотности распределения собственных значений заключен в пределах нескольких фиксированных отрезков на вещественной оси. После этого рассматривается модель собственных значений, которая представляет собой обобщение одноматричной модели на случай дайсоновского газа. Показано, что во всех этих случаях структура решения в ведущем порядке задается квазиклассическими, или обобщенными иерархиями Уизема–Кричевера. Производные от тау-функций для таких решений ассоциируются с семействами римановых поверхностей (спектральными кривыми, возможно с двойными точками) и удовлетворяют уравнениям Виттена–Дойкграафа–Верлинде–Верлинде. Развита диаграммная техника, описывающая корреляционные функции и свободную энергию этих моделей во всех порядках 'т хофтовского разложения по обратному размеру матриц. Во всех моделях соответствующие величины выражаются в терминах структур, ассоциированных со спектральными кривыми.

Библиография: 71 название.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	94
1. Матричные модели и римановы поверхности	99
1.1. Матричные интегралы и резольвенты	99
1.2. Управляющее петлевое уравнение	100
1.3. Решение в роде нуль	102
1.4. Описание через собственные значения	105
1.5. Свободная энергия как препотенциал системы Зайберга–Виттена–Уизема–Кричевера	108
2. Свободная энергия в планарном приближении и геометрия	113
2.1. Бергмановский бидифференциал и двухточечная резольвента ..	113
2.2. Формула вычетов и уравнения ВДВВ	116
2.3. Нормировочные условия для $W_h(\lambda)$	118
3. Поправки старших родов	120
3.1. Итеративное решение петлевого уравнения	120
3.2. Обращение оператора вставки петли. Свободная энергия	127
3.3. Доказательство условий согласования для $h \geq 2$	130

4. Вычисления в роде один	135
4.1. Построение свободной энергии	135
4.2. Проверка условий согласования	138
4.3. Свободная энергия в роде один, детерминантное представление и сингулярности	139
5. Матричная модель собственных значений	141
5.1. Формулировка модели. Решение петлевых уравнений	141
5.2. Диаграммные правила Фейнмана	147
5.3. Обращение оператора вставки петли. Свободная энергия	149
5.4. Вычисление $\mathcal{F}_{0,2}$	151
6. Заключение	152
Список литературы	153

Введение

Бурное развитие матричных моделей, или нульмерных теорий поля с матричными переменными, во многом обязано тому обстоятельству, что эти модели проявляют одновременно самые разнообразные свойства, удовлетворяя, с одной стороны, иерархиям (нелинейных) интегрируемых уравнений типа Кадомцева–Петвиашвили, а с другой стороны – условиям Вирасоро, характерным для конформных теорий. Помимо того (а лучше сказать, вместе с тем) оказывается, что многие из матричных моделей обладают глубоким геометрическим смыслом, проявляющимся в том, что их статистические суммы задают производящие функции таких геометрических объектов, как индексы пересечений на пространствах модулей и т. д. Заметим, что почти во всех этих проявлениях (свойствах интегрируемости и пр.) настоящим объектом исследования служит не матричный интеграл сам по себе, при фиксированной размерности N матричного поля, а его асимптотическое разложение по обратным степеням этой размерности. Это не случайно, так как уже сама первичная мотивация рассмотрения матричных моделей, предложенная 'т Хофтом [1], предполагала асимптотическое разложение по $1/N$, которое получило название топологического разложения, или разложения по родам, поскольку в (старой) диаграммной технике, в которой каждый порядок этого разложения задавался бесконечной суммой (ленточных) графов, каждый из этих графов в свою очередь задавал разбиение на симплексы (триангуляцию) римановой поверхности соответствующего рода. В рамках одного обзора невозможно охватить весь круг вопросов, имеющих отношение даже к простейшим матричным интегралам, и потому мы решили ограничиться рассмотрением лишь одной, но весьма важной и интересной стороны матричных моделей, а именно, современной процедурой построения асимптотических решений, поскольку такая процедура является необходимым техническим ингредиентом при исследовании *всех* прочих проявлений матричных теорий. Кроме того, как мы намерены показать, сама по себе эта процедура уже проявляет весьма нетривиальные геометрические свойства, которые, безусловно, требуют дальнейшего исследования и, возможно, более глубокой интерпретации, связанной с потаенными топологическими свойствами соответствующих теорий.

Начиная с пионерской работы [2], в которой для кубического потенциала было построено планарное приближение для свободной энергии, и заканчивая работами [3], [4], в которых была сформулирована итеративная процедура, позволяющая находить все поправки по родам для произвольного потенциала, рассмотрение ограничивалось почти исключительно случаем, когда (равновесное) распределение собственных значений эрмитовых матриц замечает один (связный) интервал в пределе больших N (так называемое одноразрезное решение), т.е. рассматривались возмущения над точным гауссовским решением. Его тем не менее оказывалось достаточно для построения двойного скейлингового предела, описывающего критические индексы в непрерывной двумерной гравитации [5], [6]. Построение многоразрезных решений оказалось намного более сложным технически, их матрично-модельная интерпретация была не вполне прозрачна (хотя очевидные свидетельства их существования наблюдались в компьютерных экспериментах [7]), и такие решения рассматривались скорее как экзотический вариант, если только не помеха, при построении подлинно физически значимых решений.

Матричные модели с решениями с несвязным носителем (многоразрезными решениями) снова оказались в центре внимания исследователей в связи с прогрессом, достигнутым в $\mathcal{N} = 1$ суперсимметричных калибровочных теориях [8], [9] и, благодаря Р. Дойкграафу и К. Вафе [10]–[12], предложившим вычислять низкоэнергетические суперпотенциалы с использованием статистической суммы многоразрезных решений. Новый всплеск интереса к таким решениям, которые были известны с начала 90-х годов (см., например, [13], [7], [14], [15]), был во многом вызван исследованиями Г. Боннэ, Ф. Давида и Б. Эйнара [16].

В данной статье рассматриваются асимптотические разложения матрично-модельных интегралов по параметру $1/N$, где N – размер матриц. Уже ведущий член 'т хофтовского разложения матричной модели по $1/N$ оказывается достаточно интересным, поскольку он задает квазиклассическую тау-функцию так называемой универсальной иерархии Уизема–Кричевера (УК) [17] (см. также работы [18], [19]; подробное описание одноматричного и двуматричного случая содержится в соответствующих работах [20] и [21]). В то же время, полные матричные интегралы, если не ограничиваться пределом больших N , оказываются тау-функциями иерархий интегрируемых уравнений типа КП или цепочки Тоды [22]–[24]. В случае решений с одним разрезом матрично-модельные статистические суммы оказываются τ -функциями иерархии цепочки Тоды, представляющей собой один из простейших примеров иерархии УК.

Можно попытаться также рассмотреть более общие решения матричных моделей, отождествляя их с общими решениями петлевых уравнений (уравнений Швингера–Дайсона или Вирасоро) [25]–[27] или с решениями тождеств Уорда, которым удовлетворяют матричные интегралы [28]–[31]. Интерес представляет класс многоразрезных решений петлевых уравнений, или решений с несвязным носителем, которые также допускают представления в виде многоматричных интегралов [16], [32]–[34]. Эти решения связаны с семействами римановых поверхностей, и они образуют некий базис в пространстве всех решений петлевых уравнений [33], [34] (подобно тому, как конечнозонные решения образуют сходный базис в пространстве всех решений интегрируемой иерархии). Эти решения выделяются своим свойством “изомонодромности” – включение старших взаимодействий в матричной модели, равно как и добавление поправок по $1/N$,

не меняет само семейство римановых поверхностей, приводя лишь к репараметризации его модулей, которые становятся функциями, зависящими от этих взаимодействий. Это свойство напрямую связано с тем обстоятельством, что статистические суммы таких решений оказываются квазиклассическими тау-функциями (также называемыми препотенциалами соответствующих систем типа Зайберга–Виттена (ЗВ)). Геометрические свойства таких решений были подробно исследованы в работах [35], [36] в одноматричном случае и в работах [21], [37] в двухматричном случае, но почти что исключительно в планарном пределе. Весьма захватывающая, но и достаточно сложная задача построения полного асимптотического $1/N$ -разложения долго была вне возможностей исследователей.

Заметим, однако, что, как уже было отмечено, в одноматричном случае рекуррентная процедура построения поправок по $1/N$ была разработана в случае одноразрезного решения в работах [3] [4]. Одноточечная резольвента в много-разрезном решении была впервые найдена Акеманом [38], а универсальность критического поведения соответствующих корреляционных функций была продемонстрирована в работе [15]. Акеману также удалось проинтегрировать одноточечную резольвенту и построить свободную энергию $\mathcal{F}_1$ в случае решения с двумя разрезами. Ответ выражался в терминах эллиптических функций. Ответ для свободной энергии в общем, многоразрезном случае был предложен в работах [39], [40], в которых было сделано наблюдение, что формула Акемана совпадает с коррелятором полей твистов, вычисленным Ал. Б. Замолотчиковым [41]. Функция $\mathcal{F}_1$ в общем многоразрезном случае была найдена путем прямого интегрирования однопетлевого коррелятора в работах [42], [36].

Почти одновременно первая поправка была также найдена и в двухматричной модели с использованием весьма продвинутых геометрических методов [43], что поставило на повестку дня вопрос о построении процедуры для нахождения *всех* поправок по $1/N$ в согласованном виде. В случае одноматричной модели такая процедура была развита в работах [44], [45]. Впоследствии она была обобщена сначала на случай матричных моделей с жесткими стенками (жесткими углами) [46] (это модели, в которых введены жесткие ограничения на область допустимых собственных значений потенциала), а затем – на так называемые бета-модели (интегралы по собственным значениям с произвольными степенями определителя Вандермонда под знаком интеграла, также называемые моделями дайсоновского газа) [47] и, наконец, на случай двухматричной модели [48].

Модели с жесткими стенками в планарном пределе двухматричных моделей были построены в недавних работах [49], [50], и работа над обобщением описанного здесь диаграммного разложения на случай этих моделей находится в стадии завершения. Модели типа дайсоновского газа в случае двухматричной модели были исследованы в недавней работе А. Забродина и П. Вигмана [51], в которой были вычислены две ведущих поправки. Мы также надеемся распространить наш метод нахождения всех поправок по $1/N$ на эту модель в ближайшей перспективе.

Все эти модели, и возможно даже и другие модели, которые еще предстоит исследовать, хотя и представляются весьма различными на первый взгляд, обладают общим свойством: решения этих моделей в разложении по $1/N$ могут быть описаны в терминах геометрических величин, связанных с соответствующими

щей спектральной кривой, которая представляет собой кривую конечного рода (гиперэллиптическую в случае одноматричных моделей и общую кривую в случае двухматричной модели), с заданным на ней специальным (мероморфным) 1-дифференциалом dS . Другим ключевым обстоятельством является то, что все поправки по $1/N$ задаются при этом диаграммной техникой фейнмановского типа (подправленной своим образом для каждой модели). Таким образом, в некотором смысле (простейшее) решение одноматричной модели уже содержит в себе все компоненты, необходимые для построения решений целого спектра матричных моделей, в том числе и гораздо более сложных!

Обзор начинается с показа того, как решения одноматричной модели с жесткими стенками могут быть естественным образом инкорпорированы в общую схему построения решений стандартной одноматричной модели. На этом примере вводятся все базисные составляющие матрично-модельных решений, которые оказываются общими для всех обсуждаемых моделей, такие, как иерархия УК, уравнения Виттена–Дойкграафа–Верлинде–Верлинде (ВДВВ), равно как и диаграммная техника вычисления поправок по $1/N$.

Для общности представления термин 1ММ будет использоваться для обозначения эрмитовой одноматричной модели, возможно в присутствии жестких стенок.

В разделе 1 описаны общие свойства многоразрезных решений матричных моделей. Выводится основной набор ограничений на статистическую сумму матричной модели, который записывается в виде управляющего петлевого уравнения.

Перед тем как обратиться к общей процедуре построения решений управляющего петлевого уравнения порядок за порядком теории возмущений для нахождения петлевого среднего (одноточечной резольвенты) матрично-модельного потенциала, исследуем отдельно ведущий член (планарное приближение). Будет показано, что свободная энергия 1ММ в планарном пределе (пределе больших N) совпадает с препотенциалом теории Зайберга–Виттена–Уизема–Кричевера (ЗВУК).

Соответствующую иерархию УК можно описать в терминах абелевых дифференциалов, заданных на семействе римановых поверхностей. Отсюда видно, что основные величины в матричных моделях могут быть выражены в геометрических терминах, что позволяет вычислить производные свободной энергии матричной модели. В самом деле, в разделе 2 показано, что вторые производные свободной энергии 1ММ выражаются через так называемый бергмановский бидифференциал. Затем рассматриваются третьи производные. В самом деле, для тау-функций иерархии УК типично (но не обязательно) то, что они удовлетворяют набору (обобщенных) уравнений ВДВВ [52]–[54], которые представляют собой дифференциальные уравнения по временам Уизема, содержащие производные третьего порядка. Наличие таких уравнений обычно рассматривается как свидетельство существования подлежащей топологической теории. В разделе 2 доказано, что квазиклассическая тау-функция решения с несвязным носителем для матричных моделей удовлетворяет уравнениям ВДВВ в случае общего решения 1ММ, т.е. в случае произвольного числа ненулевых канонических времен, набор которых включает в себя времена потенциала и числа заполнения (заполняющие фракции), указывающие порции собственных значений, попадающие в соответствующие интервалы носителя распределения

собственных значений. Параметры жестких стенок, которые сами по себе оказываются вне набора канонических переменных, тем не менее влияют на *размерность* набора невырожденных уравнений ВДВВ. Это завершает интерпретацию результатов работ [8], [9] в терминах квазиклассических иерархий. Сами уравнения ВДВВ являются следствием формулы вычетов и ассоциативности некоторой алгебры (например, алгебры голоморфных дифференциалов на римановой поверхности) [54]. Доказательство формулы вычетов и дополнительных условий следует работе [35]. Аналогичные результаты остаются справедливыми и в случае двухматричной модели [37]. Отметим, что наиболее раннее рассмотрение уравнений ВДВВ для дифференциала dS в случае жестких стенок с матрично-модельной точки зрения было проведено Итоямой и Морозовым в работе [55]. В их интерпретации такая модификация использовалась для регуляризации матрично-модельного интеграла.

Мы завершаем этот раздел описанием общего соотношения нормировки, которому удовлетворяет свободная энергия матричной модели при дифференцированиях по уиземовским временам.

В разделе 3 описана диаграммная процедура вычисления порядок за порядком всех поправок по $1/N$ в 1ММ с жесткими стенками. В том же разделе приводится описание процедуры работ [45] и [46], позволяющей проинтегрировать ответ, полученный для однопетлевого коррелятора, с тем чтобы получить выражение для собственно свободной энергии. В этом же разделе представлено отсутствовавшее ранее в литературе доказательство условий согласования, которым должно удовлетворять выражение для свободной энергии, являющееся решением управляющего петлевого уравнения. Наш подход дает ответ во всех родах, кроме ведущей поправки (приближения тора), которое, соответственно, заслуживает специального рассмотрения (в случае стандартной 1ММ такое исследование было произведено в работе [42]), содержащегося в разделе 4.

В разделе 5 описывается модель собственных значений, отвечающая системе дайсоновского газа (с произвольной степенью 2β определителя Вандермонда собственных значений, стоящего под знаком интеграла). Модели такого вида широко применяются в теоретической физике, например, при описании квантового эффекта Холла, но вместе с тем находят и геометрические приложения, по крайней мере при некоторых выделенных значениях β . Например, при $\beta = 1/2$ и при выборе логарифмического потенциала (так называемая модель Пеннера) свободная энергия модели такого вида является производящей функцией виртуальных эйлеровых характеристик пространств модулей неориентируемых поверхностей [56]. Эта модель проявляет те же замечательные геометрические свойства, что и 1ММ, но $1/N$ -разложение этой модели претерпевает модификацию. Дается описание этой модификации и формулируется полученная при этом диаграммная техника для резольвент. Затем с помощью интегрирования строится выражение для свободной энергии, и в указанном случае имеются две поправки к свободной энергии, которые не удастся получить с помощью диаграммной техники. Первая из поправок – это просто ведущая поправка в 1ММ, построенная в разделе 4, а нахождение второй производится с помощью тех же самых методов, что и в случае 1ММ.

Для целостности изложения обзор ограничивается только рассмотрением одноматричных моделей, хотя общая процедура построения поправок по $1/N$ для свободной энергии двухматричной модели, равно как и для (несмешанных) кор-

реляционных функций, была сформулирована и доказана в работе [48], к которой читатель может обратиться за деталями построения (по поводу поправок низших порядков см. [57], [46], [58]). Здесь же только отметим, что полученные в этой работе диаграммные правила почти во всех деталях повторяют правила для 1ММ, но спектральная кривая становится общей алгебраической кривой, не просто гиперэллиптической кривой, характерной для случая 1ММ. Как и в случае 1ММ, эта процедура позволяет получить полный ответ во всех порядках $1/N$ -разложения, кроме ведущей поправки, ответ для которой был тем не менее получен Б. Эйнарсом, А. Кокотовым и Д. Короткиным [43] с использованием геометрических методов тау-функции Бергмана на пространствах Гурвица.

1. Матричные модели и римановы поверхности

1.1. Матричные интегралы и резольвенты. Рассмотрим интеграл 1ММ, или статистическую сумму $\mathcal{Z}$ одноматричной модели:

$$\int_{N \times N; E} DX e^{-\frac{1}{\hbar} \text{tr } V(X)} = e^{\frac{1}{\hbar^2} \mathcal{F}} \equiv \mathcal{Z}, \quad (1.1)$$

где $V(X) = \sum_{k \geq 1} t_k X^k$ называется потенциалом модели, а $\hbar = t_0/N$ – формальный параметр разложения, интегрирование производится по матрицам размера $N \times N$ по стандартной мере Хаара $DX \propto \prod_{i < j} d \text{Re } X_{ij} d \text{Im } X_{ij} \prod_i d \text{Re } X_{ii}$, и также предполагается, что область интегрирования E для собственных значений матрицы X состоит из некоторого числа (возможно, полубесконечных) отрезков, $E = \bigcup_{\beta=1}^{q/2} [a_{2\beta-1}, a_{2\beta}]$. Топологическое разложение в ряд по диаграммам Фейнмана при этом эквивалентно разложению по четным степеням параметра $\hbar$ для свободной энергии

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}(\hbar, t_0, t_1, t_2, \dots) = \sum_{h=0}^{\infty} \hbar^{2h} \mathcal{F}_h. \quad (1.2)$$

Обычно параметр $t_0 = \hbar N$ интерпретируется как масштабированное число собственных значений. Будем предполагать, что потенциал $V(\lambda)$ представляет собой многочлен фиксированной степени $m+1$.

В исходном подходе 'т Хофта каждый вклад $\mathcal{F}_h$ задается суммой вкладов бесконечного числа ленточных графов, каждый из которых представляет собой симплициальное разбиение римановой поверхности рода h , причем каждому k -угольному ($k \geq 3$) двумерному симплексу (грани) отвечает член $\frac{1}{\hbar} t_k \text{tr } X^k$, ребрам – член, обратный гауссовскому члену $\frac{1}{\hbar} t_2 \text{tr } X^2$, а вершинам – замкнутые индексные петли, дающие множители $t_0/\hbar$. Заметим, что эти римановы поверхности и римановы поверхности в основном тексте – совершенно различные объекты, так как последние будут связаны со спектральной кривой и их род g будет определяться только числом n несвязных отрезков области распределения собственных значений и будет одним и тем же во всех порядках $\hbar^2$ -разложения.

Средние, отвечающие статистической сумме (1.1), определены обычным образом:

$$\langle f(X) \rangle = \frac{1}{\mathcal{Z}} \int_{N \times N; E} DX f(X) e^{-\frac{1}{\hbar} \text{tr } V(X)}, \quad (1.3)$$

и для них удобно ввести производящую функцию – одноточечную резольвенту

$$W(\lambda) = \hbar \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\langle \text{tr } X^k \rangle}{\lambda^{k+1}}, \quad (1.4)$$

равно как и s -точечные резольвенты ($s \geq 2$)

$$\begin{aligned} W(\lambda_1, \dots, \lambda_s) &= \hbar^{2-s} \sum_{k_1, \dots, k_s=1}^{\infty} \frac{\langle \text{tr } X^{k_1} \dots \text{tr } X^{k_s} \rangle_{\text{conn}}}{\lambda_1^{k_1+1} \dots \lambda_s^{k_s+1}} \\ &= \hbar^{2-s} \left\langle \text{tr} \frac{1}{\lambda_1 - X} \dots \text{tr} \frac{1}{\lambda_s - X} \right\rangle_{\text{conn}}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где индекс “conn” обозначает связную часть соответствующей корреляционной функции, например

$$\langle \text{tr } A(X) \text{tr } B(X) \rangle = \langle \text{tr } A(X) \rangle \langle \text{tr } B(X) \rangle + \langle \text{tr } A(X) \text{tr } B(X) \rangle_{\text{conn}}.$$

Эти резольвенты можно получить из свободной энергии $\mathcal{F}$ с помощью действия *оператора вставки петли*:

$$\frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \equiv - \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda^{j+1}} \frac{\partial}{\partial t_j} \quad (1.6)$$

с помощью соотношений

$$\begin{aligned} W(\lambda_1, \dots, \lambda_s) &= \hbar^2 \frac{\partial}{\partial V(\lambda_s)} \frac{\partial}{\partial V(\lambda_{s-1})} \dots \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V(\lambda_1)} \\ &= \frac{\partial}{\partial V(\lambda_s)} \frac{\partial}{\partial V(\lambda_{s-1})} \dots \frac{\partial}{\partial V(\lambda_2)} W(\lambda_1). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Таким образом, если одноточечная резольвента точно известна для произвольного потенциала, все многоточечные резольвенты могут быть вычислены по индукции. В вышеприведенной нормировке разложение по родам имеет вид

$$W(\lambda_1, \dots, \lambda_s) = \sum_{h=0}^{\infty} \hbar^{2h} W_h(\lambda_1, \dots, \lambda_s), \quad s \geq 1, \quad (1.8)$$

который аналогичен разложению по родам (1.2).

1.2. Управляющее петлевое уравнение. Начнем рассмотрение с вывода условий на интеграл (1.1), которые следуют из его инвариантности относительно замены переменных интегрирования. Для этого сначала перейдем в представление собственных значений, предполагая, что

$$e^{\frac{1}{\hbar^2} \mathcal{F}} = \int_{E(\{a_\beta\})} DX e^{-\frac{1}{\hbar} \text{tr } V(X)} \simeq \int_{E(\{a_\beta\})} \prod_{i=1}^{t_0/\hbar} d\lambda_i \Delta^2(\lambda) e^{-\frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^{t_0/\hbar} V(\lambda_i)} \quad (1.9)$$

с точностью до объема унитарной группы $U(t_0/\hbar)$. Здесь, как обычно, через $\Delta(\lambda)$ обозначен определитель Вандермонда для переменных λ_i . Этот определитель возникает стандартным образом, как якобиан перехода от меры Хаара DX

к мере интегрирования $DU(t_0/\hbar) \cdot \prod_{i=1}^{t_0/\hbar} d\lambda_i$ (где $X = U \cdot \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N)U^\dagger$ – представление, в котором явно выделены собственные значения). Чтобы получить условия на интеграл (1.1), произведем в последнем выражении замену переменных

$$\lambda_i = \tilde{\lambda}_i + \varepsilon \tilde{\lambda}_i^{p+1}, \quad p \geq -1, \quad (1.10)$$

которая очевидно оставляет значение интеграла неизменным:

$$e^{\frac{1}{\hbar^2} \mathcal{F}} = \int_{E(\{a_\beta - \varepsilon a_\beta^{p+1}\})} \prod_{i=1}^{t_0/\hbar} d(\tilde{\lambda}_i + \varepsilon \tilde{\lambda}_i^{p+1}) \Delta^2(\tilde{\lambda} + \varepsilon \tilde{\lambda}^{p+1}) e^{-\frac{1}{\hbar} \sum_{i=1}^{t_0/\hbar} V(\tilde{\lambda}_i + \varepsilon \tilde{\lambda}_i^{p+1})}.$$

Инфинитезимальное (по ε) условие инвариантности интеграла (1.1) относительно замены (1.10) приводит к *условиям Вирасоро* (см. [59]):

$$\left(- \sum_{\beta=1}^q a_\beta^{p+1} \frac{\partial}{\partial a_\beta} + \sum_{k=0}^p \hbar^2 \frac{\partial}{\partial t_k} \cdot \frac{\partial}{\partial t_{p-k}} + \sum_{k=1}^\infty k t_k \frac{\partial}{\partial t_{k+p}} \right) \mathcal{F} = 0, \quad p \geq -1. \quad (1.11)$$

Здесь для удобства записи введено обозначение

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \mathcal{F} \equiv -\frac{t_0}{\hbar^2} \mathcal{F}, \quad \text{или} \quad \frac{\partial}{\partial t_0} \mathcal{F} \equiv -t_0.$$

В терминах $\mathcal{F}$ уравнения (1.11) принимают вид:

$$- \sum_{\beta=1}^q a_\beta^{p+1} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_\beta} + \sum_{k=0}^p \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_k} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_{p-k}} + \hbar^2 \sum_{k=0}^p \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial t_k \partial t_{p-k}} + \sum_{k=1}^\infty k t_k \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial t_{k+p}} = 0, \quad p \geq -1, \quad (1.12)$$

и, умножив эти условия Вирасоро с λ^{-p-2} и просуммировав по p от -1 до ∞ , получим *управляющее петлевое уравнение* [27] в 1ММ с жесткими стенками (см. [28]–[31]):

$$\sum_{\beta=1}^q \frac{1}{\lambda - a_\beta} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_\beta} + \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{V'(\xi)}{\lambda - \xi} W(\xi) = W(\lambda)^2 + \hbar^2 W(\lambda, \lambda). \quad (1.13)$$

Удобно представить это уравнение с помощью линейного интегрального оператора $\hat{K}$:

$$\hat{K}f(\lambda) \equiv \oint_{\lambda > \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{V'(\xi)}{\lambda - \xi} f(\xi) = [V'(\lambda)f(\lambda)]_-, \quad (1.14)$$

который представляет собой оператор проекции на отрицательную часть лорановского степенного разложения¹ переменной λ . Здесь и далее $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}$ обозначает контур, обходящий вокруг всех сингулярных точек резольвенты $W(\xi)$, но

¹Чтобы это доказать, достаточно стянуть контур интегрирования на бесконечность, получив таким образом

$$\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{V'(\xi)}{\lambda - \xi} f(\xi) = V'(\lambda)f(\lambda) - [V'(\lambda)f(\lambda)]_+ = [V'(\lambda)f(\lambda)]_-,$$

где

$$[V'(\lambda)f(\lambda)]_+ = \text{res}_{\xi=\infty} \left(\frac{V'(\xi)f(\xi)}{\lambda - \xi} \right)$$

задает проекцию на положительную часть степенного разложения.

оставляющий снаружи точку $\xi = \lambda$. Такое соотношение расположения снаружи или внутри между точкой и контуром или между двумя контурами будет в дальнейшем часто обозначаться символами “больше” или “меньше”. С помощью (1.7) можно выразить второй член в правой части петлевого уравнения (1.13) через $W(\lambda)$, и уравнение (1.13) при этом принимает вид условия на односточную резольвенту (1.4).

Подставляя разложение по родам (1.8) в уравнение (1.13), найдем, что $W_h(\lambda)$ при $h \geq 1$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{\beta=1}^q \frac{1}{\lambda - a_\beta} \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial a_\beta} + (\hat{K} - 2W_0(\lambda))W_h(\lambda) = \sum_{h'=1}^{h-1} W_{h'}(\lambda)W_{h-h'}(\lambda) + \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} W_{h-1}(\lambda). \quad (1.15)$$

В уравнении (1.15) поправочный член $W_h(\lambda)$ выражается только через $W_{h'}(\lambda)$ с $h' < h$. Это позволяет развить итеративную процедуру.

Заметим, что петлевое уравнение теперь явно зависит от точек a_β . Хотя член, пропорциональный производной свободной энергии $\mathcal{F}_h$, представляется чужеродным для нашего подхода (так как его нельзя представить в терминах резольвент), в дальнейшем мы покажем, что эти члены важны для самосогласованности картины.

Применим теперь асимптотические условия (следующие из определения матричного интеграла)

$$W_h(\lambda)|_{\lambda \rightarrow \infty} = \frac{t_0}{\lambda} \delta_{h,0} + O(1/\lambda^2) \quad (1.16)$$

и решим явно условия (1.13) в роде нуль. После этого все поправки $W_h(\lambda)$ можно находить итеративно, восстанавливая таким образом соответствующие вклады в свободную энергию с помощью последующего интегрирования, так как

$$W_h(\lambda) = -\frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \mathcal{F}_h, \quad h \geq 1. \quad (1.17)$$

1.3. Решение в роде нуль. В роде нуль петлевое уравнение (1.13) принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=1}^q \frac{1}{\lambda - a_\beta} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial a_\beta} + \oint_{\mathcal{C}_\emptyset} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{V'(\xi)}{\lambda - \xi} W_0(\xi) \\ = \frac{\bar{P}_{q-1}(\lambda)}{\prod_{\beta=1}^q (\lambda - a_\beta)} + [V'(\lambda)W_0(\lambda)]_- = (W_0(\lambda))^2, \end{aligned} \quad (1.18)$$

где многочлен $\bar{P}_{q-1}(\lambda)$ таков, что

$$\sum_{\beta=1}^q \frac{1}{\lambda - a_\beta} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial a_\beta} = \frac{\bar{P}_{q-1}(\lambda)}{\prod_{\beta=1}^q (\lambda - a_\beta)}. \quad (1.19)$$

В дальнейшем для простоты полагаем, что $P_r(\lambda)$ будет обозначать произвольный многочлен степени r (отмеченной индексом) от переменной λ . Например, можно записать $P_r(\lambda) + P_u(\lambda) = P_w(\lambda)$, где $w = \max(r, u)$.

Поскольку $[V'(\lambda)W_0(\lambda)]_- = V'(\lambda)W_0(\lambda) - [V'(\lambda)W_0(\lambda)]_+$, то в силу асимптотических условий (1.16) последний член представляет собой многочлен степени $m-1$, где m – степень $V'(\lambda)$:

$$P_{m-1}(\lambda) = -[V'(\lambda)W_0(\lambda)]_+ = -\oint_{\mathcal{C}_\infty} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{V'(\xi)}{\lambda - \xi} W_0(\xi). \quad (1.20)$$

То есть имеет место квадратное уравнение

$$W_0^2(\lambda) - V'(\lambda)W_0(\lambda) = P_{m-1}(\lambda) + \frac{\bar{P}_{q-1}(\lambda)}{\prod_{\beta=1}^q (\lambda - a_\beta)} = \frac{P_{m+q-1}(\lambda)}{\prod_{\beta=1}^q (\lambda - a_\beta)}.$$

Решение уравнения (1.18) при этом имеет вид

$$W_0(\lambda) = \frac{1}{2}V'(\lambda) - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{V'(\lambda)^2 \prod_{\beta=1}^t (\lambda - a_\beta) + 4P_{m+t-1}(\lambda)}}{\sqrt{\prod_{\beta=1}^t (\lambda - a_\beta)}}, \quad (1.21)$$

где знак минус выбран с тем, чтобы удовлетворить асимптотическому условию (1.16). Предположим также, что общее решение в пределе больших N может содержать зависимость только от t из q жестких стенок a_β . Это означает, что, ввиду условий (1.19), оставшиеся полюсы просто сокращаются в выражении (1.21). Таким образом, одноточечная резольвента может быть представлена в (наиболее общем!) виде

$$W_0(\lambda) = \frac{1}{2}(V'(\lambda) - y(\lambda)), \quad (1.22)$$

где вводится новая функция $y(\lambda)$, удовлетворяющая уравнению

$$y(\lambda)^2 = V'(\lambda)^2 + 4 \frac{P_{m+t-1}(\lambda)}{\prod_{\beta=1}^t (\lambda - a_\beta)} \quad (1.23)$$

и заданная на гиперэллиптической римановой кривой. Для потенциала $V(\lambda)$ общего вида с $m \rightarrow \infty$ эта кривая могла бы иметь бесконечный род, но в дальнейшем мы предполагаем рассматривать решения только лишь с конечным и фиксированным числом разрезов n . Среди концов этих разрезов имеются t точек a_β ($t \geq q$), занумерованные индексами $\beta = 1, \dots, t$, и s новых точек μ_α , $\alpha = 1, \dots, s$. Очевидно, что $s + t = 2n$. Представим теперь $y(\lambda)$ в виде

$$y(\lambda) \equiv M(\lambda)\tilde{y}(\lambda), \quad \text{где} \quad \tilde{y}^2(\lambda) \equiv \frac{\prod_{\alpha=1}^s (\lambda - \mu_\alpha)}{\prod_{\beta=1}^t (\lambda - a_\beta)}, \quad M(\lambda) = t_{m+1} \prod_j (\lambda - b_j) \quad (1.24)$$

и все точки μ_α, a_β различны. В дальнейшем будем предполагать, что функция $M(\lambda)$ представляет собой многочлен степени $m - \frac{s-t}{2}$, учитывая, что как s , так и t всегда конечны и фиксированы, в то время как степень $m \geq n$ может быть произвольно большой. По соглашению положим $\tilde{y}(\lambda)|_{\lambda \rightarrow \infty} \sim \lambda^{(s-t)/2}$ и, ввиду (1.22), получим поведение

$$V'(\lambda) = y(\lambda) + \frac{2t_0}{\lambda} + O(1/\lambda^2) \quad (1.25)$$

при больших λ .

Контур интегрирования $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ обходит теперь вокруг конечного числа n непесекающихся интервалов:

$$\mathcal{D} \equiv \bigcup_{i=1}^n [\mu_{2i-1}, \mu_{2i}], \quad \mu_1 < \mu_2 < \dots < \mu_{2n}. \quad (1.26)$$

Среди концов μ_i этих интервалов имеются жесткие стенки a_β , $\beta = 1, \dots, t$ ($t \leq q$), и некоторое число новых, “динамических” точек μ_α , $\alpha = 1, \dots, s$, при этом $s + t = 2n$. Часто (но не всегда) эти два класса точек можно рассматривать, не делая между ними различия, как например в формуле (1.29), и в этих случаях удобно для них использовать единое обозначение μ_i с латинским индексом, пробегающим значения $i = 1, \dots, 2n$, для произвольной точки ветвления вне зависимости от ее происхождения.

Зададимся теперь вопросом о том, сколько свободных параметров имеется в теории. Условия (1.25) налагают $m + 2$ ограничений на параметры $y(\lambda)$, среди которых имеется $m - \frac{s-t}{2} + 1$ коэффициентов многочлена $M(\lambda)$ и s новых точек ветвления μ_α , что дает в общей сложности $m + \frac{s+t}{2} + 1 = m + n + 1$ параметров. Тем самым условий (1.25) достаточно для того, чтобы фиксировать всю свободу только в случае $n = 1$ (случай одного разреза).

Таким образом, помимо времени t_0 еще имеется $(n - 1)$ -мерное пространство параметров, которые надо фиксировать. Координаты на этом пространстве можно выбирать произвольным образом, но оказывается, что существует выделенный набор из $n - 1$ независимой переменной, которые параметризуют решения петлевых уравнений [16], [10]–[12]:

$$S_i = \oint_{A_i} \frac{d\lambda}{4\pi i} y(\lambda) = \oint_{A_i} \frac{d\lambda}{4\pi i} M(\lambda) \tilde{y}(\lambda), \quad (1.27)$$

где A_i , $i = 1, \dots, n - 1$, – базис A -циклов на *редуцированной гиперэллиптической римановой поверхности* рода $g \equiv n - 1$, задаваемой уравнением:

$$\tilde{y}^2 = \prod_{\alpha=1}^s (\lambda - \mu_\alpha) \prod_{\beta=1}^t (\lambda - a_\beta) \equiv \prod_{i=1}^{2n} (\lambda - \mu_i). \quad (1.28)$$

(Удобно выбрать в качестве A -циклов первые $n - 1$ разрезов, см. рис. 1. Величины S_i суть нормированные заполняющие фракции, см. ниже.) При заданном базисе A -циклов имеет место сопряженный базис B -циклов, задаваемых формой пересечения $A_i \circ B_j = \delta_{ij}$. В нашем случае цикл B_k проходит от данного правого края k -го разреза до последнего, n -го разреза. Для определенности упорядочим все точки μ_i в соответствии с их индексами, так что точка μ_i будет справа от μ_j , если $i > j$.

В нашем рассмотрении для случая 1ММ будем систематически избегать любой явной зависимости от нулей b_i многочлена $M(\lambda)$. Вместо них правильными величинами, от которых будет зависеть свободная энергия, будут сама (редуцированная) риманова поверхность (1.28) и *моменты* $M_i^{(p)}$ матрично-модельного потенциала общего вида (см. [4], [38], [32]), которые представляют собой производные $(p - 1)$ -го порядка от этого многочлена, взятые в точках ветвления,

Рис. 1. Структура разрезов и контуров на редуцированной римановой поверхности. Пунктиром обозначены участки контуров на втором, нефизическом листе

а эти точки в свою очередь задают концы интервалов распределения собственных значений,

$$M_i^{(p)} = \frac{1}{(p-1)!} \left(\frac{\partial^{p-1}}{\partial \lambda^{p-1}} M(\lambda) \right) \Big|_{\lambda=\mu_i}, \quad i = 1, \dots, 2n, \quad \text{например, } M_i^{(1)} = M(\mu_i). \quad (1.29)$$

1.4. Описание через собственные значения. Переменные S_i допускают “физическую” интерпретацию в квазиклассической картине, описывающей распределение собственных значений матриц (кулоновский газ) в пределе, когда их число (и соответственно размер матриц) стремится к бесконечности.

Введем сначала усредненное распределение собственных значений:

$$\rho(\lambda) \equiv \frac{t_0}{N} \sum_i^N \langle \delta(\lambda - \lambda_i) \rangle = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (W(\lambda - i\epsilon) - W(\lambda + i\epsilon)), \quad (1.30)$$

в котором λ_i суть собственные значения матрицы X . В планарном пределе эта величина имеет вид

$$\rho_0(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} (W_0(\lambda - i\epsilon) - W_0(\lambda + i\epsilon)) = \frac{1}{2\pi} \text{Im } y(\lambda), \quad (1.31)$$

и она при этом удовлетворяет уравнению²

$$\text{V.p.} \int_{\mathcal{D}} \frac{\rho_0(\lambda)}{x - \lambda} d\lambda = \frac{1}{2} V'(x) \quad \forall p \in \mathcal{D}. \quad (1.32)$$

Это усредненное распределение собственных значений становится собственно распределением собственных значений в пределе, когда их число стремится к

²В самом деле, по определению

$$\oint_{\infty} \frac{W_0(\lambda)}{x - \lambda} d\lambda = 0.$$

Теперь, применяя (1.22) и определение (1.30) и стягивая контур с бесконечности, приходим к искомому уравнению.

бесконечности. При этом матричный интеграл (1.9) принимает вид

$$e^{\frac{1}{\hbar^2} \mathcal{F}} = \int_E \prod_i dx_i e^{-\frac{1}{\hbar^2} \left(\int V(\lambda) \varrho(\lambda) - \int \varrho(\lambda) \varrho(\lambda') \log |\lambda - \lambda'| d\lambda d\lambda' \right)} \equiv \int_E \prod_i dx_i e^{\frac{1}{\hbar^2} S_{\text{eff}}}, \quad (1.33)$$

где введено распределение собственных значений:

$$\varrho(\lambda) \equiv \frac{t_0}{N} \sum_i \delta(\lambda - \lambda_i). \quad (1.34)$$

Теперь в пределе больших N правомочно использовать приближение седловой точки, чтобы получить уравнение на $\varrho(\lambda)$. Поскольку переменная t_0 играет роль (нормированного) полного числа собственных значений,

$$t_0 = \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} y(\lambda) d\lambda = -\frac{1}{2} \text{res}_{\infty}(y(\lambda) d\lambda), \quad (1.35)$$

а носитель $\mathcal{D}$ функции ϱ состоит из n отрезков $\mathcal{D}_i$, наложим ограничение

$$\int \varrho(\lambda) d\lambda = t_0 \quad (1.36)$$

и, следуя методологии [16], [10]–[12], зафиксируем числа заполнения S_i (1.27), $i = 1, \dots, n-1$, для собственных значений в каждом из отрезков. Будем считать число заполнения на последнем, n -м отрезке равным $t_0 - \sum_{i=1}^{n-1} S_i \equiv S_n$.³ (Очевидно, что в одноразрезном случае никаких новых параметров S_i не возникает.) Формально эта фиксация достигается введением соответствующих *химических потенциалов* (множителей Лагранжа) Π_0 и Π_i , $i = 1, \dots, n-1$, в вариационную задачу для свободной энергии, которая при этом в планарном пределе имеет следующий вид:

$$S_{\text{eff}}[\varrho; S_i, t_0, t_k] = - \int_{\mathcal{D}} V(\lambda) \varrho(\lambda) d\lambda + \iint_{\mathcal{D}} \varrho(\lambda) \log |\lambda - \lambda'| \varrho(\lambda') d\lambda d\lambda' - \Pi_0 \left(\int_{\mathcal{D}} \varrho(\lambda) d\lambda - t_0 \right) - \sum_{i=1}^{n-1} \Pi_i \left(\int_{\mathcal{D}_i} \varrho(\lambda) d\lambda - S_i \right), \quad (1.37)$$

и из условия седловой точки следует уравнение на равновесную плотность распределения собственных значений $\varrho_c(\lambda)$:

$$2 \int \varrho_c(\lambda) \log |x - \lambda| d\lambda = V(x) + \Pi_i + \Pi_0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_i, \quad (1.38)$$

и его производная совпадает с (1.32). Мы также предполагаем, что ни переменная t_0 , ни числа заполнения S_i не получают поправок в разложении по переменной $\hbar$. Из условия (1.30) при этом, в частности, следует, что

$$\oint_{A_i} W_h(\lambda) d\lambda \equiv 0 \quad \forall h > 0, \quad \forall i = 1, \dots, n. \quad (1.39)$$

³Иногда бывает удобным рассматривать в качестве канонической переменной величину S_n , а не t_0 . Тем не менее, во всех случаях использования S_n это должно специально оговариваться, чтобы не спутать переменную S_n с “настоящими” переменными чисел заполнения S_i , $i = 1, \dots, n-1$.

Таким образом, при общих значениях переменных Π_i , которые описывают произвол в решениях петлевого уравнения, функция $\varrho_c(\lambda)$ задает общее решение (1.32) и ее можно отождествить с $\rho_0(\lambda)$. Тем не менее, в “настоящем” матрично-модельном интеграле (в котором не содержится дополнительных химических потенциалов) следует после этого проварьировать $\mathcal{F}_0$ теперь уже по переменным Π_i , чтобы найти “настоящий” минимум для конфигураций распределения собственных значений:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial S_i} = 0 \quad \forall i. \quad (1.40)$$

Это дает дополнительный набор уравнений, фиксирующий конкретные значения S_i и Π_i в матричном интеграле.

Вычислим теперь производную $\mathcal{F}_0$ (1.37) по S_i . Из (1.37) имеем:

$$\left. \frac{\partial S_{\text{eff}}}{\partial S_i} \right|_{\varrho=\rho_0} = - \int_{\mathcal{D}} d\lambda \frac{\partial \rho_0(\lambda)}{\partial S_i} \left(V(\lambda) - 2 \int_{\mathcal{D}} d\lambda' \log(\lambda - \lambda') \rho_0(\lambda') \right). \quad (1.41)$$

Выражение в скобках в правой части формулы (1.41) почти представляет собой вариацию (1.37) по плотности распределения собственных значений, которая равна

$$0 = \left. \frac{\delta S_{\text{eff}}}{\delta \rho(\lambda)} \right|_{\varrho=\rho_0} = V(\lambda) - 2 \int_{\mathcal{D}} d\lambda' \log(\lambda - \lambda') \rho_0(\lambda') + \Pi_i + \Pi_0 \quad (1.42)$$

для $\lambda \in D_i \subset \mathcal{D}$.

Она тем самым есть кусочно постоянная функция $\zeta(\lambda)$, которая равна константе $\zeta_i \equiv -\Pi_0 - \Pi_i$ на каждом разрезе A_i . При этом имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial S_i} &= \left. \frac{\partial S_{\text{eff}}[\varrho]}{\partial S_i} \right|_{\varrho=\rho_0} = - \int_{\mathcal{D}} d\lambda \frac{\partial \rho_0(\lambda)}{\partial S_i} \zeta(\lambda) \\ &= - \frac{1}{4\pi i} \sum_{j=1}^n \zeta_j \frac{\partial}{\partial S_i} \oint_{A_j} y(\lambda) d\lambda \\ &= - \sum_{j=1}^n \zeta_j \frac{\partial S_j}{\partial S_i} = -\zeta_i + \zeta_n = \Pi_i. \end{aligned} \quad (1.43)$$

В частности,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t_0} = \Pi_0. \quad (1.44)$$

В работах [13], [7], [14] было доказано, что разность значений Π_i на двух соседних разрезах равна⁴

$$\zeta_{i+1} - \zeta_i = 2 \int_{\mu_{2i}}^{\mu_{2i+1}} W_0(\lambda) d\lambda, \quad (1.45)$$

т.е.

$$\Pi_i = (\zeta_{i+1} - \zeta_i) + (\zeta_{i+2} - \zeta_{i+1}) + \dots + (\zeta_n - \zeta_{n-1}) = \zeta_n - \zeta_i = \oint_{B_i} y(\lambda) d\lambda. \quad (1.46)$$

⁴Простейший способ это доказать состоит в том, чтобы доопределить функцию $\zeta(\lambda)$ вне разрезов: $\zeta(\lambda) = V(\lambda) - 2 \int_{\mathcal{D}} d\lambda' \log(\lambda - \lambda') \rho_0(\lambda')$ и заметить, что $\zeta'(\lambda)|_{\lambda \notin \mathcal{D}} = 2W_0(\lambda)$.

Планарный предел свободной энергии при этом получится, если подставить решение в седловой точке ϱ_c в (1.37):

$$\mathcal{F}_0 = S_{\text{eff}}[\varrho_c] = -\frac{1}{2} \int_{\mathcal{D}} V(\lambda) \varrho_c(\lambda) d\lambda + \frac{1}{2} \Pi_0 t_0 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \Pi_i S_i. \quad (1.47)$$

В нашем подходе выбор способа решения петлевого уравнения состоит в том, чтобы фиксировать числа заполнения (1.27). Заметим, что если потребовать фиксации химических потенциалов (1.43)–(1.46) вместо (1.40), то получится решение с A - и B -циклами, которые поменяются ролями на римановой поверхности (1.23), что отвечает модулярному преобразованию. При этом старшие поправки становятся зависимыми от выбора базиса: принимая в качестве независимых переменных S_i или Π_i , можно получить различные выражения, например, для свободной энергии в роде один, см. п. 4.3.

Заметим, что присутствие жестких стенок не оказало существенного влияния на рассмотрение в этом пункте, поскольку их наличие сказывается только лишь на изменении асимптотического поведения функции $y(\lambda)$ вблизи соответствующих точек ветвления: в то время как в окрестности “динамической” точки ветвления μ_α распределение собственных значений подчинено полуциркулярному вигнеровскому закону, известно (см., например, [60]), что в окрестности жесткой стенки наблюдается эффект аккумуляции собственных значений (или же нулей соответствующих ортогональных многочленов) в соответствии с законом обратного квадратного корня. Это находится в полном согласии с ответом (1.24) для $y(\lambda)$.

1.5. Свободная энергия как препотенциал системы Зайберга–Виттена–Уизема–Кричевера. Обратимся теперь к исследованию геометрических свойств, скрытых в матрично-модельных решениях. Именно, мы собираемся связать систему ЗВУК с планарным пределом свободной энергии матричной модели.

Матричный интеграл как система Зайберга–Виттена. Система ЗВ в общем виде [61], [62] представляет собой конечномерное (g -мерное) пространство модулей римановых поверхностей рода g с заданным мероморфным 1-дифференциалом dS и *препотенциалом* F (скалярной функцией от $S_i = \oint_{A_i} dS$) таким, что $\frac{\partial F}{\partial S_i} = \oint_{B_i} dS$ и $\frac{\partial dS}{\partial S_i} = dw_i$ – нормированные канонические 1-дифференциалы.

Семейство римановых поверхностей теперь задается семейством редуцированных римановых поверхностей рода $g = n - 1$, описываемых уравнением (1.23) или (1.24). Тем самым предполагается, что сами римановы поверхности не содержат информации о дополнительном многочлене $M(\lambda)$, которая тем не менее содержится в соответствии с формулой (1.24) в дифференциале $dS(\lambda)$. В качестве дифференциала ЗВ выберем

$$dS(\lambda) = y(\lambda) d\lambda. \quad (1.48)$$

Рассмотрим вариацию $dS(\lambda)$ по параметрам S_i . Вариации по модулям поверхности не меняют ни род редуцированной римановой поверхности, ни старшую степень дополнительного многочлена $M_{m-n}(\lambda)$. Будем также считать, что *ни* времена потенциала $V'_m(\lambda)$, *ни* параметры жестких стенок a_β *не зависят* от

параметров S_i и t_0 , т.е. будем предполагать, что $\delta V'_m(\lambda)/\delta S_i \equiv 0$, и рассмотрим как вариации δ общего вида, которые изменяют потенциал и точки ветвления μ_α (но оставляют инвариантными параметры жестких стенок a_β), так и *специальные* вариации δ_S , которые оставляют инвариантным потенциал и параметры жестких стенок и варьируют только модули решения S_i .

С помощью (1.23) и (1.24) получим для вариации *общего вида* δdS :⁵

$$\begin{aligned} \delta dS(\lambda) &= \delta \left(M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda) \tilde{y}(\lambda) \right) d\lambda \\ &= \frac{\prod_{\alpha=1}^s (\lambda - \mu_\alpha) \delta M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda) + \frac{1}{2} M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda) \delta \prod_{\alpha=1}^s (\lambda - \mu_\alpha)}{\widehat{y}(\lambda)} d\lambda, \end{aligned} \quad (1.49)$$

где полиномиальное выражение в числителе имеет максимальную степень $m + \frac{s+t}{2} - 1 = m+n-1$ (так как мы держим фиксированным старший член $M_{m-\frac{s-t}{2}}$), а в знаменателе получается гиперэллиптическая координата (1.28). С другой стороны, при вариации δ_S , которая не меняет потенциал, получим из формул (1.23), (1.24), что

$$\begin{aligned} \delta_S dS(\lambda) &= -\frac{1}{2} \frac{\delta_S 4P_{m+t-1}(\lambda)}{M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda) \tilde{y}(\lambda) \prod_{\beta=1}^t (\lambda - a_\beta)} d\lambda \\ &= -2 \frac{\delta_S P_{m+t-1}(\lambda)}{M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda) \widehat{y}(\lambda)} d\lambda. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Так как эта вариация представляет собой всего лишь частный случай (1.49), то с необходимостью следует, что нули $M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda)$ в знаменателе (1.50) должны в точности *сокращаться* с нулями многочлена $\delta_S P_{m+t-1}(\lambda)$ в числителе, так что максимальная степень многочлена в числителе будет $\frac{s+t}{2} - 2 = n - 2$ (так как, подчеркнем снова, старший член $P_{m+t-1}(\lambda)$ фиксирован асимптотическими условиями (1.25) и остается инвариантным при вариациях δ_S). Можно сделать ключевое наблюдение, что вариация $\delta_S dS$ оказывается *голоморфной* на кривой (1.28), как и должно быть для дифференциала ЗВ.

Более того, рассматривая специальную вариацию по переменным S_i с учетом условия (1.27), получим, что

$$\delta_{i,j} = \delta_{S_i} S_j = \delta_{S_i} \oint_{A_j} \frac{d\lambda}{4\pi i} y(\lambda) = \oint_{A_j} \frac{d\lambda}{4\pi i} \delta_{S_i} y(\lambda)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial dS(\lambda)}{\partial S_i} = \frac{H_i(\lambda) d\lambda}{\widehat{y}(\lambda)} = d\omega_i(\lambda), \quad (1.51)$$

где $d\omega_i(\lambda)$ – канонически нормированные $(\frac{1}{4\pi i} \oint_{A_i} d\omega_i(\lambda) = \delta_{i,j})$ голоморфные 1-дифференциалы на редуцированной римановой поверхности $\widehat{y}(\lambda)$. Здесь $H_i(\lambda)$ представляют собой многочлены степени $n - 2$ (эта степень точна, поскольку каждый такой многочлен имеет в точности один нуль на каждом из циклов A_j при $j \neq i$).

⁵Заметим, что вариация δ тем не менее отличается от оператора вставки петли (1.6), поскольку первая не меняет по определению степень многочлена $M(\lambda)$.

Представив теперь (1.46) в виде $\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial S_i} = \oint_{B_i} dS(\lambda)$ вместе с (1.51), можно реконструировать систему ЗВ [61] [62], препотенциал которой есть планарный предел $\mathcal{F}_0$ свободной энергии 1ММ. Из этой формулы и из (1.51) получим знаменитое выражение, связывающее $\mathcal{F}_0$ с матрицей периодов $\tau_{i,j}$ редуцированной римановой поверхности:

$$\frac{\partial^2 \mathcal{F}_0}{\partial S_i \partial S_j} = \oint_{B_i} d\omega_j(\lambda) \equiv \tau_{i,j}. \quad (1.52)$$

Матричный интеграл как система Уизема–Кричевера. Система УК дополняет систему ЗВ, расширяя пространство модулей с помощью введения в рассмотрение переменных t_k , $k = 0, 1, 2, \dots$, и сопряженных им переменных v_k ($k = 0, 1, 2, \dots$) таких, что $t_k = \text{res}_{\lambda=\infty} dS \cdot \lambda^{-k}$ (при $k > 0$), $v_k = \text{res}_{\lambda=\infty} dS \cdot \lambda^k$ и $\frac{\partial dS}{\partial t_k} = d\Omega_k$ – базис мероморфных 1-дифференциалов, имеющих чистый полюс $(k+1)$ -го порядка на бесконечности и таких, что их A -циклы равны нулю. Система ЗВУК задается препотенциалом F , зависящим как от S_i , так и от t_k , $k = 0, 1, 2, \dots$.

Покажем теперь, что $\mathcal{F}_0$ обладает дополнительными геометрическими структурами, возникающими при дифференцировании по временам t_k и t_0 , что дает полную систему ЗВУК.

Рассмотрим вариации потенциала, т.е. вариации относительно (уиземовских) времен t_k . Тогда вместо (1.50) получим:

$$\delta dS(\lambda) = -\frac{1}{2} \frac{\delta \left((V'_m)^2(\lambda) - \frac{P_{m+t-1}(\lambda)}{\prod_{\beta=1}^t (\lambda - a_\beta)} \right)}{M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda) \tilde{y}(\lambda)} d\lambda, \quad (1.53)$$

в то время как соотношение (1.49) по-прежнему остается справедливым. Повторяя рассуждения предыдущего параграфа, можно заключить, что нули множителя $M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda)$ в знаменателе сокращаются, а потому вариация может иметь полюс только в точке $\lambda = \infty$. Чтобы вычислить этот полюс, применим формулу (1.49), из которой следует, что $dS(\lambda) = M_{m-\frac{s-t}{2}}(\lambda) \tilde{y}(\lambda) d\lambda \rightarrow (V'_m(\lambda) + O(\frac{1}{\lambda})) d\lambda$ и, следовательно, вариация дифференциала $dS(\lambda)$ при больших λ полностью определяется вариацией $V'_m(\lambda)$. В параметризации $V(\lambda) = \sum_{k=1}^{m+1} t_k \lambda^k$ получим:

$$\frac{\partial dS(\lambda)}{\partial S_i} = d\omega_i(\lambda), \quad \frac{\partial dS(\lambda)}{\partial t_k} = 2d\Omega_k(\lambda), \quad (1.54)$$

со следующим поведением на бесконечности в локальной координате $\xi = 1/\lambda$:

$$d\Omega_k = k(\xi^{-k-1} + O(1)) d\xi \quad \text{для} \quad \xi \rightarrow 0, \quad k > 0. \quad (1.55)$$

Это поведение определено с точностью до добавления линейной комбинации голоморфных дифференциалов. Нормировка $d\Omega_k$ фиксируется условиями:

$$\frac{\partial S_i}{\partial t_k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} d\Omega_k(\lambda) = 0 \quad \forall i, k, \quad \text{или} \quad \frac{\partial S_i}{\partial V(\lambda)} = 0, \quad i = 1, \dots, n-1. \quad (1.56)$$

Производные dS по временам имеют вид

$$2d\Omega_k(\lambda) \equiv \frac{\partial dS(\lambda)}{\partial t_k} = \frac{H_{n+k-1}(\lambda) d\lambda}{\hat{y}(\lambda)}, \quad (1.57)$$

и нормировочные условия (1.56) вместе с асимптотическим разложением

$$\begin{aligned} 2d\Omega_k(\lambda)|_{\lambda \rightarrow \infty} &= k\lambda^{k-1} d\lambda + O(\lambda^{-2}) d\lambda \\ &= k\lambda^{k-1} d\lambda + \sum_{m=1}^{\infty} c_{km} \lambda^{-1-m} d\lambda \end{aligned} \quad (1.58)$$

полностью задают коэффициенты соответствующих многочленов H_{n+k-1} степеней $n+k-1$.

Уравнения (1.54) в совокупности с нормировочными условиями (1.56) задают систему ЗВУК [17] (см. также [63], [18]), препотенциал которой равен $\mathcal{F}_0$. Чтобы это продемонстрировать, применим формулу, аналогичную формуле (1.41), допуская теперь вариации потенциала $V(\lambda)$. При этом получим (см. (1.41)–(1.43)):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t_k} &= -\frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{D}} d\lambda \frac{\partial y(\lambda)}{\partial t_k} \cdot h(\lambda) - \frac{1}{4\pi i} \oint_{\mathcal{D}} d\lambda y(\lambda) \lambda^k \\ &= -\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial S_i}{\partial t_k} (\zeta_i - \zeta_n) + \frac{1}{2} \operatorname{res}_{\lambda=\infty} (\lambda^k dS(\lambda)) \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{res}_{\lambda=\infty} (\lambda^k dS(\lambda)) \equiv \frac{1}{2} v_k, \quad k = 1, \dots, m, \end{aligned} \quad (1.59)$$

т.е. стандартную формулу теории ЗВУК.

Рассмотрим наконец вариацию dS относительно переменных жестких стенок a_β . Отметим сразу, что поскольку величины S_i и t_0 суть независимые переменные, равно как и t_k и a_β , то с необходимостью выполнены условия:

$$\frac{\partial S_i}{\partial a_\beta} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{A_i} \frac{\partial y(\lambda)}{\partial a_\beta} d\lambda = 0 \quad \forall i, \beta \quad \text{и} \quad \frac{\partial V'(\lambda)}{\partial a_\beta} = 0. \quad (1.60)$$

Варируя (1.23) относительно a_β , получим:

$$\begin{aligned} y(\lambda) \delta_{a_\beta} y(\lambda) &= 2 \frac{\delta_{a_\beta} P_{m+t-1}(\lambda)}{\sqrt{\prod_{\gamma=1}^t (\lambda - a_\gamma)}} + \frac{P_{m+t-1}(\lambda)}{(\lambda - a_\beta) \sqrt{\prod_{\gamma=1}^t (\lambda - a_\gamma)}} \\ &= \frac{\bar{P}_{m+t-1}(\lambda)}{(\lambda - a_\beta) \sqrt{\prod_{\gamma=1}^t (\lambda - a_\gamma)}}, \end{aligned} \quad (1.61)$$

так что, снова повторяя рассуждение о сокращении нулей многочлена $M(\lambda)$, получим:

$$\frac{\partial y(\lambda)}{\partial a_\beta} = \frac{\tilde{P}_{n-1}(\lambda)}{(\lambda - a_\beta) \tilde{y}(\lambda)} \equiv d\Omega_{a_\beta}(\lambda), \quad (1.62)$$

где $d\Omega_{a_\beta}(\lambda)$ – (неканоническая) мероморфная 1-форма с единственным полюсом второго порядка в точке $\lambda = a_\beta$ и со всеми своими интегралами по A -циклам, равными нулю вследствие условий (1.60). Чтобы найти квадратичный вычет этой формы в точке $\lambda = a_\beta$, необходимо выделить наиболее сингулярный вклад при вариации $y(\lambda) = M(\lambda) \tilde{y}(\lambda)$ относительно параметра a_β ; этот

вклад задается частной производной по a_β , так что получим:

$$d\Omega_{a_\beta}(\lambda) = \frac{1}{2}M(a_\beta) \frac{\sqrt{\prod_{\alpha=1}^s (a_\beta - \mu_\alpha)}}{\sqrt{\prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \beta}}^t (a_\beta - a_\gamma)}} \frac{d\lambda}{(\lambda - a_\beta)^{3/2}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda - a_\beta}}\right) d\lambda; \quad (1.63)$$

$$\oint_{A_i} d\Omega_{a_\beta}(\lambda) = 0 \quad \forall i.$$

О t_0 -зависимости препотенциала. Последнее свойство $\mathcal{F}_0$, которое необходимо проверить, – это его поведение относительно t_0 . Из теории ЗВУК можно ожидать, что

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t_0} = \int_{\infty_-}^{\infty_+} dS(\lambda) \quad (1.64)$$

и $\frac{\partial dS(\lambda)}{\partial t_0} = d\Omega_0(\lambda)$, где $d\Omega_0(\lambda)$ – абелев дифференциал третьего рода с двумя простыми полюсами на двух бесконечностях:

$$\operatorname{res}_{\infty} d\Omega_0(\lambda) = -\operatorname{res}_{\infty_-} d\Omega_0(\lambda) = -1. \quad (1.65)$$

Однако возникает проблема, поскольку интеграл в выражении (1.64) расходится и его следует регуляризовать.

Нам известна производная $\partial \mathcal{F}_0 / \partial t_0$ (1.44), которая равна интегралу

$$\oint_{\mathcal{D}} \log |\lambda - q_0| dS(\lambda) - V(q_0)$$

с реперной точкой q_0 , выбранной на последнем, n -м разрезе; полное выражение не зависит от конкретного положения этой реперной точки. Выберем ее равной μ_{2n} – самой правой точке разреза. После этого можно обратить интегрирование по контуру вокруг носителя $\mathcal{D}$ в интеграл по контуру, который сначала идет по верхнему краю логарифмического разреза от μ_{2n} до точки регуляризации Λ затем по окружности C_Λ большого радиуса $|\Lambda|$, и затем обратно по нижнему краю логарифмического разреза в комплексной плоскости. Чтобы замкнуть контур на исследуемой гиперэллиптической римановой поверхности, необходимо добавить интегрирование по соответствующему контуру на нефизическом листе поверхности, как показано на рис. 2. Это дополнительное интегрирование просто удваивает значение интеграла, и мы будем обозначать через C_L полный контур интегрирования; очевидно, что интеграл по этому контуру дает конечный ответ.

Получим:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial t_0} = \frac{1}{2} \left(\oint_{C_L} \log(\lambda - \mu_{2n}) dS(\lambda) - 2V(\mu_{2n}) \right) = \Pi_0, \quad (1.66)$$

где C_L – контур, изображенный на рис. 2. Тем самым доказано, что планарный предел $\mathcal{F}_0$ свободной энергии 1ММ представляет собой препотенциал ЗВУК, или квазиклассическую тау-функцию.

Введем теперь (полный) набор канонических переменных $\{S_i, i = 1, \dots, n-1; t_0; t_k, k = 1, \dots, m\}$, которые будем обозначать единообразно как $\{t_I\}$ (ниже

Рис. 2. Разрезы в плоскости λ , или в плоскости “собственных значений” для планарного предела 1ММ. Предполагается, что собственные значения сконцентрированы “на” разрезах. Логарифмический разрез между двумя копиями бесконечности на двух листах гиперэллиптической римановой поверхности добавлен для вычисления производной по переменной t_0 ; при этом C_L – регуляризованный контур интегрирования

прописные латинские буквы маркируют произвольное время из этого набора). Из формул (1.51), (1.65) и (1.57) при этом получается общее соотношение:

$$\frac{\partial dS(\lambda)}{\partial t_I} \equiv d\Omega_I(\lambda) = \frac{H_I(\lambda) d\lambda}{\widehat{y}(\lambda)}, \quad (1.67)$$

где $H_I(\lambda)$ – многочлены.

Из асимптотических формул (1.65) и (1.58) следует, что *производные* всех величин $d\Omega_I$ по произвольному параметру оказываются регулярными на бесконечности и могут иметь сингулярности *только* в точках ветвления μ_i редуцированной римановой поверхности (1.28).

Отметим снова, что эти производные имеют чисто геометрическую структуру и не зависят в нашем описании от природы точки ветвления: возникают ли они как жесткие стенки или как “динамические” точки ветвления.

2. Свободная энергия в планарном приближении и геометрия

2.1. Бергмановский бидифференциал и двухточечная резольвента. Вычисление одноточечной резольвенты в предыдущем разделе потребовало знания первых производных матрично-модельной свободной энергии. Обратимся теперь к двухточечным резольвентам, задаваемым вторыми производными. Здесь вместо дифференциалов с определенными предписанными аналитическими свойствами главным объектом исследования будет *бидифференциал* на римановой поверхности Σ_g : а именно, *бергмановское ядро* (канонически нормированный бидифференциал в терминологии ФЭя), который представляет собой вторую производную логарифма главной формы $E(P, Q)$ и который тем самым симметричен относительно своих аргументов $P, Q \in \Sigma_g$, а единственная его особенность возникает при совпадающих аргументах, где он имеет поведение (см. [64])

$$B(P, Q) = \left(\frac{1}{(\xi(P) - \xi(Q))^2} + O(1) \right) d\xi(P) d\xi(Q) \quad (2.1)$$

в локальной координате $\xi(P)$. Имеется свобода добавления к (2.1) произвольной билинейной комбинации абелевых 1-дифференциалов $d\omega_i$; эта свобода фиксируется наложением условий зануления интегралов от $B(P, Q)$ по всем A -циклам:

$$\oint_{A_i} B(P, Q) = 0 \quad \text{для} \quad i = 1, \dots, g. \quad (2.2)$$

В окрестности точки ветвления μ_i бидифференциал $B(P, Q)$ имеет поведение

$$B(P, Q)|_{Q \rightarrow \mu_i} = B(P, [\mu_i]) \left(\frac{dq}{\sqrt{q - \mu_i}} + O(\sqrt{q - \mu_i}) dq \right), \quad (2.3)$$

и имеют место стандартные вариационные формулы Рауха [65], связывающие $B(P, Q)$ с другими объектами на (произвольной, не обязательно гиперэллиптической) римановой поверхности:

$$\frac{\partial}{\partial \mu_i} B(P, Q) = \frac{1}{2} B(P, [\mu_i]) B([\mu_i], Q), \quad i = 1, \dots, 2n, \quad (2.4)$$

и

$$\oint_{B_i} B(P, Q) = 2\pi i dw_i(P), \quad (2.5)$$

где μ_i – любая простая точка ветвления комплексной структуры, а $dw_i(P)$ – канонически нормированные голоморфные дифференциалы.

Кроме этих формул нам потребуется еще одно, довольно очевидное, соотношение: для произвольной мероморфной функции f на кривой имеет место равенство

$$df(P) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_P} B(P, Q) f(Q), \quad (2.6)$$

где контур $\mathcal{C}_P$ окружает только лишь точку P и оставляет снаружи все сингулярности f , а $df(Q)$ – 1-дифференциал, равный $\frac{df}{dq} dq(Q)$ в локальной координате $q(Q)$.

В дальнейшем будем различать координаты и собственно точки кривой, обозначая последние прописными латинскими буквами.

Покажем теперь, как бергмановское ядро порождает дифференциалы $d\Omega_k$. Биполярный дифференциал (1.65) можно представить через главную форму в виде:

$$d\Omega_0(P) = d \log \frac{E(P, \infty_+)}{E(P, \infty_-)}. \quad (2.7)$$

Первообразная дифференциала (2.7) (которая понадобится в дальнейшем) при этом очевидно имеет логарифмический разрез между точками двух бесконечностей на римановой поверхности.

Применяя (1.7), (1.59) и (1.54), получим в этом случае

$$\begin{aligned} W_0(\lambda, \mu) d\lambda d\mu &= - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d\mu d\lambda}{\lambda^{j+1}} \frac{\partial}{\partial t_j} W_0(\mu) \\ &= - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} V'(\mu) d\lambda d\mu + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d\lambda d\mu}{\lambda^{j+1}} \frac{\partial}{\partial t_j} y(\lambda) \\ &= - \frac{1}{2} \frac{d\lambda d\mu}{(\lambda - \mu)^2} + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{j+1}} d\Omega_j(\mu). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Так как $d\Omega_j(\mu) = (\pm j\mu^{j-1} + O(1/\mu^2)) d\mu$ при $\mu \rightarrow \infty_{\pm}$, $j > 0$, то можно заключить, что бесконечная сумма

$$\frac{1}{2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d\lambda}{\lambda^{j+1}} d\Omega_j(\mu)$$

имеет полюс второго порядка $\frac{d\lambda d\mu}{2(\lambda-\mu)^2}$ в случае, когда λ и μ лежат на одном и том же (физическом) листе; этот полюс при этом сокращается с первым членом. Другой полюс второго порядка $-\frac{d\lambda d\mu}{2(\lambda-\mu)^2}$ возникает при λ и μ , лежащих на различных листах, и этот полюс удваивается при учете вклада первого члена, так что с учетом очевидных нормировочных соотношений, немедленно вытекающих из (2.8),

$$\oint_{A_i} W_0(\lambda, \mu) d\mu = \oint_{A_i} W_0(\lambda, \mu) d\lambda = 0, \quad (2.9)$$

получим окончательную формулу для двухточечной резольвенты:

$$W_0(\lambda, \mu) d\lambda d\mu = \frac{\partial W_0(\lambda)}{\partial V(\mu)} d\lambda d\mu = -B(\lambda, \bar{\mu}), \quad (2.10)$$

и, соответственно,

$$\frac{\partial y(\mu)}{\partial V(\lambda)} = -\frac{1}{2}(B(\lambda, \mu) - B(\lambda, \bar{\mu})), \quad (2.11)$$

где введено обозначение для инволюции между двумя листами гиперэллиптической кривой с переменными λ и $\bar{\lambda}$, обозначающими соответственно комплексные координаты физического и нефизического листов.

Дальнейшее построение $1/N$ -разложения будет использовать только инвариантные объекты (бергмановские бидифференциалы и их первообразные) на редуцированной римановой поверхности (1.28) и дифференциал ВЗ dS .

Нам также понадобится технически более простое выражение для 1-дифференциала $dE_{\mu, q_0}(\lambda)$, который представляет собой первообразную бергмановского ядра $B(\lambda, \mu)$ относительно аргумента μ . Этот дифференциал очевидно однозначен по переменной λ , по которой он имеет нулевые A -периоды на редуцированной римановой поверхности, и он вместе с тем оказывается многозначной функцией от μ , которая испытывает скачки, равные $d\omega_i(P)$, в случае, когда переменная Q обходит вокруг цикла B_i :

$$\begin{aligned} dE_{Q+\oint_{B_j}, q_0}(P) &= 2\pi i dw_j(P) + dE_{Q, q_0}(P), \\ dE_{Q+\oint_{A_j}, q_0}(P) &= dE_{Q, q_0}(P). \end{aligned}$$

В разделе 4 мы также используем явное выражение для ядра $dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda) = dE_{\mu, q_0}(\lambda) - dE_{\bar{\mu}, q_0}(\lambda)$ в гиперэллиптическом случае:

$$dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda) = \frac{\hat{y}(\mu)d\lambda}{(\lambda-\mu)\hat{y}(\lambda)} - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{H_i(\lambda) d\lambda}{\hat{y}(\lambda)} \oint_{A_i} d\xi \frac{\hat{y}(\mu)}{(\xi-\mu)\hat{y}(\xi)}. \quad (2.12)$$

Ядро $dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)$ антисимметрично при инволюции $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$ и имеет простой полюс с вычетом один при $\lambda = \mu$ и простой полюс с вычетом минус один при $\bar{\lambda} = \mu$, а также нулевые A -периоды по переменной λ .

Заметим, что формулу (1.63), выражающую производную функции $y(\lambda)$ по параметру a_β , можно теперь переписать через вычет в точке ветвления a_β :

$$\frac{\partial y(\lambda) d\lambda}{\partial a_\beta} \equiv d\Omega_{a_\beta}(\lambda) = \operatorname{res}_{\mu=a_\beta} (B(\lambda, \mu) y(\mu)). \quad (2.13)$$

В точке ветвления μ_i ($i = 1, \dots, 2n$) эквивалентная форма записи (2.3) имеет вид

$$2B(\lambda, [\mu_i]) = \lim_{\mu \rightarrow \mu_i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{\sqrt{\mu - \mu_i}}. \quad (2.14)$$

2.2. Формула вычетов и уравнения ВДВВ. Уравнения ВДВВ [52], [53] представляют собой систему алгебраических уравнений [54]

$$\mathcal{F}_I \mathcal{F}_J^{-1} \mathcal{F}_K = \mathcal{F}_K \mathcal{F}_J^{-1} \mathcal{F}_I \quad \forall I, J, K, \quad (2.15)$$

на производные третьего порядка

$$\|\mathcal{F}_I\|_{JK} = \frac{\partial^3 \mathcal{F}}{\partial t_I \partial t_J \partial t_K} \equiv \mathcal{F}_{IJK} \quad (2.16)$$

от некоторой функции $\mathcal{F}(\{t_I\})$. Часто эти уравнения находят интерпретацию как условия ассоциативности в алгебре подлежащей топологической теории.

В работе [35] было продемонстрировано, что свободная энергия многоразрезного решения 1ММ удовлетворяет уравнениям ВДВВ как функция от *канонических* переменных, идентифицированных с периодами и вычетами производящей мероморфной 1-формы dS [17]. В основе доказательства лежала *формула вычетов* для производных третьего порядка (2.16) свободной энергии 1ММ. При этом свободная энергия многоразрезного решения удовлетворяет уравнениям ВДВВ, если выбрать число независимых переменных *равным* числу “динамических” точек ветвления. Наличие точек ветвления, отвечающих жестким стенкам, приводит, тем самым, к уменьшению полной размерности системы ВДВВ.

Поскольку все величины $d\Omega_I$ (1.67) зависят *исключительно* от редуцированной гиперэллиптической римановой поверхности (1.28), их производные по *любой величине* должны выражаться через производные относительно положения точек ветвления μ_i . (Большая часть деталей опускается; читатель может обратиться за подробностями к работам [17], [35].)

Отметим то важное обстоятельство, что если интерпретировать свободную энергию матричной модели (1.1) как решение управляющего петлевого уравнения (1.13), у нас еще остается свобода добавлять к ответу некоторую функцию от S_i и t_0 (произвольную функцию в случае отсутствия жестких стенок). Однако такая добавка с необходимостью нарушает уравнения системы ЗВУК. В этой связи мы можем *потребовать* выполнения уравнений ВДВВ, что полностью фиксирует произвол. Тем самым, мы будем называть свободной энергией 1ММ $\mathcal{F}_0$ то решение петлевого уравнения, которое удовлетворяет уравнениям ВДВВ. Существование такого решения следует из конструкции ниже.

Формулу для третьей производной $\partial^3 \mathcal{F}_0 / (\partial t_I \partial t_J \partial \mu_\alpha) \equiv \mathcal{F}_{IJ\alpha}^{(0)}$ довольно легко получить из (2.4) в случае, когда t_I и t_J – времена потенциала, а в случае прочих канонических переменных следует использовать билинейные тождества Римана.

В итоге получим:

$$\mathcal{F}_{IJ\alpha}^{(0)} = \operatorname{res}_{\mu_\alpha} (d\Omega_I \partial_\alpha \Omega_J) = \frac{H_I(\mu_\alpha) H_J(\mu_\alpha)}{\prod_{j \neq \alpha} (\mu_\alpha - \mu_j)}, \quad (2.17)$$

и для завершения вычисления третьих производных необходимо обратить зависимость от точек ветвления, что позволяет найти $\partial \mu_\alpha / \partial t_K$. (Заметим, что очевидно $\partial a_\beta / \partial t_K \equiv 0$.) Дифференцируя выражения (1.23) и (1.24) по t_K , получим для (1.54):

$$\frac{\partial dS(\lambda)}{\partial t_K} = \frac{H_K(\lambda) d\lambda}{\tilde{y}(\lambda)} = \frac{1}{2} M(\lambda) \sum_{\alpha=1}^s \frac{\tilde{y}(\lambda)}{(\lambda - \mu_\alpha)} \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial t_K} d\lambda + \frac{\partial M(\lambda)}{\partial t_K} \tilde{y}(\lambda) d\lambda. \quad (2.18)$$

Производная многочлена $M(\lambda)$ очевидно снова дает многочлен, регулярный при $\lambda = \mu_\alpha$. Умножая (2.18) на $\sqrt{\lambda - \mu_\alpha}$ и полагая $\lambda = \mu_\alpha$, непосредственно получим:

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial t_K} = \frac{H_K(\mu_\alpha)}{M(\mu_\alpha) \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^s (\mu_\alpha - \mu_\gamma)}, \quad (2.19)$$

с *одними* лишь “динамическими” точками ветвления, участвующими в произведении в знаменателе. В комбинации с (2.17) придем к искомой формуле вычетов для третьих производных относительно канонических переменных t_I :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 \mathcal{F}_0}{\partial t_I \partial t_J \partial t_K} &= \sum_{\alpha=1}^s \frac{H_I(\mu_\alpha) H_J(\mu_\alpha) H_K(\mu_\alpha)}{M(\mu_\alpha) \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^s (\mu_\alpha - \mu_\gamma)^2 \prod_{\beta=1}^t (\mu_\alpha - a_\beta)} \\ &= \sum_{\alpha=1}^s \operatorname{res}_{\mu_\alpha} \frac{d\Omega_I d\Omega_J d\Omega_K}{d\lambda dy} = \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{res}_{\mu_i} \frac{d\Omega_I d\Omega_J d\Omega_K}{d\lambda dy} \\ &= \operatorname{res}_{d\lambda=0} \frac{d\Omega_I d\Omega_J d\Omega_K}{d\lambda dy}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

В последней строке можно перейти к суммированию по *всем* точкам ветвления, поскольку вычеты в точках $\lambda = a_\beta$ обращаются в нуль и в последнем выражении предполагается суммирование по всем нулям дифференциала $d\lambda$ на редуцированной римановой поверхности (1.28).

После того как получена формула вычетов (2.20), доказательство собственно уравнений ВДВВ (2.15) сводится к проверке ассоциативности алгебры дифференциалов $d\Omega_I$ при взятии их произведений по модулю $\sqrt{\prod_{\alpha=1}^s (\lambda - \mu_\alpha)} d\lambda$. Эту алгебру можно свести к алгебре многочленов $H_I(\lambda)$ с произведением по модулю $\prod_{\alpha=1}^s (\lambda - \mu_\alpha)$, которая корректно определена и очевидно ассоциативна. Базис в алгебре многочленов $H_I(\lambda)$, очевидно, имеет размерность s и задается, например, мономами степеней $0, 1, \dots, s-2, s-1$.

Другое доказательство сводится к решению системы линейных уравнений [66]. Вводя величины

$$\phi_I^\alpha \equiv \frac{H_I(\mu_\alpha)}{M^{1/3}(\mu_\alpha) \prod_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \alpha}}^s (\mu_\alpha - \mu_\gamma)^{2/3} \prod_{\beta=1}^t (\mu_\alpha - a_\beta)^{1/3}}, \quad (2.21)$$

можно привести (2.20) к виду

$$\mathcal{F}_{IJK}^{(0)} = \sum_{\alpha=1}^s \phi_I^\alpha \phi_J^\alpha \phi_K^\alpha. \quad (2.22)$$

Потребуем дополнительно, чтобы детерминант ϕ_I^α был невырожденным:

$$\det_{I\alpha} \|\phi_I^\alpha\| \neq 0. \quad (2.23)$$

Эта невырожденность выполняется автоматически в случае отсутствия жестких стенок, если выбрать в качестве канонических переменных S_i , t_0 и первые n времен t_k ($k = 1, \dots, n$) потенциала [36].⁶ В случае теории с жесткими стенками эти соображения не работают, и такой определитель в принципе *может* обращаться в нуль на подмногообразиях параметров задачи, так что условия (2.23) следует рассматривать как *дополнительное* ограничение помимо условий равновесия, утверждающих, что *число канонических переменных должно совпадать с числом “динамических” точек ветвления решения*. Напомним, что для того, чтобы система ВДВВ была нетривиальна, необходимо иметь не менее трех канонических переменных и, соответственно, не менее трех “динамических” точек ветвления.

Если обозначить через $\mathcal{F}_I^{(0)}$ матрицу с элементом JK , равным $\mathcal{F}_{IJK}^{(0)}$, то уравнения ВДВВ (2.15) следуют непосредственно из представления (2.22) и условия невырожденности (2.23).

2.3. Нормировочные условия для $W_h(\lambda)$. В п. 2.2 было показано, что в планарном пределе 1ММ в качестве условий нормировки, фиксирующих произвол в добавлении функций, зависящих только от S_i и t_0 , к решению петлевого уравнения, выступает полная система ЗВУК или, эквивалентно, условия ВДВВ. Встает вопрос о том, какие условия окажутся естественными условиями нормировки в остальных поправочных членах $\hbar^2$ -разложения.

Еще один набор условий можно получить из общих свойств бергмановского ядра, а кроме того, его можно вывести непосредственно из формул раздела 1. Для этого применим смешанные производные $\partial/\partial V(\mu)$ и $\partial/\partial S_i$ к планарному пределу свободной энергии $\mathcal{F}_0$. С одной стороны,

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial S_i} = \oint_{B_i} dS(\lambda),$$

и используя то, что

$$dS(\lambda) = y(\lambda) d\lambda = (V'(\lambda) - 2W_0(\lambda)) d\lambda, \quad \frac{\partial V'(\lambda)}{\partial V(\mu)} = -\frac{1}{(\lambda - \mu)^2},$$

⁶Как следует из определения (2.21), с точностью до очевидных множителей типа определителя Вандермонда это условие сводится к условию невырожденности матрицы σ (4.13). В самом деле, если $\det \sigma$ равен нулю, то существует такой многочлен $P(\lambda)$ степени, меньшей или равной $n - 2$, что

$$\int_{\mu_{2i-1}}^{\mu_{2i}} \frac{P(\lambda)}{\tilde{y}(\lambda)} d\lambda = 0 \quad \text{для } i = 1, \dots, n - 1.$$

Но отсюда с необходимостью вытекает, что $P(\lambda)$ имеет по крайней мере один нуль на каждом из отрезков (μ_{2i-1}, μ_{2i}) ; в противном случае комбинация под знаком интеграла знакоопределена и интеграл не может обратиться в нуль. Тогда у многочлена $P(\lambda)$ должно быть по крайней мере $n - 1$ нулей, и поскольку его степень не превышает $n - 2$, он тождественно равен нулю.

и формулу (2.10), получим:

$$\oint_{B_i} \frac{\partial(dS(\lambda))}{\partial V(\mu)} d\mu = \oint_{B_i} \left(2B(\lambda, \mu) - \frac{1}{(\lambda - \mu)^2} d\lambda d\mu \right) = \oint_{B_i} 2B(\lambda, \mu). \quad (2.24)$$

С другой стороны, действуя производными в обратном порядке, получим сначала

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial V(\mu)} d\mu = W_0(\mu) d\mu = (V'(\mu) - y(\mu)) d\mu,$$

а потом

$$\frac{\partial(V'(\mu) - y(\mu)) d\mu}{\partial S_i} = 2d\omega_i(\mu),$$

или, в бескоординатном представлении, классическое тождество (2.5) (см., например, [64]).

Таким образом,

$$\frac{\partial dS(\mu)}{\partial S_i} = \left[\oint_{B_i} \frac{\partial dS(\lambda)}{\partial V(\mu)} d\lambda \right] d\mu = \oint_{B_i} \frac{\partial dS(\mu)}{\partial V(\lambda)} d\lambda, \quad (2.25)$$

где *оба* интегрирования производятся по переменной λ . Теперь поскольку $dS(\lambda) = y(\lambda) d\lambda$ представляет собой производящую функцию для переменных $\xi_a \equiv \{\{b_i\}, \{\mu_\alpha\}, M_\alpha^{(i)}\}$, заданных формулами (1.24) и (1.29) (напомним, что $M_\alpha^{(i)}$ суть просто производные $(i-1)$ -го порядка от $M(\lambda)$ при $\lambda = \mu_\alpha$), рассматривая их зависимость от S_i и t_k , можно заключить, что аналогичное соотношение на первые производные остается справедливым для каждой из этих переменных *в отдельности*. В самом деле, умножая (2.25) на $1/y(\mu)$ и вычисляя интеграл по переменной μ по контуру $\mathcal{C}_{\mu_j}$ вокруг точки ветвления, получим соотношение

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial S_i} = \oint_{B_i} \frac{\partial \mu_j}{\partial V(\lambda)} d\lambda.$$

Если же умножить (2.25) на $1/(y(\mu)(\mu - \mu_j)^k)$ и произвести такое же интегрирование, то получится аналогичное соотношение на момент $M_i^{(k)}$. То есть для любой “локальной” переменной ξ_a имеем:

$$\frac{\partial \xi_a}{\partial S_i} = \oint_{B_i} \frac{\partial \xi_a}{\partial V(\lambda)} d\lambda, \quad (2.26)$$

что остается справедливым для *произвольной* функции, зависящей от *конечного* числа “локальных” переменных ξ_a в случае произвольного потенциала. (Например, это не выполнено для S_j , для которых $\partial S_j / \partial S_i = \delta_{i,j}$, в то время как $\partial S_j / \partial V(\lambda) \equiv 0$. Однако *невозможно* представить S_i как функцию от *конечного* числа “локальных” переменных ξ_a , а само определение S_i содержит интегрирование по циклу A_i , которое будет несовместно с интегрированием по циклу B_i в формуле (2.26).)

В разделе 3 ниже показано, что свободную энергию $\mathcal{F}_h$ в произвольном порядке $1/N$ -разложения можно задать в виде функции, зависящей лишь от конечного числа локальных переменных, которые включают в себя точки ветвления μ_i и конечный набор моментов $M_i^{(p)}$. При этом можно выразить $W_h(\lambda)$

исключительно в терминах конечного числа производных

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial V(\lambda)} \quad \text{и} \quad \frac{\partial M_i^{(p)}}{\partial V(\lambda)},$$

что даст:

$$\frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial S_i} = \oint_{B_i} \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial V(\lambda)} d\lambda = \oint_{B_i} W_h(\lambda) d\lambda \quad \forall h \quad \text{и} \quad i = 1, \dots, g, \quad (2.27)$$

вместе с условием

$$\oint_{A_i} \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial V(\lambda)} d\lambda \equiv \oint_{A_i} W_h(\lambda) d\lambda = 0 \quad \forall h \geq 1 \quad \text{и} \quad i = 1, \dots, g, \quad (2.28)$$

вытекающим непосредственно из нормировочных условий (2.2).

Таким же образом можно получить определяющее соотношение для производной относительно t_0 :

$$\frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial t_0} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial V(\xi)} d\xi, \quad (2.29)$$

которое снова выполнено при любом h и требует регуляризации только при $h = 0$ (старшие поправки по h регулярны на бесконечности).

3. Поправки старших родов

3.1. Итеративное решение петлевого уравнения.

Обращение интегрального оператора. Найдём теперь поправки старших родов. Для этого с помощью итераций будем обращать петлевое уравнение (1.15) в разложении по родам. Стратегия состоит в том, чтобы построить интегральный оператор $\widehat{d\mathcal{E}}$, обратный интегральному оператору $\widehat{K} - 2W_0(\lambda)$. Эта процедура сохраняет свою справедливость также и в разделе 5 в случае модели собственных значений, или бета-модели.

Применяя этот, уже построенный, оператор к обеим частям петлевого уравнения (1.15), можно рекуррентно получить $W_h(\lambda)$ во всех родах подобно тому, как все многочленные резольвенты того же рода могут быть получены из $W_h(\lambda)$ простым применением оператора вставки петли $\frac{\partial}{\partial V(\lambda)}$. Другой составляющий элемент конструкции как раз и будет состоять в описании действия оператора вставки петли в рамках указанной техники.

Тем не менее имеется трудность: оператор $\widehat{K} - 2W_0(\lambda)$ имеет нулевые моды и в общем случае не обратим. Тем самым решение петлевого уравнения определено с точностью до произвольной комбинации этих нулевых мод. Более того, в присутствии жестких стенок ядро $\widehat{d\mathcal{E}}$ не совпадает с ядром оператора $\widehat{K} - 2W_0(\lambda)$, что требует специального исследования.

Из представления (1.18), (1.22) следует, что действие $\widehat{K} - 2W_0$ на $W_h(\lambda)$ имеет вид

$$\begin{aligned} (\widehat{K} - 2W_0(\lambda))W_h(\lambda) &= [V'(\lambda)W_h(\lambda)]_- - (V'(\lambda) - y(\lambda))W_h(\lambda) \\ &= [V'(\lambda)W_h(\lambda)]_- - [(V'(\lambda) - y(\lambda))W_h(\lambda)]_- \\ &= [y(\lambda)W_h(\lambda)]_-. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Покажем теперь, что интегральный оператор

$$\widehat{d\mathcal{E}}(f) d\lambda \equiv \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\mu}{2\pi i} dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda) \frac{1}{y(\mu)} \cdot f(\mu) \quad (3.2)$$

с ядром $dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)$, заданным формулой (2.12), есть обратный для оператора $\widehat{K} - 2W_0(\lambda)$ в случае, когда последний действует на функциях, аналитичных в $\mathbb{C} \setminus \mathcal{D}$ и имеющих нулевые интегралы по A -циклам. Интегрирование в формуле (3.2) производится вдоль контура $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ на физическом листе. В самом деле, представляя $f(\mu)$ в виде (3.1), получим:

$$\begin{aligned} & \oint_{\lambda > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{d\lambda} \frac{1}{y(\mu)} [y(\mu)W_h(\mu)]_- \\ &= \oint_{\lambda > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{d\lambda} \frac{1}{y(\mu)} (y(\mu)W_h(\mu) - P_{m-2}(\mu)) \\ &= \oint_{\lambda > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{d\lambda} \left(W_h(\mu) - \frac{P_{m-2}(\mu)}{y(\mu)} \right) \\ &= W_h(\lambda) + \oint_{\mathcal{C}_{\infty+}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{d\lambda} W_h(\mu) - \oint_{\lambda > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{d\lambda} \frac{P_{m-2}(\mu)}{y(\mu)}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

где $P_{m-2}(\mu)$ – некоторый многочлен. Напомним, что неравенство $\lambda > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ означает то, что точка λ лежит вне контура интегрирования на физическом листе, так что при стягивании контура интегрирования на ∞_+ в первый интеграл вклад дается только вычетом при $\mu = \lambda$, и ввиду условий нормировки этот вычет в точности равен $W_h(\lambda)$. Остающийся интеграл на бесконечности равен нулю, поскольку подынтегральное выражение регулярно при $\mu \rightarrow \infty$. Далее, в силу явной формулы (2.12) можно увидеть, что так как последний член представляет собой просто рациональную функцию на физическом листе, регулярную в точках ветвления, интегрируя ее по $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$, мы очевидно получим нуль, так что все действие оператора $\widehat{d\mathcal{E}}$ на $(\widehat{K} - 2W_0)W_h(\lambda)$ в итоге воспроизведет $W_h(\lambda)$.

Так как обе функции $W_h(\lambda)$ и $y(\lambda)$ нечетны относительно инволюции $\lambda \rightarrow \bar{\lambda}$, меняющей местами физический и нефизический листы, можно заключить, что комбинация $y(\lambda)W_h(\lambda)$, будучи четной функцией при этой инволюции, представляет собой мероморфную функцию на физическом листе, т.е. рациональную функцию с полюсами только в точках ветвления и на бесконечности. Отсюда следует, что при действии на $[y(\mu)W_h(\mu)]_-$ интегрирование по $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ в формуле (3.2) можно заменить на простое взятие вычетов в точках ветвления $\mu = \mu_i$, что дает

$$\widehat{d\mathcal{E}}(f)(\lambda) d\lambda \equiv \widehat{d\mathcal{E}}_{\lambda, \mu} f(\mu) d\lambda = \sum_{i=1}^{2n} \oint_{\mathcal{C}_{\mu_i}} \frac{d\mu}{2\pi i} dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda) \frac{1}{y(\mu)} \cdot f(\mu), \quad (3.4)$$

где $\mathcal{C}_{\mu_i}$ обозначает контур вокруг соответствующей точки ветвления.

Ввиду того, что оператор $\widehat{d\mathcal{E}}$ удовлетворяет свойству

$$\oint_{A_i} \widehat{d\mathcal{E}}(f)(\lambda) d\lambda \equiv 0, \quad (3.5)$$

он также удовлетворяет условию интегрируемости (2.28).

Условия согласования. Заметим, что теперь, в отличие от случая, когда жесткие стенки отсутствуют, содержание нулевых мод операторов $\widehat{K} - 2W_0$ и $\widehat{d\mathcal{E}}$ оказывается различным.

Из представления (3.1) ясно, что нулевые моды оператора $\widehat{K} - 2W_0$ при действии на функциях $W_h(\lambda)$ с асимптотическим поведением (1.16) исчерпываются функциями $P_{\frac{s-t}{2}-2}(\lambda)/\tilde{y}(\lambda)$ и образуют линейное пространство размерности $\frac{s-t}{2} - 1$. В дополнение, *все функции с простыми полюсами*, пропорциональными $\frac{1}{\lambda - a_\beta}$, обращаются в нуль под действием оператора $\widehat{d\mathcal{E}}$. В совокупности это даст (в случае $s > t$) полное пространство нулевых мод размерности $\frac{s-t}{2} - 1 + t = n - 1 = g$, и полное число нулевых мод при действии комбинации операторов $\widehat{d\mathcal{E}} \circ (\widehat{K} - 2W_0)$ тем самым равно числу g абелевых дифференциалов, в то время как свобода добавления таких дифференциалов полностью фиксирована условиями нормировки (2.28).

Главное наблюдение состоит в том, что под действием оператора $\widehat{d\mathcal{E}}$ на обе части петлевого уравнения (1.15) члены с частными производными от $\mathcal{F}_h$ по переменным a_β аннулируются, действие оператора $\widehat{K} - 2W_0$ на $W_h(\lambda)$ обращается и полученное выражение имеет простой вид:

$$W_h(\lambda) = \widehat{d\mathcal{E}}_{\lambda, \mu} \left(\sum_{h'=1}^{h-1} W_{h'}(\mu) W_{h-h'}(\mu) + \frac{\partial}{\partial V(\mu)} W_{h-1}(\mu) \right), \quad (3.6)$$

где величины $W_h(\lambda)$ теперь автоматически удовлетворяют условиям нормировки (2.28).

Из свойств оператора $\widehat{d\mathcal{E}}$ следует, что для всех $s > 0$ при $h > 0$ и для $s \geq 3$ при $h = 0$ s -точечная резольвента $W_h(\lambda_1, \dots, \lambda_s)$ имеет градуировку относительно инволюции между переменными физического и нефизического листов:

$$W_h(\lambda_1, \dots, \lambda_j, \dots, \lambda_s) = -W_h(\lambda_1, \dots, \bar{\lambda}_j, \dots, \lambda_s). \quad (3.7)$$

В частности, $W_h(\lambda, \lambda)$, равно как и любое произведение $W_h(\lambda)W_{h'}(\lambda)$ в правой части (3.6), при этом оказываются рациональными функциями от λ при всех $h, h' > 0$. Более того, $W_0(\lambda, \lambda) = B(\lambda, \bar{\lambda})$ также оказывается рациональной функцией от λ с полюсами второго порядка в точках $\lambda = \mu_i$ слияния двух листов.

Однако для того, чтобы было справедливым исходное петлевое уравнение (1.15), а не только (3.6), необходимо потребовать выполнения дополнительных условий, которым должна удовлетворять свободная энергия матричной модели. В отличие от условий (2.27), которые выполнены для произвольной функции от локальных переменных, эти новые условия могут в принципе накладывать ограничения; в самом деле, части петлевого уравнения (1.15), пропорциональные $\frac{1}{\lambda - a_\beta}$, должны совпадать. То есть построенные петлевые средние $W_h(\lambda)$

должны удовлетворять условию

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial a_\beta} &= \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}} \frac{d\xi}{2\pi i} \left(-[y(\xi)W_h(\xi)]_- + \sum_{h'=1}^{h-1} W_{h'}(\xi)W_{h-h'}(\xi) + \frac{\partial}{\partial V(\xi)} W_{h-1}(\xi) \right) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}} \frac{d\xi}{2\pi i} \left(-y(\xi)W_h(\xi) + \sum_{h'=1}^{h-1} W_{h'}(\xi)W_{h-h'}(\xi) + \frac{\partial}{\partial V(\xi)} W_{h-1}(\xi) \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

(так как вычет при $\xi = a_\beta$ от положительной части $[y(\xi)W_h(\xi)]_+$ очевидно зануляется).

Решим теперь модифицированное петлевое уравнение (3.6) рекуррентно с последующим интегрированием, что даст в итоге член разложения свободной энергии $\mathcal{F}_h$. Проверку выполнения условий (3.8) отложим до п. 3.3. Заметим снова, что наложение двух классов нормировочных условий (2.27) и (3.8) не оставляет никакой свободы в добавлении членов, не зависящих от $V(\xi)$ и зависящих вместо этого только от S_i , t_0 или от a_β .

Графическое представление. Вышеприведенные рассуждения обеспечивают базу для построения *диаграммного представления* для резольвенты, вне зависимости от присутствия или отсутствия жестких стенок (см. [44], [46]).

Фейнмановским диаграммным представлением для какой-либо теории обычно называется графическое представление членов ряда теории возмущений для s -точечной корреляционной функции или для свободной энергии, которые задаются совокупностью диаграмм – связанных графов, число внешних концов которых (висячих вершин) равно s (или нулю в случае свободной энергии), число петель равно порядку приближения, ребра графа отвечают *пропагаторам* полей (обычно это функции Грина линеаризованной (свободной) задачи), а вершины – членам взаимодействий полей. Очень часто в вершинах производится интегрирование по некоторому пространству (обычно импульсному) с некоторой мерой. Если в теории имеются различные поля и различные типы взаимодействий, то каждому полю и каждому типу взаимодействий будут отвечать свои пропагаторы и вершины.

Представим 1-форму $dE_{q,\bar{q}}(p)$ в виде вектора (направленного ребра), направленного из p в q , трехвалентную вершину представим в виде жирной точки, в которой предполагается интегрирование по q , $\bullet \equiv \oint \frac{dq}{2\pi i} \frac{1}{2y(q)}$, а бергмановский бидифференциал $B(p, q)$ обозначим с помощью ненаправленного ребра, связывающего точки p и q . Графическое представление для решения уравнения (3.6) будет иметь при этом следующий вид. Представляя многоточечную резольвенту $W_{h'}(p_1, \dots, p_s)$ в виде блока с s внешними хвостами, несущего индекс h' , получим [44]:

$$\lambda \text{---} (h) = \sum_{h'=1}^{h-1} \lambda \text{---} \bullet \begin{matrix} \text{---} (h-h') \\ \text{---} (h') \end{matrix} + \lambda \text{---} \bullet \text{---} (h-1) \quad (3.9)$$

Построение диаграммной техники также требует вычисления действия оператора вставки петли $\partial/\partial V(r)$ на ее элементарные составляющие, что будет продемонстрировано, следуя работе [45].

Вычислим сначала действие $\partial/\partial V(r)$ на $B(P, Q)$, что приведет к аналогу формулы (2.20). С использованием тождеств (2.4) это действие можно представить с помощью действия частных производных по μ_α ($\alpha = 1, \dots, s$; на этом этапе вклад дают только динамические точки ветвления), а затем можно вычислить последние с помощью соотношения (2.11). Пусть

$$y(x) dx \Big|_{x \rightarrow \mu_\alpha} = y([\mu_\alpha]) \sqrt{x - \mu_\alpha} dx + O(\sqrt{x - \mu_\alpha})^3 dx.$$

Тогда, поскольку

$$\frac{\partial y(p) dp}{\partial V(r)} \Big|_{p \rightarrow \mu_\alpha} \simeq -\frac{1}{2} y([\mu_\alpha]) \frac{dp}{\sqrt{p - \mu_\alpha}} \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial V(r)},$$

получим:

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial V(r)} = \frac{2B([\mu_\alpha], r)}{y([\mu_\alpha])}, \quad (3.10)$$

и, таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial V(r)} B(p, q) = \sum_{\alpha=1}^s \frac{B(p, [\mu_\alpha]) B(q, [\mu_\alpha]) B(r, [\mu_\alpha])}{y([\mu_\alpha])}. \quad (3.11)$$

Это выражение представляет собой не что иное, как производящее соотношение для формулы (2.20) в случае, когда все переменные с индексами I, J, K суть времена потенциала.

Мы теперь, однако, представим выражение (3.11) в другом виде. Вместо того, чтобы дифференцировать функцию $y(\xi)$ в знаменателе, как было сделано в формуле (2.20), можно проинтегрировать одно из бергмановских ядер, что порождает 1-дифференциал $dE_{\xi, \bar{\xi}}(q)$. Заметим, что локальная переменная в окрестности μ_α есть $\xi(x) = \sqrt{x - \mu_\alpha}$, это дает дополнительный множитель $1/2$, и в итоге придем к соотношению

$$\frac{\partial}{\partial V(r)} B(p, q) = \sum_{\alpha=1}^s \operatorname{res}_{\xi=\mu_\alpha} \frac{B(p, \xi) dE_{\xi, \bar{\xi}}(q) B(r, \xi)}{2y(\xi) d\xi},$$

причем в этом выражении мы свободны *добавить* вычеты в точках жестких стенок a_β , поскольку они просто зануляются в данном случае, так что окончательное выражение имеет вид

$$\frac{\partial}{\partial V(r)} B(p, q) = \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{res}_{\xi=\mu_i} \frac{B(p, \xi) dE_{\xi, \bar{\xi}}(q) B(r, \xi)}{2y(\xi) d\xi}. \quad (3.12)$$

Цена, заплаченная за сохранение $y(\xi) d\xi = dS(\xi)$ в знаменателе этой формулы, состоит в том, что утеряна явная перестановочная симметрия для трех членов в числителе – симметрия, которая была очевидна в формуле (2.20). Тем не менее, представляется возможным заплатить эту цену за возможность развить

согласованную диаграммную технику. Из этого соотношения также очевидно следует, что

$$\frac{\partial}{\partial V(r)} dE_{p,\bar{p}}(q) = \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{res}_{\xi=\mu_i} \frac{dE_{p,\bar{p}}(\xi) dE_{\xi,\bar{\xi}}(q) B(r, \xi)}{2y(\xi) d\xi}, \quad (3.13)$$

и самое последнее выражение, которое нам необходимо – это

$$\frac{\partial}{\partial V(r)} \frac{1}{2y(p)} = -\frac{B(p, r)}{2y^2(p)}. \quad (3.14)$$

Заметим, что точка p в (3.13) лежит снаружи контура интегрирования. Умножая обе части уравнения (3.13) на $1/(2y(p))$, используя (3.14) и перебирая контур интегрирования через точку p , получим, что вклад от простого полюса формы $dE_{p,\bar{p}}(\xi)$ в точке $\xi = p$ в точности сокращает вариацию (3.14) комбинации $1/(2y(P))!$. Поэтому мы можем расположить контур интегрирования по переменной ξ *снаружи* контура для переменной p и графически представить действие оператора $\partial/\partial V(r)$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V(r)} q \longrightarrow p &= q \longrightarrow \overset{\overset{r}{\downarrow}}{\bullet} \longrightarrow p, \\ \frac{\partial}{\partial V(r)} q \longrightarrow p &= q \longrightarrow \overset{\overset{r}{\downarrow}}{\bullet} \longrightarrow p \equiv q \longrightarrow \overset{\overset{r}{\downarrow}}{\bullet} \longrightarrow p, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где стрелки на диаграммах теперь одновременно указывают *порядок* взятия вычетов. При этом диаграмма содержит подграф в виде направленного дерева: этот подграф устанавливает естественное отношение частичного упорядочения на множестве вершин.

Во втором случае в формуле (3.15) имеется свобода выбора, на какое из ребер поместить стрелку. Мы зафиксируем эту свободу, потребовав, чтобы каждое ненаправленное ребро соединяло только такие точки p и q , которые были бы взаимно упорядочены. Чтобы это условие сохранялось, в выражении (3.15) необходимо выбрать первый вариант распределения стрелок, если “ P предшествует Q ”, и второй вариант, если “ Q предшествует P ”.

Теперь легко интерпретировать действие оператора вставки петли с точки зрения теории форм. Обозначив стандартным образом через $\Omega_{1,0}^k$ пространство симметризованных мероморфных 1-дифференциалов от k переменных $dp_1, \dots, dp_k$ на римановой поверхности Σ_g , мы можем естественным образом считать, что оператор $\partial/\partial V$ повышает степень формы на единицу:

$$\frac{\partial}{\partial V} : \Omega_{1,0}^k \mapsto \Omega_{1,0}^{k+1}. \quad (3.16)$$

На множестве $W_k^h(p_1, \dots, p_k)$ симметризация достигается автоматически.

Диаграммная техника. Сформулируем теперь набор правил диаграммной техники, впервые введенных в работе [44] для простейшего случая 1ММ; эти правила оказались тем не менее весьма общими: с небольшими модификациями они остаются справедливыми и в модели собственных значений (бета-модели), и в случае двухматричной модели.

Многоточечная резольвента $W_h(p_1, \dots, p_r)$ задается конечной совокупностью *всех возможных* связных графов с h петлями и r внешними хвостами таких, что выполняются следующие условия.

- (а) Допускаются только трехвалентные вершины (при этом диаграмма содержит $2r + 3h - 3$ ребер и $r + 2h - 2$ вершин и предполагается, что $r \geq 1$ при $h \geq 1$ и $r \geq 3$ при $h = 0$); всем вершинам соответствуют координатные переменные q_i , $i = 1, \dots, r + 2h - 2$, заданные на римановой поверхности $\hat{y}(\lambda)$.
- (б) Пропагаторы (ребра) или соединяют между собой вершины (могут начинаться и кончаться в той же самой вершине), или приходят как внешний хвост в одну из внутренних вершин. Имеется два сорта пропагаторов: *направленные* пропагаторы, которым отвечают 1-формы $dE_{q, \bar{q}}(p)$, и *ненаправленные* пропагаторы, которым отвечают бергмановские бидифференциалы $B(p, q)$ в случае двух различных вершин с индексами p и q ; для одной и той же вершины имеем $B(p, \bar{p})$.
- (с) Распределение пропагаторов подчиняется ограничению. Имеется ровно $2k + r - 2$ направленных ребер; они обязаны образовывать *максимальный корневой подграф типа дерева*, в котором *все стрелки направлены от корня*. Различные вложения такого подграфа в один и тот же граф рассматриваются как различные случаи диаграммной техники, и необходимо рассмотреть все возможные случаи. Корень дерева всегда представляет собой фиксированную (раз и навсегда, для всех диаграмм) *внешнюю* линию, например, p_1 (ее выбор произволен ввиду симметрии $W_k(p_1, \dots, p_r)$), а максимальность древесного подграфа означает, что он не содержит петель (включая пустые петли; таким образом, направленные пропагаторы не могут начинаться и кончаться в той же самой вершине), связан, и для каждой вершины найдется ровно один направленный пропагатор, оканчивающийся в этой вершине. Будем называть такой пропагатор *входящим* пропагатором для данной вершины. Внутренней вершине графа могут соответствовать один, два или ни одного *выходящего* направленного пропагатора.
- (д) Каждый древесный подграф устанавливает отношение *частичного упорядочения* на множестве вершин графа: среди двух вершин одна *предшествует* другой, если существует естественным образом ориентированный путь в корневом древесном подграфе, который начинается в первой вершине и заканчивается во второй. В каждой внутренней вершине производится интегрирование $\oint_{\mathcal{C}_\varphi^{(q)}} \frac{dq}{2\pi i} \frac{1}{2y(q)}$ по переменной, маркирующей данную вершину; интегрирование производится по контуру, окружающему область собственных значений $\mathcal{D}$, а *размещение* контуров интегрирования, отвечающих различным вершинам, задается корневым деревом: чем ближе вершина к корню, тем более внешним будет ее контур интегрирования.
- (е) Все внутренние ненаправленные пропагаторы могут соединять *только* вершины, находящиеся в отношении порядка одна относительно другой; это может быть одна и та же вершина. Все внешние пропагаторы, кроме корня дерева, не содержат стрелок, и им отвечают бергмановские бидифференциалы $B(q, p_k)$ ($k = 2, \dots, r$) соответствующих ребер. Так

как не существует пропагаторов, соединяющих несравнимые вершины, то взаимное расположение контуров интегрирования в таких вершинах несущественно.

- (f) Все контуры интегрирования по A -циклам в формуле (2.12) для $dE_{\mu,\bar{\mu}}(\lambda)$ предполагаются лежащими вне всех контуров интегрирования по переменным, маркирующим внутренние вершины, в то время как предполагается, что все внешние точки p_i , $i = 1, \dots, s$, находятся вне всех контуров интегрирования $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(q)}$ (их положение относительно контуров интегрирования по A -циклам не играет роли, так как резольвенты представляют собой 1-дифференциалы относительно переменных p_k , которые корректно определены на Σ_g и не испытывают скачков при пересечении A -циклов на римановой поверхности).

3.2. Обращение оператора вставки петли. Свободная энергия.

H -оператор. Введем теперь оператор (функционал на 1-формах), который окажется обратным к оператору вставки петли (1.6). Для формы $df(x)$ пусть⁷

$$\begin{aligned} H_x df(x) &= \frac{1}{2} \operatorname{res}_{\infty_+} V(x) df(x) - \frac{1}{2} \operatorname{res}_{\infty_-} V(x) df(x) \\ &\quad - t_0 \int_{\infty_-}^{\infty_+} df(x) - \sum_{i=1}^{n-1} S_i \oint_{B_i} df(x). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Размещение контуров интегрирования здесь такое же, как и на рис. 2.

Таким образом, H -оператор, в противоположность оператору вставки петли, уменьшает степень (симметризованной) формы:

$$H: \Omega_{1,0}^k \mapsto \Omega_{1,0}^{k-1}. \quad (3.18)$$

Вычислим действие оператора H на бергмановский бидифференциал $B(x, q)$, снова применяя билинейные тождества Римана. Отметим сначала, что поскольку $B(x, q) = \partial_x dE_{x,q_0}(q)$, то вычеты на бесконечностях можно вычислять по частям. Тогда, в силу регулярности $dE_{x,q_0}(q)$ на бесконечности, можно подставить $2y(x) + 2t_0/x$ вместо $V'(x)$ при $x \rightarrow \infty_+$ и $-2y(x) + 2t_0/x$ вместо $V'(x)$ при $x \rightarrow \infty_-$, получив таким образом

$$\begin{aligned} & - \operatorname{res}_{\infty_+} \left(y(x) + \frac{t_0}{x} \right) dE_{x,q_0}(q) dx + \operatorname{res}_{\infty_-} \left(-y(x) + \frac{t_0}{x} \right) dE_{x,q_0}(q) dx \\ & - t_0 dE_{x,q_0}(q) \Big|_{x=\infty_-}^{x=\infty_+} - \sum_{i=1}^{n-1} S_i \oint_{B_i} B(q, x). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Теперь сокращение членов, содержащих t_0 , представляется очевидным, и остается только найти комбинацию вычетов на бесконечностях, содержащую $y(x)$. Для этого разрежем поверхность вдоль A - и B -циклов, учитывая вычет при

⁷Это определение хорошо работает при действии на 1-формы, регулярные на бесконечностях. В противном случае (например, в случае $W_0(p)$) интеграл в третьем члене должен быть регуляризован с помощью замены его на интеграл вдоль контура C_L , изображенного на рис. 2.

$x = q$. Граничные интегралы по обоим краям разреза при B_i при этом отличаются на $dE_{x,q_0}(q) - dE_{x+\oint_{A_i},q_0}(q) = 0$, в то время как интегралы по обоим краям разреза при A_i отличаются на

$$dE_{x,q_0}(q) - dE_{x+\oint_{B_i},q_0}(q) = \oint_{B_i} B(q, x),$$

и граничный член тем самым дает вклад

$$\sum_{i=1}^{n-1} \oint_{A_i} y(x) dx \oint_{B_i} B(q, \xi),$$

который в точности сокращается с последним членом в выражении (3.19). Остается только вклад полюса при $x = q$, который равен $-y(q)$. Таким образом, доказано, что

$$H_x \cdot B(x, q) = -y(q) dq. \quad (3.20)$$

Свободная энергия. Подействуем теперь оператором H_x на $W_k(x)$ с последующим действием оператора вставки петли (1.6) на результат. Отметим сначала, что единственным результатом действия $\partial/\partial V(p)$ на сам оператор H_x будут производные $\partial V(x)/\partial V(p) = -1/(p - x)$ (и напомним, что по определению $|p| > |x|$, т.е. вместо вычисления вычетов на бесконечности при этом необходимо брать вычет в точке $x = p$), что дает:

$$\frac{\partial}{\partial V(p)} (H_x \cdot W_h(x)) = W_h(p) + H_x \cdot W_h(x, p). \quad (3.21)$$

Для второго члена, ввиду симметрии резольвенты $W_h(p, q)$, можно теперь выбрать в качестве корня всех древесных подграфов точку p . Тогда оператор H_x всегда будет действовать на $B(x, \xi)$, где ξ – переменные интегрирования внутренних вершин. Однако если эта вершина самая внутренняя (т.е. у нее нет выходящих направленных ребер), то 1-форма $y(\xi) d\xi$, возникающая при действии оператора H_x (3.20), сокращает соответствующую 1-форму в знаменателе подынтегрального выражения, которое тем самым становится регулярным в точке ветвления и дает нуль при взятии вычета. Если у данной вершины имеется выходящее направленное ребро, например $dE_{\rho, \bar{\rho}}(\xi)$ (может быть не более одного выходящего направленного ребра, так как третье ребро обязано быть внешним), то можно снова протащить контур интегрирования для ξ через контур для ρ ; единственный вклад при этом возникает от полюса при $\xi = \rho$. Но в этом случае значение вычета *удваивается*, и мы приходим к следующему графическому представлению для действия оператора H_x :

$$\begin{array}{c} H_x \\ \downarrow \\ Q \longrightarrow P \end{array} = - \quad Q \longrightarrow P ; \quad \begin{array}{c} H_x \\ \downarrow \\ Q \longrightarrow P \end{array} = 0. \quad (3.22)$$

Для $H_x \cdot W_k(x, p) = H_x \cdot \frac{\partial}{\partial V(x)} W_k(p)$ получим, что для каждого *направленного* ребра, действие вставки петли $\partial/\partial V(x)$ на котором порождает новую вершину, обратное действие H_x просто дает множитель -1 , а для каждого *ненаправленного* ребра, действие $\partial/\partial V(x)$ на котором порождает новую вершину, обратное

действие H_x дает нуль. Так как полное число направленных ребер равно в точности $2h - 1$ для каждого графа, дающего вклад в совокупность диаграмм с одним внешним хвостом и содержащих h петель, получим:

$$H_x \cdot W_h(x, p) = -(2h - 1)W_h(p).$$

Таким образом, объединяя эту формулу с (3.21), получим, что

$$\frac{\partial}{\partial V(p)}(H_x \cdot W_h(x)) = -(2 - 2h)\frac{\partial}{\partial V(p)}\mathcal{F}_h, \quad (3.23)$$

и в предположении, что вся зависимость от чисел заполнения и t_0 фиксируется требованием того, чтобы ответ зависел только от μ_i и от производных $M(p)$ конечного порядка (предположение *локальности*), приходим к окончательному ответу:

$$\mathcal{F}_h = \frac{1}{2h - 2}H_x \cdot W_h(x). \quad (3.24)$$

Таким образом, нам удалось выразить свободную энергию через одноточечную резольвенту. Применяя этот окончательный ответ, мы можем найти все $\mathcal{F}_h$, кроме вклада при $h = 1$ (приближение тора). В случае без жестких стенок этот член был вычислен с помощью прямого интегрирования в работе [42] (улучшенную версию вычислений см. в работе [36]), а в работе [46] был получен ответ для 1ММ в присутствии жестких стенок. Эти вычисления частично воспроизводятся в разделе 4. Все прочие порядки можно вычислить согласованным образом. Для этого введем новую вершину $\circ$, в которой поместим новый интегральный член:

$$\circ \sim \oint_{\mathcal{C}_{\{\mu_i\}}^{(\xi)}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{\int_{\xi}^{\xi} y(s) ds}{2y(\xi)}, \quad (3.25)$$

где все интегрирование происходит в окрестности соответствующей точки ветвления. Это возможно сделать, поскольку, хотя интегральный член $\int_{q_0}^{\xi} y(s) ds$ и нелокален, его постоянная составляющая $\int_{q_0}^{\mu_i} y(s) ds$ обладает противоположными свойствами при инволюции (3.7), а потому выпадает при вычислении вычета в случае 1ММ, так что мы можем ограничиться интегрированием только лишь в окрестности каждой точки ветвления μ_i по отдельности. Поэтому при реальных вычислениях нам достаточно знать лишь конечное число членов локального разложения этого интеграла при $\xi \rightarrow \mu_i$. Тогда, например, вклад рода два будет даваться суммой трех диаграмм:

$$2 \cdot \mathcal{F}_2 = 2 \cdot \text{diagram 1} + 2 \cdot \text{diagram 2} + \text{diagram 3}, \quad (3.26)$$

и для его вычисления достаточно знать производные $M(\mu)$ в точках ветвления до третьего порядка включительно.

Заметим также, что член $\mathcal{F}_0$, представленный в виде (1.47), также может быть очевидно представлен как

$$\mathcal{F}_0 = -\frac{1}{2}H_x^{\text{reg}} \cdot W_0(x) \quad (3.27)$$

в силу условий (1.43) и (1.44) и ввиду справедливости соотношений (2.27) и (2.29). Напомним, что в случае члена $\mathcal{F}_0$ интеграл между ∞_- и ∞_+ должен быть регуляризован в соответствии с процедурой п. 1.5. Действие же $H_x \cdot W_1(x)$, как было показано в работе [46], просто дает константу, равную $(2s/3 + 2t)/4$.

Масштабирующее соотношение. Проясним теперь природу соотношения (3.23). В самом деле, вспомним, что любая функция $\mathcal{F}$ от конечного числа “локальных” переменных, которыми в нашем случае являются точки ветвления μ_i и моменты $M_i^{(k)}$, удовлетворяет соотношениям (2.27) и (2.29), утверждающим, что

$$\oint_{B_i} \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial V(\xi)} d\xi = \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial S_i} \quad \text{и} \quad \int_{\infty_-}^{\infty_+} \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial V(\xi)} d\xi = \frac{\partial \mathcal{F}_h}{\partial t_0}.$$

Соотношение (3.23) при этом эквивалентно формуле

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty} t_k \frac{\partial}{\partial t_k} + t_0 \frac{\partial}{\partial t_0} + \sum_{i=1}^{n-1} S_i \frac{\partial}{\partial S_i} + \hbar \frac{\partial}{\partial \hbar} \right] \mathcal{F} = 0, \quad (3.28)$$

выражающей простое (“кинематическое”) свойство *любого* интеграла вида (1.1). Действительно, зафиксируем полное число собственных значений равным N и парциальные фракции собственных значений на интервалах распределения равными N_i . Тогда $t_0 = \hbar N$, $S_i = \hbar N_i$ и еще имеется экспоненциальный член $\frac{1}{\hbar} \sum_k t_k \operatorname{tr} X^k$. Если держать фиксированными N , N_i и все комбинации $t_k/\hbar$ и масштабировать *только* формальный параметр разложения $\hbar$, то мы немедленно придем к уравнению (3.28).

Заметим, что в случае 1ММ без жестких стенок оператор в формуле (3.28) также имеет интерпретацию масштабирующего преобразования, при котором все вершины умножаются на один и тот же множитель ρ , а все пропагаторы умножаются на ρ^{-1} . Действие производных по t_0 и S_i сводится к умножению всех петель индексов (граней ленточного графа) на ρ . Таким образом, для произвольного графа полный множитель равен

$$\rho^{\# \text{вершин} - \# \text{ребер} + \# \text{граней}} = \rho^{2-2h},$$

и этот множитель (эйлерова характеристика соответствующей римановой поверхности в исходном описании 'т Хофта [1]) в точности сокращается при масштабировании $\hbar \rightarrow \rho \hbar$ формального параметра разложения. В присутствии жестких стенок все еще можно пытаться использовать это соотношение, которое, будучи не зависящим от формы потенциала, может быть продолжено и на сингулярные потенциалы типа жестких стенок, если рассматривать последние как предельные случаи регулярных (конечных) потенциалов.

3.3. Доказательство условий согласования для $h \geq 2$. Условие согласования для $h = 0$ удовлетворяется по построению. Мы произведем проверку этих условий для случая $h = 1$ в следующем разделе, а здесь рассмотрим только случай $h \geq 2$, в котором нам теперь известно явное выражение для свободной энергии $\mathcal{F}_h$.

Оператор D_β . Введем в рассмотрение оператор

$$D_\beta = \frac{\partial}{\partial a_\beta} - \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\xi)}} \frac{d\xi}{2\pi i} y(\xi) \frac{\partial}{\partial V(\xi)}. \quad (3.29)$$

Условие согласования (3.8) можно проверить только с точностью до функций, зависящих исключительно от a_β . Поэтому технически намного удобнее выделить сначала оператор D_β (3.29), после чего условия согласования принимают вид

$$D_\beta \mathcal{F}_h = \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\xi)}} \frac{d\xi}{2\pi i} \left(\sum_{h'=1}^{h-1} W_{h'}(\xi) W_{h-h'}(\xi) + W_{h-1}(\xi, \xi) \right), \quad h > 0, \quad (3.30)$$

и $D_\beta \mathcal{F}_0 = 0$. Из последнего соотношения сразу следует, что

$$\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial a_\beta} = \operatorname{res}_{\xi=a_\beta} y^2(\xi). \quad (3.31)$$

Подействуем теперь на (3.30) оператором вставки петли $\partial/\partial V(p)$, что даст⁸

$$D_\beta W_h(p) = \oint_{p > \mathcal{C}_{a_\beta}^{(\xi)}} \frac{d\xi}{2\pi i} \left(2 \sum_{h'=1}^{h-1} W_{h'}(\xi, p) W_{h-h'}(\xi) + W_{h-1}(\xi, \xi, p) + B(p, \xi) W_h(\xi) \right). \quad (3.32)$$

Найдем сначала $D_\beta y(\lambda)$. Из (2.13) и (3.29) получим, что действия двух частей оператора D_β отличаются только знаками и упорядочением контуров относительно переменной λ в случае, когда λ лежит на той части контура интегрирования $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\lambda)}$, которая отвечает вычету в точке ветвления a_β . Перебрасывая контур интегрирования через λ , получим просто пространственную производную $\partial/\partial \lambda$, так что ответ имеет вид

$$D_\beta y(\lambda) = y'(\lambda) \quad \text{для } \lambda \in \mathcal{C}_{a_\beta}^{(\lambda)} \text{ и ноль в противном случае.} \quad (3.33)$$

Обозначим с помощью символа $\delta_{\beta,i}^{(\lambda)}$ проекцию из полного интегрирования по

$$\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}} \frac{d\lambda}{2\pi i} = \sum_{i=1}^{2n} \operatorname{res}_{\mu_i}$$

на интегрирование только вокруг $\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\lambda)}$. Тогда, например, символьная форма записи формулы (3.33) будет иметь вид: $D_\beta y(\lambda) = y'(\lambda) \delta_{\beta,i}^{(\lambda)}$.⁹

Рассмотрим теперь действие D_β на $B(\lambda, \mu)$. Для этого можно просто подействовать оператором $\partial/\partial V(\mu)$ на соотношение (3.33) с учетом коммутационных

⁸Операторы D_β и $\partial/\partial V(p)$ не коммутируют; при действии на $\mathcal{F}_h$ коммутатор этих двух операторов как раз порождает дополнительный член в правой части.

⁹В этих рассуждениях предполагается, что $y(\lambda)$ всегда рассматривается под знаком интеграла $\sum_{i=1}^{2n} \oint_{\mathcal{C}_{\mu_i}} \cdots f(y(\lambda), y'(\lambda), \dots) \cdots d\lambda$, где f – локальная функция от $y(\lambda)$ и, возможно, от (конечного числа) производных $y^{(k)}(\lambda)$.

Рис. 3. Контуры интегрирования по λ или μ (сплошная линия) и ξ (штриховая линия) в (3.35)

соотношений между D_β и оператором вставки петли, что в итоге дает (для $\lambda \in \mathcal{C}_{\mu_i}^{(\lambda)}$ и $\mu \in \mathcal{C}_{\mu_j}^{(\mu)}$)

$$\begin{aligned} D_\beta B(\lambda, \mu) &= \operatorname{res}_{\xi=a_\beta} \frac{B(\lambda, \xi) B(\mu, \xi)}{d\xi} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\xi)} > \{\lambda, \mu\}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{B(\lambda, \xi) B(\mu, \xi)}{d\xi} + \left(\delta_{\beta,i}^{(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \delta_{\beta,j}^{(\mu)} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) B(\lambda, \mu), \end{aligned} \quad (3.34)$$

где неравенство $\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\xi)} > \{\lambda, \mu\}$ утверждает, что если соответствующая переменная лежит на $\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\lambda)}$ или на $\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\mu)}$, то интегрирование по ξ должно быть внешним, см. рис. 3.

Второй способ представления в формуле (3.34) оказывается весьма удобным при вычислении действия на внутренние пропагаторы в диаграммах. В самом деле, так как D_β представляет собой линейный оператор, он действует отдельно на каждую составляющую диаграммы. Тогда легко видеть, что действие D_β на *каждый* из множителей $1/y(\lambda)$, стоящий при вершинах, вместе с членами $(\delta_{\beta,i} \partial_\lambda + \delta_{\beta,j} \partial_\mu) B(\lambda, \mu)$ и аналогичными членами $(\delta_{\beta,i} \partial_\lambda + \delta_{\beta,j} \partial_\mu) dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)$, возникающими при направленных пропагаторах, дает в совокупности полные производные при интегрировании по соответствующим переменным в *каждой* вершине, и эти вклады тем самым исчезают при интегрированииях по контурам $\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}^{(\lambda)}$ по переменным вершин.

Можно сформулировать действие оператора D_β на $W_h(p)$ следующим образом. Введем подстановку

$$\begin{array}{ccc} \xrightarrow{\lambda} \mu & \mapsto & \xrightarrow{\lambda} \bigotimes_{\xi} \mu; \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \xrightarrow{\lambda} \mu & \mapsto & \xrightarrow{\lambda} \bigotimes_{\xi} \mu, \end{array} \quad (3.35)$$

где вершина $\bigotimes$ содержит по определению интеграл

$$\oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\xi)} > \{\lambda, \mu\}} \frac{d\xi}{2\pi i}$$

по контуру, содержащему внутри себя точки λ и/или μ для тех участков интегрирования по этим переменным, которые гомеоморфны вычислению вычетов в точках a_β ; при вычислении вычетов в других точках ветвления $\mu_i \neq a_\beta$ контуры интегрирования по λ и/или по μ и по ξ расцеплены, см. рис. 3.

Сформулируем теперь действие D_β на полную резольвенту $W_h(p)$. Каждая диаграмма, построенная по правилам из п. 3.1, переходит под действием D_β в

совокупность диаграмм, в каждой из которых один из пропагаторов, направленный или ненаправленный, замещается согласно правилу (3.35).

Если мы обратимся к действию $\frac{\partial}{\partial V(p)} D_\beta \mathcal{F}_h$, то оно представляется *той же* совокупностью диаграмм, с тем исключением, что мы *не должны* помещать вставку $\otimes$ на корневой направленный пропагатор, поскольку действие D_β на него сокращается с последним членом в правой части формулы (3.32).

В следующем параграфе при проведении доказательства по индукции нам также потребуется представить действие второй производной $\frac{\partial^2}{\partial V(p) \partial V(q)} D_\beta \mathcal{F}_h$. При этом легко видеть, что ответ будет задаваться аналогичными правилами, но теперь нам необходимо исключить из набора допустимых диаграмм случаи, когда вставка $\otimes$ помещается на любой из пропагаторов с концами во внешних точках p и q , а также следует исключить диаграммы вида

(3.36)

Доказательство по индукции. Пусть условия (3.32) выполнены при всех $h' < h$.

Представим $\frac{\partial}{\partial V(p)} D_\beta \mathcal{F}_h$ графически в следующем виде:

(3.37)

Перед тем как двигаться дальше, рассмотрим второй член во второй строке выражения (3.37). Это – единственный “необычный” член, который не встречался ранее в диаграммной технике (все остальные члены состоят из некоторых наборов диаграмм, которые мы ожидаем встретить в левой части выражения (3.32)). Этот член имеет структуру

$$\oint_{p > \mathcal{C}_{a_\beta}^{(\xi)}} \frac{d\xi}{2\pi i} \oint_{\xi > \mathcal{C}_{\mathcal{Q}}^{(s)}} \frac{dE_{s,\bar{s}}(p) B(\xi, s)}{y(s)} W_{h-1}(\xi, s),$$

но так как двухточечная корреляционная функция $W_{h-1}(\xi, s)$ должна быть симметрична по своим аргументам, это выражение в точности совпадает с первым членом во второй строке выражения (3.37):

$$(3.38)$$

Применим теперь предположение индукции о том, что

$$\frac{\partial}{\partial V(p)} D_{\beta} \mathcal{F}_h = \oint_{p > \mathcal{C}_{\alpha\beta}} \frac{d\xi}{2\pi i} \left(2 \sum_{h''=1}^{h'-1} W_{h''}(\xi, p) W_{h'-h''}(\xi) + W_{h'-1}(\xi, \xi, p) \right) \quad \forall h' < h. \quad (3.39)$$

Тогда, используя удобное графическое представление, в котором упорядочение контуров интегрирования явно соответствует положению соответствующей точки: точки, соответствующие более внешним контурам, располагаются справа от точек, отвечающих более внутренним контурам интегрирования, можно представить выражение (3.37) в виде (принимая во внимание соотношение (3.38)):

$$(3.40)$$

Теперь легко видеть, что правая часть формулы (3.40) (до интегрирования по ξ) просто представляет собой диаграммное разложение для выражения $2 \sum_{h'=1}^{h-h'} W_{h'}(p, \xi) W_{h-h'}(\xi) + W_{h-1}(p, \xi, \xi)$ (где ξ и p находятся снаружи всех внутренних интегрирований) с правильным упорядочением контуров, так что, после произведения внешнего интегрирования по ξ по контуру $\mathcal{C}_{a_\beta}^{(\xi)}$, мы в итоге получим условие согласования (3.39) в следующем порядке $\hbar^2$ -разложения. Это завершает доказательство.

4. Вычисления в роде один

Это единственное место, где нам понадобится интегрировать выражения для $W_h(\lambda)$ явно в духе работ [4] и [38].

4.1. Построение свободной энергии.

Выбор специального базиса. Определим теперь действие оператора (3.4) на мономах $(\mu - \mu_i)$ в терминах производных по $\partial/\partial V(\mu)$.

Используя вышеприведенные условия и формулу (2.28), можно обратить оператор $\hat{K} - 2W_0(\lambda)$ при его действии на базисные мономы $(\lambda - \mu_\alpha)^{-k}$. Определим базисные векторы $\chi_i^{(k)}(\lambda)$ как

$$\chi_i^{(k)}(\lambda) d\lambda = \oint_{\mathcal{C}_{\{\mu_j\}}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{y(\mu)} \cdot \frac{1}{(\mu - \mu_i)^k} \equiv \widehat{d\mathcal{E}}((\lambda - \mu_i)^{-k}), \quad i = 1, \dots, 2n. \quad (4.1)$$

Так как правая часть соотношения (3.6) представляет собой в точности этот оператор, действующий на линейную комбинацию мономов, одноточечная резольвента может быть представлена в виде

$$W_h(\lambda) = \sum_{k=1}^{3h-1} \sum_{i=1}^{2n} A_{i,h}^{(k)} \chi_i^{(k)}(\lambda), \quad h \geq 1, \quad (4.2)$$

где $A_{\alpha,h}^{(k)}$ – некоторые функции от μ_α , a_β и от моментов $M_i^{(k)}$. Поскольку степень наиболее сингулярного члена $1/((\lambda - \mu_\alpha)^{3h-1} \tilde{y}(\lambda))$ в выражении для $W_h(\lambda)$ не зависит от числа разрезов, выражение для $W_h(\lambda)$ будет зависеть не более чем от $2n(3h-2)$ моментов, в точности так же, как и в одноразрезном случае [4]. Здесь нам понадобятся лишь несколько базисных функций.

Чтобы получить $\chi_\alpha^{(1)}$, начнем с соотношения (2.11), которое дает:

$$\lim_{\mu \rightarrow \mu_\alpha} \frac{1}{\mu - \mu_\alpha} \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial V(\lambda)} = \lim_{\mu \rightarrow \mu_\alpha} 2(B(\lambda, \mu) - B(\bar{\lambda}, \mu)) \frac{1}{y(\mu)} + O(1), \quad (4.3)$$

откуда, поскольку

$$\int \frac{d\lambda}{\sqrt{\lambda - \mu_\alpha}} = 2\sqrt{\lambda - \mu_\alpha},$$

получим

$$\frac{\partial \mu_\alpha}{\partial V(\lambda)} = \oint_{\mathcal{C}_{\mu_\alpha}} \frac{1}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{\mu - \mu_\alpha} \frac{1}{y(\mu)} = \widehat{d\mathcal{E}}\left(\frac{1}{\lambda - \mu_\alpha}\right). \quad (4.4)$$

Технически удобно ввести функцию

$$y_\alpha(\mu) \equiv y(\mu)(\mu - \mu_\alpha)^{-1/2}, \quad (4.5)$$

которая вместе со всеми своими производными по μ несингулярна при $\mu \rightarrow \mu_\alpha$. Применим теперь интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} & \oint_{\mathcal{C}_{\{\mu_j\}}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{y(\mu)} \cdot \frac{1}{(\mu - \mu_\alpha)^2} = \oint_{\mathcal{C}_{\mu_\alpha}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{1}{\mu - \mu_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{y(\mu)} \right) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_{\mu_\alpha}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{1}{\mu - \mu_\alpha} \left(\frac{B(\lambda, \mu) - B(\bar{\lambda}, \mu)}{y(\mu)} + \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{y(\mu)} \left[-\frac{y'_\alpha(\mu)}{y_\alpha(\mu)} - \frac{1}{2(\mu - \mu_\alpha)} \right] \right). \end{aligned} \quad (4.6)$$

(Здесь через $\mathcal{C}_{\{\mu_j\}}$ обозначена для краткости совокупность контуров вокруг всех точек ветвления.) Перебрасывая член с $\mu - \mu_\alpha$ в квадратных скобках из правой части в левую, учитывая то, что член с бергмановским ядром в правой части есть просто $-\partial y(\mu)/\partial V(\lambda)$, и применяя (4.4), получим:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2} \oint_{\mathcal{C}_{\mu_\alpha}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{y(\mu)} \cdot \frac{1}{(\mu - \mu_\alpha)^2} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_{\mu_\alpha}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{1}{\mu - \mu_\alpha} \left(-\frac{\partial y(\mu)}{\partial V(\lambda)} \frac{1}{y(\mu)} + \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{y(\mu)} \left[-\frac{\partial}{\partial \mu} \log y_\alpha(\mu) \right] \right) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_{\mu_\alpha}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{1}{\mu - \mu_\alpha} \left(-\frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \log y_\alpha(\mu) + \frac{1}{2(\mu - \mu_\alpha)} \right) - \frac{d\mu_\alpha}{\partial V(\lambda)} \frac{\partial}{\partial \mu} \Big|_{\mu=\mu_\alpha} \log y_\alpha(\mu) \\ &= \oint_{\mathcal{C}_{\mu_\alpha}} \frac{d\mu}{2\pi i} \left(-\frac{1}{\mu - \mu_\alpha} \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \log y_\alpha(\mu) - \frac{d\mu_\alpha}{\partial V(\lambda)} \frac{1}{(\mu - \mu_\alpha)^2} \log y_\alpha(\mu) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \left(\oint_{\mathcal{C}_{\mu_\alpha}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{1}{\mu - \mu_\alpha} \log y_\alpha(\mu) \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial V(\lambda)} (\log y_\alpha(\mu_\alpha)). \end{aligned} \quad (4.7)$$

Остается вычислить последнее нетривиальное действие:

$$\oint_{\mathcal{C}_{\{\mu_j\}}^{(\mu)}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{dE_{\mu, \bar{\mu}}(\lambda)}{y(\mu)} \cdot \frac{1}{(\mu - a_\beta)^2} = 2 \frac{B(\lambda, [a_\beta])}{y([a_\beta])}. \quad (4.8)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} M(a_\beta) &= \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}} \frac{d\mu}{2\pi i} \frac{y(\mu)}{\mu - a_\beta} \frac{1}{\tilde{y}(\mu)} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}} \frac{d\mu}{2\pi i} \left(\frac{-B(\lambda, \mu)}{\mu - a_\beta} \frac{1}{\tilde{y}(\mu)} + \frac{M(\mu)}{\mu - a_\beta} \sum_{\alpha=1}^s \frac{1}{2(\mu - \mu_\alpha)} \cdot \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial V(\lambda)} \right) \\ &= -\frac{B(\lambda, [a_\beta])M(a_\beta)}{y([a_\beta])} + M(a_\beta) \sum_{\alpha=1}^s \frac{1}{2(a_\beta - \mu_\alpha)} \cdot \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial V(\lambda)}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Собирая все результаты воедино, получим:

$$\begin{aligned}
 \chi_\alpha^{(1)}(\lambda) &= \widehat{d\mathcal{E}}\left(\frac{1}{\lambda - \mu_\alpha}\right) = \frac{\partial \mu_\alpha}{\partial V(\lambda)}, \quad \alpha = 1, \dots, s, \\
 \chi_\alpha^{(2)}(\lambda) &= \widehat{d\mathcal{E}}\left(\frac{1}{(\lambda - \mu_\alpha)^2}\right) = -\frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \left(\log M_\alpha^{(1)} \frac{\prod_{\gamma \neq \alpha}^s \sqrt{\mu_\alpha - \mu_\gamma}}{\prod_{\beta=1}^t \sqrt{\mu_\alpha - a_\beta}} \right), \quad \alpha = 1, \dots, s, \\
 \chi_\beta^{(1)}(\lambda) &= \widehat{d\mathcal{E}}\left(\frac{1}{\lambda - a_\beta}\right) = 0, \quad \beta = 1, \dots, t, \\
 \chi_\beta^{(2)}(\lambda) &= \widehat{d\mathcal{E}}\left(\frac{1}{(\lambda - a_\beta)^2}\right) = -2 \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \left(\log M_\beta^{(1)} \prod_{\alpha=1}^s \sqrt{\mu_\alpha - a_\beta} \right), \quad \beta = 1, \dots, t.
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

Интегрирование $W_1(\lambda)$. Вычислим теперь действие $\widehat{d\mathcal{E}}$ на $W_0(\lambda, \lambda)$ в специальном базисе, введенном выше, чтобы получить первый поправочный член $\mathcal{F}_1$ для свободной энергии. Получим сначала явное выражение для $W_0(\lambda, \lambda)$ прямым дифференцированием выражения (2.12) по μ с последующим вычитанием члена $1/(\lambda - \mu)^2$ и взятием предела при $\mu \rightarrow \lambda$:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} W_0(\lambda) &= -\frac{1}{4} \frac{\widehat{y}''(\lambda)}{\widehat{y}(\lambda)} - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} H_i(\lambda) \left(\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{\lambda - \mu_j} \oint_{A_i} d\xi \frac{1}{(\xi - \mu_j) \widehat{y}(\xi)} \right) \\
 &= \frac{1}{16} \sum_{i=1}^{2n} \frac{1}{(\lambda - \mu_i)^2} - \frac{1}{8} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i < j}}^{2n} \frac{1}{\mu_i - \mu_j} \left(\frac{1}{\lambda - \mu_i} - \frac{1}{\lambda - \mu_j} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{n-1} H_i(\lambda) \left(\sum_{j=1}^{2n} \frac{1}{\lambda - \mu_j} \oint_{A_i} d\xi \frac{1}{(\xi - \mu_j) \widehat{y}(\xi)} \right).
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

Обратимся к последнему члену, содержащему гиперэллиптические интегралы, и покажем, что

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^{n-1} H_i(\mu_j) \cdot \oint_{A_i} \frac{d\xi}{(\xi - \mu_j) \widehat{y}(\xi)} &= \sum_{i=1}^{n-1} \oint_{A_i} \frac{H_i(\xi)}{(\xi - \mu_j) \widehat{y}(\xi)} d\xi \\
 &= 2 \frac{\partial}{\partial \mu_j} \log \det \sigma, \quad j = 1, \dots, 2n,
 \end{aligned} \tag{4.12}$$

где элементы матрицы σ имеют вид:

$$\sigma_{i,k} \equiv \oint_{A_i} \frac{\xi^{k-1}}{\widehat{y}(\xi)} d\xi, \quad i, k = 1, \dots, n-1. \tag{4.13}$$

Для канонических многочленов $H_k(\xi) \equiv \sum_{l=1}^{n-1} H_{l,k} \xi^{l-1}$, $k = 1, \dots, n-1$, связанных с канонически нормированными дифференциалами (1.51), т.е. таких, что

$$\oint_{A_i} \frac{H_k(\xi)}{\widehat{y}(\xi)} d\xi = \delta_{k,i},$$

мы очевидно имеем:

$$\sum_{l=1}^{n-1} \sigma_{i,l} H_{l,k} = \delta_{i,k} \quad \text{для} \quad i, k = 1, \dots, n-1. \tag{4.14}$$

Таким образом, для всех $k > 0$ таких, что $l - k - 1 \geq 0$, справедливо следующее свойство:

$$\sum_{i=1}^{n-1} H_{l,i} \cdot \oint_{A_i} \frac{\xi^{l-k-1}}{\widehat{y}(\xi)} d\xi = 0, \quad (4.15)$$

и

$$\sum_{i=1}^{n-1} \oint_{A_i} \frac{H_i(\xi) - H_i(\mu_j)}{(\xi - \mu_j)\widehat{y}(\xi)} d\xi = \sum_{i=1}^{n-1} \oint_{A_i} \frac{\sum_{l=2}^{n-1} H_{l,i} \sum_{k=1}^{l-1} \xi^{l-k-1} \mu_j^{k-1}}{\widehat{y}(\xi)} d\xi = 0,$$

и мы приходим к первой части выражения (4.12). Чтобы получить вторую часть, заметим, что в силу соотношения (4.14) она может быть представлена в виде

$$\sum_{k=1}^{n-1} \left(2 \frac{\partial}{\partial \mu_j} \sigma_{j,k} \right) \sigma_{k,i}^{-1},$$

и мы получаем второе равенство из формулы (4.12).

Чтобы получить $W_1(\lambda)$, остается подействовать оператором $\widehat{d\mathcal{E}}$ на (4.11) с учетом (4.10). Ответ имеет вид:

$$\begin{aligned} W_1(\lambda) = \frac{\partial}{\partial V(\lambda)} \left[-\frac{1}{24} \log \prod_{\alpha=1}^s M_{\alpha}^{(1)} - \frac{1}{8} \log \prod_{\beta=1}^t M_{\beta}^{(1)} - \frac{1}{6} \log \prod_{1 \leq \alpha < \gamma \leq s} |\mu_{\alpha} - \mu_{\gamma}| \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \log \prod_{\alpha=1}^s \prod_{\beta=1}^t |\mu_{\alpha} - a_{\beta}| - \frac{1}{2} \log \det \sigma \right]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Это выражение уже может быть легко проинтегрировано. С точностью до функции $\mathcal{F}(\{a_{\beta}\})$, зависящей только от a_{β} , получим:

$$\mathcal{F}_1 = -\frac{1}{24} \log \left(\prod_{\alpha=1}^s M(\mu_{\alpha}) \cdot \prod_{\beta=1}^t M^3(a_{\beta}) \cdot \Delta(\mu)^4 \cdot \prod_{\alpha, \beta} (\mu_{\alpha} - a_{\beta})^4 \cdot \left(\det_{i,j=1, \dots, n-1} \sigma_{j,i} \right)^{12} \right), \quad (4.17)$$

где $\Delta(\mu) = \prod_{1 \leq \alpha < \gamma \leq s} (\mu_{\alpha} - \mu_{\gamma})$ – определитель Вандермонда. Это и есть окончательный ответ для свободной энергии в роде один. Естественным кандидатом на роль функции $\mathcal{F}(\{a_{\beta}\})$ мог бы быть логарифм от некоторой степени определителя Вандермонда, составленного из переменных a_{β} . Но, как будет показано в следующем разделе, явное решение условий согласования дает ответ $\mathcal{F}(\{a_{\beta}\}) = 0$, так что результат (4.17) *точен*.

4.2. Проверка условий согласования. С использованием оператора D_{β} (3.29) условия согласования (3.8) для члена $\mathcal{F}_1$ могут быть представлены в виде

$$D_{\beta} \mathcal{F}_1 = \oint_{\mathcal{C}_{a_{\beta}}} \frac{d\xi}{2\pi i} W_0(\xi, \xi), \quad (4.18)$$

где $\mathcal{F}_1$ задается формулой (4.17), а $W_0(\xi, \xi)$ – формулой (4.11). Чтобы получить ответ, достаточно лишь задать действие оператора D_{β} на моменты и на параметры точек ветвления. Начнем с того, что из формулы (2.13) следует, что

если рассмотреть лидирующий вклад в выражении для $B(\lambda, \mu)$ при $\lambda \rightarrow \mu_\alpha$, то мы непосредственно получим, что

$$D_\beta \mu_\alpha = 0, \quad \alpha = 1, \dots, s, \quad D_\beta a_\gamma = \delta_{\beta, \gamma}, \quad \gamma = 1, \dots, t. \quad (4.19)$$

Также довольно легко найти действие D_β на моменты $M_\alpha^{(k)}$ и $M_\gamma^{(k)}$ при $\gamma \neq \beta$. Представляя

$$M_i^{(k)} = \oint_{\mathcal{C}_{\mu_i}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{y(\xi)}{(\xi - \mu_i)^k \tilde{y}(\xi)},$$

в случае $\mu_i \neq a_\beta$ получим, что D_β дает нуль при действии на все μ_α в знаменателе подынтегрального выражения, контуры интегрирования вокруг a_β и μ_i не пересекаются, а потому действие оператора D_β на $y(\xi)$ также зануляется, и единственный вклад обеспечивается вариацией собственно параметра a_β , что в итоге дает:

$$D_\beta M_i^{(k)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \xi^{k-1}} \left(\frac{M(\xi)}{\xi - a_\beta} \right) \Big|_{\xi=\mu_i}, \quad \mu_i \neq a_\beta. \quad (4.20)$$

Последняя величина, которую осталось вычислить, – это вариация $M_\beta^{(k)}$. Здесь, как и раньше, все вариации параметров μ_α обращаются в нуль, но вклад при вариации $y(\xi)$ оказывается нетривиальным ввиду упорядочения контуров. Переставляя контуры интегрирования, подобно тому как это было сделано в формуле (3.35), получим дополнительную производную по переменной ξ , так что, обозначив через δ_{a_β} явную вариацию относительно параметра a_β , получим:

$$\begin{aligned} D_\beta M_\beta^{(k)} &= \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}} \frac{d\xi}{2\pi i} y(\xi) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} + \delta_{a_\beta} \right) \frac{1}{(\xi - a_\beta)^k \tilde{y}(\xi)} \\ &= \oint_{\mathcal{C}_{a_\beta}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{y(\xi)}{(\xi - a_\beta)^{k-1/2}} \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{1}{\tilde{y}_\beta(\xi)}, \end{aligned}$$

где, как и в формуле (4.5), $\tilde{y}_\beta(\xi) \equiv \tilde{y}(\xi) \sqrt{\xi - a_\beta}$ обозначает регулярную часть выражения $\tilde{y}(\xi)$ в локальных координатах около точки a_β . Поэтому окончательно имеем:

$$D_\beta M_\beta^{(k)} = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial \xi^{k-1}} \left(-\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^s \frac{M(\xi)}{\xi - \mu_\alpha} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{\gamma=1 \\ \gamma \neq \beta}}^t \frac{M(\xi)}{\xi - a_\gamma} \right) \Big|_{\xi=a_\beta}, \quad \beta = 1, \dots, t. \quad (4.21)$$

Подставив эти формулы в (4.18) и вычислив обе части уравнения с использованием явных выражений (4.17) и (4.11), мы обнаружим полное соответствие, что означает, что выполнение условий согласования не требует в данном случае введения никаких новых дополнительных членов, зависящих только от параметров жестких стенок a_β . Результат (4.17) тем самым является точным, и ниже мы продемонстрируем, что он также находится в согласии с идеологией Боннэ, Давида и Эйнара [16].

4.3. Свободная энергия в роде один, детерминантное представление и сингулярности. Обсудим теперь результат, полученный для свободной

энергии в роде один. Сравнивая его с ответом в “старом” матрично-модельном решении для двух разрезов [38], получим соответствие с точностью до модулярного преобразования, переставляющего A - и B -периоды. Это происходит именно потому, что в нашем подходе все A -периоды (1.27) дифференциала dS (1.48) считались инвариантными величинами при действии $\frac{\partial}{\partial V(\lambda)}$, см. (1.56). Если, напротив, потребовать зануления всех B -периодов дифференциала dS , что отвечает, в частности, случаю равных “химических потенциалов” Π_i в различных ямах потенциала [67], [68], или же дополнительной минимизации свободной энергии (1.37) относительно чисел заполнения (1.40),¹⁰ то мы придем к модулярно преобразованному базису циклов. В этом случае матрица $\sigma_{i,j}^{(A)}$ A -периодов величин $\frac{x^i dx}{y(x)}$ должна быть заменена на матрицу $\sigma^{(B)}$ соответствующих B -периодов [32]. Определенно, формула (4.17) воспроизводит ответ работ [39], [40]¹¹ для общего многоразрезного решения. Отсюда можно заключить, что величина $e^{\mathcal{F}_1}$ ведет себя как сечение детерминантного расслоения оператора $\bar{\partial}$ над пространством модулей, поскольку она преобразуется с дополнительным множителем $(\det \tau_{ij})^{1/2}$ при таком модулярном преобразовании.

Представляется вероятным, что мы можем добавить произвольную функцию от чисел заполнения S_i и t_0 к $\mathcal{F}$, не нарушив решения петлевого уравнения. Однако если предположить выполнение нормировочных условий (2.27) и (2.29), или, эквивалентно, “локальность” поправок к $\mathcal{F}$, которая утверждает, что каждая функция $\mathcal{F}_h$ задается локальными свойствами $dS(\lambda)$ возле точек ветвления, то такой произвол оказывается полностью фиксированным. Ответ при этом становится сингулярен при $S_i \rightarrow 0$, но происхождение этой сингулярности было прослежено еще в работе [16].

В работе [16] было предложено рассматривать исходный интеграл (1.1) в случае n -разрезного решения как n -матричный интеграл с эрмитовыми матрицам размеров $N_i = S_i/\hbar$ ($i = 1, \dots, n$). Сингулярность, возникающая в пределе $S_i \rightarrow 0$, при этом целиком обусловлена взаимодействием между собственными значениями соответствующей матрицы, поскольку взаимодействие с остальными собственными значениями несингулярно в этом пределе. Поэтому такая сингулярность должна целиком определяться самим параметром S_i и не должна зависеть ни от потенциала, ни от других чисел заполнения.

Сингулярное поведение тем самым имеет место, когда разрез сжимается в точку, и сингулярность первого типа возникает при стягивании разреза, концами которого служат две “динамические” точки ветвления, т.е. когда μ_2 стремится к μ_1 . Второй тип сингулярного поведения отвечает случаю, когда $\mu_1 \rightarrow a_1$. В работе [46] было явно показано, что в обозначениях $\mu_2 - \mu_1 = \epsilon \rightarrow 0$ и $\mu_1 - a_1 = \epsilon \rightarrow 0$ в обоих случаях сингулярного поведения выполнены следующие явные соотношения:

$$\lim_{\mu_2 \rightarrow \mu_1 = \mu} \mathcal{F}_1^{(n)} = \mathcal{F}_1^{(n-1)} - \frac{1}{12} \log S_1 + O(\epsilon), \quad (4.22)$$

$$\lim_{\mu_1 \rightarrow a_1 = \mu} \mathcal{F}_1^{(n)} = \mathcal{F}_1^{(n-1)} - \frac{1}{6} \log S_1 + O(\epsilon), \quad (4.23)$$

¹⁰Это, безусловно, подразумевает независимость (равенство нулю) B -периодов дифференциала dS относительно действия $\partial/\partial V(\lambda)$.

¹¹В работе [39] детерминантный член $\det \sigma$ был пропущен в ответе.

где $\mathcal{F}_1^{(n-1)}$ – соответствующие поправки к свободной энергии в случае решения с $(n-1)$ -м разрезом, и в первом случае (4.22) необходимо добавить новую двойную точку, таким образом видоизменяя дополнительный многочлен $M(\xi) \mapsto M(\xi)(\xi - \mu)$, в то время как во втором случае (4.23) новой двойной точки не возникает. Это наблюдение вместе с другими доступными явными вычислениями (для $\mathcal{F}_0$ и для $\mathcal{F}_2$ в одноразрезном случае [4]) подтверждают, что во всех порядках 'т хофтовского разложения единственным потенциальным источником сингулярного поведения является вырожденная геометрия кривой, а она исчерпывается нормировочным множителем в матричном интеграле, т.е. объемом (орбиты) (под)группы унитарных вращений $U(N_i)$. В самом деле, интеграл задается разложением в ряд Тейлора по S_i (см. формулу (4.8) в [32]), в то время как объем унитарной группы [69] в случае распределения, задаваемого многочленами Эрмита, дает множитель

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \prod_{k=1}^{S_i/\hbar} d\lambda_k \Delta^2(\lambda) e^{-\frac{t_2}{2\hbar} \sum_{k=1}^{S_i/\hbar} \lambda_k^2} = \left(\frac{\hbar}{t_2}\right)^{\frac{S_i^2}{2\hbar^2} \frac{S_i}{\hbar}} \prod_{k=1}^{S_i/\hbar} \Gamma(k) \equiv e^{\frac{S_i^2}{2\hbar^2} \log(\hbar/t_2)} G_2(S_i/\hbar), \quad (4.24)$$

где $G_2(x)$ – функция Барнса [70], асимптотическое разложение которой при $x \rightarrow \infty$ имеет вид

$$\log G_2(x) = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{1}{12} \log x - \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{2} x \log 2\pi + \zeta'(-1) + \sum_{h=2} \frac{B_{2h}}{4h(h-1)} \frac{1}{x^{2h-2}}, \quad (4.25)$$

где B_{2h} – числа Бернулли, а $\zeta(s)$ – ζ -функция Римана. Первые сингулярные члены этого разложения имеют вид: $\frac{S_i^2}{2} \log S_i$ из $\mathcal{F}_0$, $-\frac{1}{12} \log S_i$ из $\mathcal{F}_1$ и $-\frac{1}{240} \frac{1}{i_0^2}$ из $\mathcal{F}_2$.¹²

В случае, когда $\mu_1 \rightarrow a_1$, нам требуется применить асимптотическое разложение для многочленов Лагерра, которое оказывается просто удвоенным асимптотическим разложением (4.25), что опять-таки находится в прекрасном соответствии с (4.23).

5. Матричная модель собственных значений

5.1. Формулировка модели. Решение петлевых уравнений. Покажем теперь, как метод разложения по фейнмановским диаграммам, разработанный для случая эрмитовой 1ММ [44], [45], можно применить для решения (формальной) модели собственных значений с действием

$$\int \prod_{i=1}^N dx_i \Delta^{2\beta}(x) e^{-\frac{N\beta}{t_0} \sum_{i=1}^N V(x_i)} = e^{\frac{1}{\hbar^2} \mathcal{F}}, \quad (5.1)$$

где $V(x) = \sum_{n \geq 0} t_n x^n$ и

$$\hbar = \frac{t_0}{N\sqrt{\beta}} \quad (5.2)$$

¹²Это совпадает с сингулярностью ответа в [4] в правильной нормировке, в которой $t_0 = d^2/16$ для $M(\xi) \equiv 1$.

– формальный параметр разложения. Интегрирование в (5.1) производится по N переменным x_i , имеющим смысл собственных значений эрмитовых матриц при $\beta = 1$, ортогональных матриц при $\beta = 1/2$ и симплектических матриц при $\beta = 2$. В дальнейшем будем считать β произвольным положительным числом. Интегрирование может производиться и по кривым в комплексной плоскости каждой из N переменных x_i . При $\beta \neq 1$ не существует топологического разложения по четным степеням $\hbar$, и вместо этого следует рассматривать разложение по всем целым степеням параметра $\hbar$. Как обычно, $t_0 = \hbar N$ представляет собой нормированное число собственных значений. Будем также предполагать, что потенциал $V(p)$ задается многочленом фиксированной степени $m + 1$. Отметим, что в этой модели предполагается *отсутствие* жестких стенок. Не останавливаясь более подробно на мотивации важности рассмотрения таких моделей, отметим лишь, что они задают системы типа жидкостей Люттингера, составляющих основу при описании квантового эффекта Холла.

Петлевое уравнение. Производя замену переменных (1.10), получим петлевое уравнение:

$$\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{Q}}} \frac{d\omega}{2\pi i} \frac{V'(\omega)}{p - \omega} W(\omega) = W(p)^2 + \hbar(\sqrt{\beta} - \sqrt{\beta^{-1}})W'(p) + \hbar^2 W(p, p). \quad (5.3)$$

Зависимость от β входит в выражение (5.3) только в виде комбинации

$$\gamma = \sqrt{\beta} - \sqrt{\beta^{-1}}, \quad (5.4)$$

и, предполагая, что $\beta \sim O(1)$, получим разложение для свободной энергии в виде

$$\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}(\hbar, \gamma, t_0, t_1, t_2, \dots) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \hbar^{2k+l} \gamma^l \mathcal{F}_{k,l}. \quad (5.5)$$

Предполагая, что род h по-прежнему соответствует четным степеням $\hbar$, получим суммирование по полуцелым “родам”.

При этом оказывается, что $W_h(p)$ при $h \geq 1/2$ удовлетворяют уравнению

$$(\hat{K} - 2W_0(p))W_h(p) = \sum_{h'=1/2}^{h-1/2} W_{h'}(p)W_{h-h'}(p) + \frac{\partial}{\partial V(p)}W_{h-1}(p) + \gamma \frac{\partial}{\partial p}W_{h-1/2}(p) \quad (5.6)$$

с тем же самым оператором $\hat{K} - 2W_0$, что и в (1.14).

По аналогии с (5.5) разложим многоточечные резольвенты $W_h(\cdot)$ в ряд по γ :

$$W_h(p_1, \dots, p_s) = \sum_{k=0}^{[h]} \gamma^{2h-2k} W_{k,2h-2k}(p_1, \dots, p_s). \quad (5.7)$$

Выражение (5.6) при этом очевидно имеет вид

$$\begin{aligned} (\hat{K} - 2W_{0,0}(p))W_{k,l}(p) &= \sum_{\substack{k_1 \geq 0, l_1 \geq 0 \\ k_1 + l_1 > 0}} W_{k_1, l_1}(p) W_{k-k_1, l-l_1}(p) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial V(p)} W_{k-1, l}(p) + \gamma \frac{\partial}{\partial p} W_{k, l-1}(p). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Решение модели в планарном пределе для $W_{0,0}(p)$ в точности совпадает с решением для 1ММ и, соответственно, проявляет все те же свойства интегрируемости, уравнения ВДВБ и т. д. Вводя числа заполнения S_i и полагая, что они насыщаются ведущим членом $W_{0,0}(p)$, придем к точно таким же нормировочным условиям, что и в случае 1ММ:

$$\oint_{A_i} W_{k,l}(\xi, p_2, \dots, p_s) = 0 \quad \text{для} \quad k+l > 0. \quad (5.9)$$

В дополнение введем еще одно предположение. Нули b_j многочлена $M(p)$ называются двойными точками. В некотором смысле их можно интерпретировать как разрезы исчезающе малой длины. Потребуем, чтобы эти вырожденные разрезы не содержали бы собственных значений ни в каком порядке $\hbar$ -разложения, т.е. чтобы

$$\oint_{\mathcal{C}_{b_j}} W_{k,l}(\xi, p_2, \dots, p_s) = 0 \quad (5.10)$$

для любого контура, обходящего вокруг нуля многочлена M .

Оператор $\widehat{d\mathcal{E}}$, обратный к оператору $\widehat{K} - 2W_{0,0}(p)$, задается той же формулой (3.2), только теперь, из-за присутствия члена с пространственной производной, свойства симметрии относительно инволюции изменяются, и становится невозможным свести действие этого оператора к вычислению вычетов в точках μ_α . Вместо этого приходится сохранять интегрирование по контуру. На самом деле, даже в случае, когда симметрия при инволюции оказывается нестандартной, $f(\mu) = -f(\bar{\mu})$, интеграл (3.2) все-таки можно свести к взятию вычетов, если сначала симметризовать интегрирование по $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ с помощью половинных интегралов по $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}$ и $\mathcal{C}_{\bar{\mathcal{D}}}$ на физическом и нефизическом листах, а затем произвести интегрирования, стягивая оба контура интегрирования на ∞_- , получив тем самым половинные вычеты в точках ветвления и полные вычеты в нулях $y(\bar{\lambda})$ на нефизическом листе (включая вычет в самой точке ∞_-).

Графическое представление. Пространственная производная. Теперь, как и раньше, можно развить диаграммное представление, но оно будет содержать некоторые новые элементы. Введем *новый* пропагатор $dp dy(q)$, обозначаемый штриховой линией.

Графическое представление для решения петлевого уравнения (5.6) теперь имеет следующий вид. Будем представлять многочечную резольвенту $W_{h'}(p_1, \dots, p_s)$, как и раньше, в виде блока с s внешними хвостами и несущего индекс h' . Представим производную $\frac{\partial}{\partial p_1} W_{h'}(p_1, \dots, p_s)$ также в виде блока с $s+1$ внешними линиями, одна из которых представляет собой штриховую линию, берущую начало в той же вершине, что и p_1 . Таким образом, получим следующее соотношение [47]:

$$p \text{---} \bigcirc^h = \sum_{h'=1/2}^{h-1/2} p \text{---} \bullet \begin{array}{c} \bigcirc^{h-h'} \\ \bigcirc^{h'} \end{array} + p \text{---} \bullet \bigcirc^{h-1} + \gamma p \text{---} \bullet \bigcirc^{h-\frac{1}{2}}, \quad (5.11)$$

которое задает диаграммное представление для $W_h(p_1, \dots, p_s)$.

Рассмотрим действие пространственной производной $\frac{\partial}{\partial p_1}$ на $W_{k,0}(p_1, \dots, p_s)$. Поместим начало штрихового направленного ребра в точку p_1 и поставим в соответствие этой начальной точке дифференциал dx . Напомним, что первым объектом (на который может подействовать эта производная) является $dE_{\eta, \bar{\eta}}(p_1)$, затем идет вершина, содержащая интегрирование

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{d\eta}{y(\eta)},$$

а уже за ней – остальная часть диаграммы, которую будем обозначать через $F(\eta)$. Можно представить действие производной с помощью контурного интеграла вокруг p_1 с ядром $B(p_1, \xi)$:

$$dp_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{dE_{\eta, \bar{\eta}}(p_1) d\eta}{2\pi i y(\eta) dp_1} F(\eta) \right) = \operatorname{res}_{\xi \rightarrow p_1} \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{B(p_1, \xi) dE_{\eta, \bar{\eta}}(\xi)}{d\xi} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta), \quad (5.12)$$

где p_1 лежит вне контура интегрирования для η . Интеграл по ξ оказывается несингулярным на бесконечности, так что можно деформировать контур интегрирования от $\mathcal{C}_{p_1}$ до $\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)} > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}$,¹³

$$\begin{aligned} & \oint_{\mathcal{C}_{p_1}} \frac{B(p_1, \xi) dE_{\eta, \bar{\eta}}(\xi)}{2\pi i d\xi} \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) \\ &= - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)} > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{B(p_1, \xi) dE_{\eta, \bar{\eta}}(\xi)}{2\pi i d\xi} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Перекинем теперь контур для переменной ξ через контур для переменной η , собирая вычеты в полюсах ξ , при $\xi = \eta$, $\xi = \bar{\eta}$ и в точках ветвления. При этом получим:

$$\begin{aligned} & - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \sum_{\alpha} \operatorname{res}_{\xi \rightarrow \mu_{\alpha}} \frac{B(p_1, \xi) dE_{\eta, \bar{\eta}}(\xi)}{d\xi} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) \\ & - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{B(p_1, \eta)}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) + \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{B(p_1, \bar{\eta})}{2\pi i y(\eta)} F(\eta), \end{aligned} \quad (5.14)$$

где первый интеграл имеет лишь простые полюсы в точках ветвления. По правилу Лопиталья вычет не изменится при замене $\frac{B(\xi, p_1)}{dy(\xi)}$ на $\frac{dE_{\xi, \bar{\xi}}(p_1)}{2y(\xi)}$, т.е. в правой части (5.13) получим:

$$\begin{aligned} & - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \sum_{\alpha} \operatorname{res}_{\xi \rightarrow \mu_{\alpha}} \frac{dE_{\xi, \bar{\xi}}(p_1) dy(\xi) dE_{\eta, \bar{\eta}}(\xi)}{2y(\xi) d\xi} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) \\ & - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{B(p_1, \eta) - B(p_1, \bar{\eta})}{2\pi i y(\eta)} F(\eta). \end{aligned}$$

Перекинув теперь контур интегрирования по ξ вокруг точек ветвления обратно через контур интегрирования для η , соберем вычеты в точках $\xi = \eta$ и $\xi = \bar{\eta}$,

¹³Здесь, как и раньше, отношение сравнения контуров устанавливает их упорядочение.

оба эти вычета дают тот же самый вклад, так что мы получим:

$$\begin{aligned}
 & - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)} > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{dE_{\xi, \bar{\xi}}(p_1) dy(\xi) dE_{\eta, \bar{\eta}}(\xi)}{2\pi i 2y(\xi) d\xi} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) \\
 & + \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{dE_{\eta, \bar{\eta}}(p_1) dy(\eta)}{y(\eta) d\eta} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{B(p_1, \eta) - B(p_1, \bar{\eta})}{2\pi i y(\eta)} F(\eta). \quad (5.15)
 \end{aligned}$$

После вычисления двух последних членов по частям остается только выражение

$$- \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)} > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{dE_{\xi, \bar{\xi}}(p_1) dy(\xi) dE_{\eta, \bar{\eta}}(\xi)}{2\pi i 2y(\xi) d\xi} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) + \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{dE_{\eta, \bar{\eta}}(p_1) d\eta}{2\pi i y(\eta)} \frac{\partial F(\eta)}{\partial \eta}. \quad (5.16)$$

Таким образом, мы показали, что

$$\begin{aligned}
 & dp_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left(\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{dE_{\eta, \bar{\eta}}(p_1) d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) \right) \\
 & = - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)} > \mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{dE_{\xi, \bar{\xi}}(p_1) dy(\xi) dE_{\eta, \bar{\eta}}(\xi)}{2\pi i 2y(\xi) d\xi} \frac{d\eta}{2\pi i y(\eta)} F(\eta) \\
 & \quad + \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\eta)}} \frac{dE_{\eta, \bar{\eta}}(p_1) d\eta}{2\pi i y(\eta)} \frac{\partial F(\eta)}{\partial \eta}, \quad (5.17)
 \end{aligned}$$

и действие производной можно графически представить в виде

$$\partial_{p_1} \bullet \xrightarrow{\eta} \bullet \{F(\eta)\} = p_1 \bullet \xrightarrow{\overset{y'(\xi)}{\downarrow}} \bullet \xrightarrow{\eta} \bullet \{F(\eta)\} + p_1 \bullet \xrightarrow{\eta} \bullet \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta} F(\eta) \right\}. \quad (5.18)$$

Теперь видно, что с использованием соотношения (5.18) можно последовательно перемещать дифференцирование вдоль направленных пропагаторов графа. Остается задать действие этой производной на внутренние ненаправленные пропагаторы. Но для этих пропагаторов (поскольку каждый имеет ровно два конца) если в какой-то момент на него действовала производная с одного конца, то рано или поздно появится член, в котором эта производная подействует с другого конца; выделяя эти два члена, получим:

$$\partial_p B(p, q) + \partial_q B(p, q) = \oint_{\mathcal{C}_p \cup \mathcal{C}_q} \frac{B(p, \xi) B(\xi, q)}{2\pi i d\xi}.$$

И теперь можно продеформировать этот контур к сумме контуров только вокруг точек ветвления (суммы вычетов). Тогда можно снова ввести $y'(\xi)d\xi/y(\xi)$ и убрать с помощью интегрирования одно из бергмановских ядер (а именно то, которое было соединено с точкой q при $p > q$ или с точкой p , если $q > p$; напомним, что по условию точки p и q обязаны быть сравнимыми).

Таким образом, получим:

$$(\partial_p + \partial_q) p \bullet \xrightarrow{\quad} q = p \bullet \xrightarrow{\overset{y'(\xi)}{\downarrow}} \underset{r}{\bullet} \bullet q \equiv p \bullet \xrightarrow{\overset{y'(\xi)}{\downarrow}} \underset{r}{\bullet} \bullet q. \quad (5.19)$$

5.2. Диаграммные правила Фейнмана. Новая диаграммная техника содержит следующие компоненты. Будем собирать в вершинах все факторы, имеющие отношение к бергмановским ядрам $B(p, q)$ и $dE_{q, \bar{q}}(p)$, и все множители типа функции $y(\xi)$ и ее производных в соответствии с правилом: каждой вершине соответствует ровно один сплошной направленный “входящий” пропагатор, в то время как ненаправленный пропагатор $B(p, q)$ или его производные ставятся в соответствие той вершине, которая отвечает минимальной переменной среди p и q в смысле упорядочения контуров. В нижеследующем графическом представлении вершины предполагаются упорядоченными слева направо.

Приведем список всех возможных случаев.

Вершины с тремя присоединенными сплошными линиями.

$$(a) \quad \begin{array}{c} \text{diagram: a vertex with three incoming lines labeled } q, p, r \text{ from the left, and } k \text{ external lines from the top. The vertex is labeled } \xi. \end{array} \sim \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)}} dE_{\xi, \bar{\xi}}(q) \frac{d\xi}{2\pi i y(\xi)} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} (B(r, \xi) B(p, \xi)), \quad k \geq 0. \quad (5.24)$$

Здесь по построению $\xi < r$ и $\xi < p$, или r и/или p могут быть внешними концами. Если q – внешний конец, то $k = 0$, а r и p также обязаны быть внешними концами.

$$(b) \quad \begin{array}{c} \text{diagram: a vertex with one incoming line labeled } q \text{ from the left, and } \xi \text{ external lines from the top. The vertex is labeled } \xi. \end{array} \sim \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)}} dE_{\xi, \bar{\xi}}(q) \frac{d\xi}{2\pi i y(\xi)} B(\xi, \bar{\xi}). \quad (5.25)$$

Конец q может быть внешним.

$$(c) \quad \begin{array}{c} \text{diagram: a vertex with two incoming lines labeled } q, p \text{ from the left, and } r \text{ external line from the bottom. The vertex is labeled } \xi. \end{array} \sim \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)}} dE_{\xi, \bar{\xi}}(q) \frac{d\xi}{2\pi i y(\xi)} \frac{\partial^k}{\partial \xi^k} B(r, \xi), \quad k \geq 0, \quad r > \xi. \quad (5.26)$$

Здесь r может быть внешним концом. Если q – внешний конец, то $k = 0$ и r – тоже внешний конец.

$$(d) \quad \begin{array}{c} \text{diagram: a vertex with one incoming line labeled } q \text{ from the left, and } p, r \text{ external lines from the right and bottom. The vertex is labeled } \xi. \end{array} \sim \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)}} dE_{\xi, \bar{\xi}}(q) \frac{d\xi}{2\pi i y(\xi)}, \quad \xi > r. \quad (5.27)$$

Здесь q может быть внешним концом (а r не может по предположению).

$$(e) \quad \begin{array}{c} \text{diagram: a vertex with two incoming lines labeled } q, p \text{ from the left, and } r \text{ external line from the bottom. The vertex is labeled } \xi. \end{array} \sim \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)}} dE_{\xi, \bar{\xi}}(q) \frac{d\xi}{2\pi i y(\xi)}. \quad (5.28)$$

Здесь q может быть внешним концом.

Вершины с двумя присоединенными сплошными линиями.

$$(a) \quad \begin{array}{c} \text{diagram: a vertex with two incoming lines labeled } p, q \text{ from the left, and } k \text{ external lines from the top. The vertex is labeled } q. \end{array} \sim \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(q)}} dE_{q, \bar{q}}(p) \frac{y^{(k)}(q) dq}{2\pi i y(q)} B(r, q), \quad k \geq 1. \quad (5.29)$$

включать вычеты в нулях дополнительного многочлена $M(p)$ на нефизическом листе и, возможно, в точке ∞_- .

В полной аналогии со случаем 1ММ, для того чтобы обратить действие оператора вставки петли и построить выражение для собственно свободной энергии, можно применить H -оператор (3.17).

5.3. Обращение оператора вставки петли. Свободная энергия. Рассмотрим теперь, как оператор H_x , заданный выражением (3.17), действует на $W_{k,l}(x)$, а потом подействуем оператором вставки петли на результат. Как и раньше, получим:

$$\frac{\partial}{\partial V(p)}(H_x \cdot W_{k,l}(x)) = W_{k,l}(p) + H_x \cdot W_{k,l}(x, p). \quad (5.34)$$

Во втором члене, ввиду симметрии $W_{k,l}(p, q)$, в качестве корня древесных подграфов можно теперь взять точку p . Тогда оператор H_x всегда действует на $B(x, \xi)$ (или, возможно, на его производные по переменной ξ), где ξ – переменные интегрирования во внутренних вершинах.

Рассмотрим, как оператор $\partial/\partial V(x)$ действует на элементы фейнмановской диаграммной техники из п. 5.2. Имеются три различных случая.

(а) При действии на направленный пропагатор, оканчивающийся в любой (белой или черной) вершине, используется стандартное вариационное соотношение (3.15).

(б) При действии на ненаправленный внутренний пропагатор $\frac{\partial^k}{\partial q^k} B(p, q)$, $p \geq q$, $k \geq 0$, будем применять соотношение

$$\frac{\partial}{\partial V(p)} \frac{\partial^k}{\partial q^k} B(r, q) = r \text{ --- } \bigcirc_{\xi} \begin{matrix} \uparrow p \\ \downarrow q \end{matrix} \frac{\partial^k}{\partial q^k}, \quad (5.35)$$

в котором *откажемся* от последующего представления действия производной $\frac{\partial^k}{\partial q^k}$ в виде суммы диаграмм. В этом случае внешних B -линий нет, поскольку мы действуем на одноточечную резольвенту.

(с) Наконец, при действии на штриховые линии, входящие в черную вершину, с помощью соотношения (5.21) получим выражение из формулы (5.22); действие же на штриховые линии, входящие в белую вершину, очевидно равно нулю.

Рассмотрим теперь *обратное* действие H -оператора во всех трех случаях.

В первом случае, в котором имеется выходящий из вершины направленный пропагатор $dE_{p,q_0}(\xi)$ (может существовать только один такой направленный пропагатор, так как одна из линий обязана быть внешней), можно перекинуть контур интегрирования по переменной ξ через соответствующий контур для p ; при этом единственный вклад дается полюсом при $\xi = p$ (с *противоположным* знаком ввиду нашего выбора направлений интегрирования на рис. 2). Представим это графически в следующем виде

$$q \text{ --- } \bigcirc_{\xi} \begin{matrix} \uparrow H_x \\ \downarrow p \end{matrix} = - q \text{ --- } \bigcirc p. \quad (5.36)$$

Во втором случае вершина ξ в формуле (5.35) представляет собой самую внутреннюю вершину (т.е. из нее не выходит ни одного направленного ребра). При этом 1-форма $y(\xi) d\xi$, возникающая при действии оператора H (3.20), сокращается с соответствующей формой в подынтегральном выражении, выражение становится регулярным в точке ветвления, и вычет обращается в нуль. Графически представим это в виде

$$r \bullet \xrightarrow{\quad} \begin{array}{c} H_x \\ | \\ \bigcirc \\ | \\ q \end{array} \xleftarrow{\frac{\partial^k}{\partial q^k}} = 0, \quad k \geq 0. \quad (5.37)$$

Наконец в третьем случае действие H -оператора стирает новый B -пропагатор, возникающий в выражении (5.22), и одновременно возвращает белой вершине исходный черный цвет:

$$\begin{array}{c} \overbrace{\quad \quad \quad}^k \\ \bullet \bullet \bullet \\ \vdots \\ \bullet \bullet \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \bullet \quad \bullet \quad q \end{array} \xrightarrow{H_x} (\rightarrow) = \begin{array}{c} \overbrace{\quad \quad \quad}^k \\ \bullet \bullet \bullet \\ \vdots \\ \bullet \bullet \bullet \\ \swarrow \quad \searrow \\ p \bullet \quad \bullet \quad q \end{array} \xrightarrow{H_x} (\rightarrow), \quad k \geq 1. \quad (5.38)$$

Для $H_x \cdot W_k(x, p) = H_x \cdot \frac{\partial}{\partial V(x)} W_k(p)$ получим, что на каждом сплошном направленном ребре, на котором действие $\partial/\partial V(x)$ порождает новую (белую) вершину, обратное действие оператора H_x дает множитель -1 , на каждом ненаправленном ребре, на котором действие $\partial/\partial V(x)$ порождает новую вершину в соответствии с представлением (5.35), обратное действие H_x дает просто нуль, а для каждой черной вершины, действие на которую оператора вставки петли изменяет ее цвет на белый и добавляет новый B -пропагатор, обратное действие H_x дает множитель $+1$.

Поскольку полное число направленных ребер совпадает с полным числом вершин, а вклады черных вершин противоположны вкладам направленных ребер, полный множитель, на который будет умножаться диаграмма, в точности равен минус числу белых вершин, которое равно $2k + l - 1$ для *любого* графа, дающего вклад в $W_{k,l}(p)$. Поэтому получим:

$$H_x \cdot W_{k,l}(x, p) = -(2k + l - 1)W_k(p),$$

и с учетом (5.34) приходим к выражению

$$\frac{\partial}{\partial V(p)} (H_x \cdot W_{k,l}(x)) = -(2 - 2k - l) \frac{\partial}{\partial V(p)} \mathcal{F}_{k,l}. \quad (5.39)$$

Поскольку вся зависимость от чисел заполнения и t_0 уже фиксирована, имеет место соотношение

$$\mathcal{F}_{k,l} = \frac{1}{2k + l - 2} H_x \cdot W_{k,l}(x). \quad (5.40)$$

Это наш окончательный ответ для свободной энергии. С его помощью можно вычислить *все* $\mathcal{F}_{k,l}$, кроме вклада при $k = 1, l = 0$ (приближение тора в 1ММ) и поправки второго порядка по γ (член $\mathcal{F}_{0,2}$). Выражение для $\mathcal{F}_{1,0}$ было получено прямым интегрированием в разделе 4, а вычислению члена $\mathcal{F}_{0,2}$

посвящен следующий пункт. Все остальные порядки могут быть теперь вычислены согласованным образом. Для этого достаточно ввести *новую вершину* $\odot$, в которой следует поместить (нелокальный) интегральный член

$$\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(\xi)}} \frac{d\xi}{2\pi i} \frac{\int_{\xi}^{\xi} y(s) ds}{y(\xi)}.$$

Этот член присутствовал и в случае 1ММ, но там представлялось возможным сместить начальную точку интегрирования в точку ветвления μ_{α} в окрестности каждой точки ветвления; теперь это уже не так, и мы должны рассматривать глобальные интегрирования. Заметим, однако, что вводить нелокальные члены приходится *только* в самом последнем интегрировании; все внутренние интегрирования сводятся к вычислению вычетов в точках ветвления и в нулях многочлена $M(p)$.

Например, первая поправка к свободной энергии имеет вид

$$-1 \cdot \mathcal{F}_{0,1} = \odot \cdot \quad (5.41)$$

Это дает

$$\mathcal{F}_{0,1} = - \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(q)}} \frac{\int^q y}{y(q)} y'(q) \frac{dq}{2\pi i} = \oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(q)}} y(q) \log y(q) \frac{dq}{2\pi i},$$

т.е. мы получаем квазиклассическую дайсоновскую поправку [71].

5.4. Вычисление $\mathcal{F}_{0,2}$. В работе [47] было показано, что формальное применение диаграммного представления для $\mathcal{F}_{0,2}$ дает ответ, равный нулю.

Мы можем тем не менее сделать предположение о возможном виде члена $\mathcal{F}_{0,2}$. Представляется весьма вероятным, что он имеет вид аномального поляковского члена $\iint R \frac{1}{\Delta}$, где R – кривизна (двумерной метрики) и $1/\Delta$ – функция Грина оператора Лапласа, которая в нашем случае задается как раз логарифмом главной формы. Кривизна выражается через функцию y как $R \sim y'/y$. Таким образом, имеются два естественных кандидата на роль $\mathcal{F}_{0,2}$:

$$\mathcal{F}_{0,2} \sim \iint dq dp \frac{y'(q)}{y(q)} \log E(p, q) \frac{y'(p)}{y(p)},$$

где E – главная форма, или

$$\mathcal{F}_{0,2} \sim \iint dq dp \log y(q) B(p, q) \log y(p),$$

но ни одно из этих выражений не является корректно определенным. В первом выражении возникает логарифмический разрез при $p = q$, и его невозможно записать в контурно-независимом виде; более того, оба этих выражения расходятся при интегрировании по носителю собственных значений. Поэтому необходимо предложить другое представление, имитирующее такой член. Корректно определенное выражение получится, если произвести интегрирование по частям только один раз, что приводит к выражению вида

$$\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(q)}} \frac{dq}{2\pi i} \frac{y'(q)}{y(q)} \int_{\mathcal{D}} dE_{q,\bar{q}}(p) \log y(p) dp, \quad (5.42)$$

где второй интеграл берется непосредственно по носителю распределения собственных значений $\mathcal{D}$.

Вариации логарифмического члена в формуле (5.42) уже могут быть представлены в виде контурных интегралов. Опуская детали, которые читатель может найти в работе [47], представим здесь только результат вычислений. Единственный “лишний” член при вариации будет иметь вид

$$-\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(s)}} dE_{s,\bar{s}}(r) \frac{1}{y(s)} \left(\frac{y''(s)}{y(s)} - \frac{y'^2(s)}{y^2(s)} \right) \equiv -\widehat{d\mathcal{E}}_{r,s} \left(\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{y'(s)}{y(s)} \right) \right),$$

где использовано стандартное обозначение (4.10). Но этот член уже можно вычислить посредством вычетов в точках ветвления, что даст (см. (4.10))

$$\sum_{\alpha=1}^{2n} \widehat{d\mathcal{E}}_{r,s} \left(\frac{1}{2(s - \mu_\alpha)^2} \right) = -\frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial V(r)} \log \left(\prod_{\alpha=1}^{2n} M_\alpha^{(1)} \Delta(\mu) \right), \quad (5.43)$$

где, как и раньше, $M_\alpha^{(1)} \equiv M(p)|_{p=\mu_\alpha}$ – первые *моменты* потенциала и $\Delta(\mu)$ – определитель Вандермонда, составленный из μ_α .

Объединяя теперь все члены, получим:

$$\mathcal{F}_{0,2} = -\oint_{\mathcal{C}_{\mathcal{D}}^{(q)}} \frac{dq}{2\pi i} \frac{y'(q)}{y(q)} \int_D dE_{q,\bar{q}}(p) \log y(p) dp - \frac{1}{3} \log \left(\prod_{\alpha=1}^{2n} M_\alpha^{(1)} \Delta(\mu) \right), \quad (5.44)$$

и из этого результата видно, что, по аналогии с ответом П. Вигмана и А. Забродина [51] для соответствующей поправки в случае модели нормальных матриц, у нас возникает *квантовый поправочный* член (второй член в формуле (5.44)).

6. Заключение

В работе описано построение фейнмановской диаграммной техники, позволяющей найти свободную энергию и многоточечные корреляторы в 1ММ с жесткими стенками и в модели собственных значений (бета-модели) в отсутствии жестких стенок. Отметим, что подобная диаграммная техника может быть построена даже в случае двухматричной модели [48]. (В настоящее время она уже построена в случае отсутствия жестких стенок и при $\beta = 1$.) Можно задаться вопросом о том, на какие еще модели можно обобщить эту технику. Важную роль в этой технике, в частности, играет свойство *локальности*, утверждающее, что в некотором смысле нам достаточно знать только саму (редуцированную) риманову поверхность (спектральную кривую) и *локальное* поведение производящего дифференциала dS в окрестностях точек ветвления комплексной структуры на этой поверхности. Представляется весьма вероятным, что наше построение можно обобщить на случай двухматричной модели с жесткими стенками и на случай дайсоновского газа в двумерной (бета-) модели (без жестких стенок); работа в двух этих направлениях ведется в настоящее время.

Тем не менее, формулировка такой техники уже в простейшем случае гибридной модели в одноматричном случае (бета-модель в присутствии жестких стенок) затруднена ввиду отсутствия условия локальности (по крайней мере в

своем первоначальном значении) в модели собственных значений: вычисление интегралов по контурам, окружающим носитель распределения собственных значений, не сводится теперь к взятию вычетов в одних только точках ветвления. Поэтому условие локальности при этом теряется, а вся техника доказательства, например условия согласования, была как раз основана на этом условии. С другой стороны, при вычислении действия пространственной производной на элементы нашей диаграммной техники широко использовалось то обстоятельство, что вариационные формулы Рауха можно *имитировать* вычислением вычетов с введенным множителем $y'(\lambda)/y(\lambda)$ в окрестности каждой точки ветвления; в случае, когда присутствуют жесткие стенки, этот множитель приводит к появлению вычетов противоположных знаков в динамических точках ветвления и в точках ветвления, отвечающих жестким стенкам, что делает нашу методику неприменимой в буквальном смысле. Вопрос о возможной полномасштабной адаптации этой техники к случаю гибридной модели остается открытым. Тем не менее, с помощью нашей техники вполне возможно найти несколько первых порядков разложения свободной энергии также и в этой модели. Мы надеемся вернуться к этой задаче в последующих публикациях.

Благодарности. Автор признателен своим соавторам Б. Эйнару, А. Маршакову, А. Миронову, Н. Орантину и Д. Васильеву. Также следует отметить плодотворные обсуждения с М. Бертолой, Д. Короткиным и Дж. Харнадом во время посещения Университета Конкордия и Центра математических исследований в Монреале, Канада, которые заслуживают специального упоминания за свою замечательную творческую атмосферу.

Работа была частично поддержана РФФИ (грант № 05-01-00498), Грантом поддержки ведущих научных школ 2052.2003.1, Программой “Математические методы нелинейной динамики”, грантом ANS “Géométrie et Intégrabilité en Physique Mathématique” (ANR-05-BLAN-0029-01) и Европейским сообществом (FP6 Marie Curie RTN *ENIGMA*, контракт MRTN-CT-2004-5652).

Список литературы

- [1] G. 't Hooft, “A two-dimensional model for mesons”, *Nuclear Phys. B*, **75**:3 (1974), 461–473.
- [2] E. Brézin, C. Itzykson, G. Parisi, J.B. Zuber, “Planar diagrams”, *Comm. Math. Phys.*, **59**:1 (1978), 35–51.
- [3] J. Ambjørn, L. Chekhov, Yu. Makeenko, “Higher genus correlators from the Hermitian one-matrix model”, *Phys. Lett. B*, **282**:3–4 (1992), 341–348; [arXiv: hep-th/9203009](#).
- [4] J. Ambjørn, L. Chekhov, C. F. Kristjansen, Yu. Makeenko, “Matrix model calculations beyond the spherical limit”, *Nuclear Phys. B*, **404**:1–2 (1993), 127–172; “Erratum”, *Nuclear Phys. B*, **449**:3 (1995), 681; [arXiv: hep-th/9302014](#).
- [5] D. J. Gross, A. A. Migdal, “Nonperturbative two-dimensional quantum gravity”, *Phys. Rev. Lett.*, **64**:2 (1990), 127–130.
- [6] É. Brézin, V. A. Kazakov, “Exactly solvable field theories of closed strings”, *Phys. Lett. B*, **236**:2 (1990), 144–150.
- [7] J. Jurkiewicz, “Regularization of one-matrix models”, *Phys. Lett. B*, **245**:2 (1990), 178–184.
- [8] F. Cachazo, K. Intriligator, C. Vafa, “A large N duality via a geometric transition”, *Nuclear Phys. B*, **603**:1–2 (2001), 3–41; [arXiv: hep-th/0103067](#).

- [9] F. Cachazo, C. Vafa, “ $N = 1$ and $N = 2$ geometry from fluxes”, [arXiv: hep-th/0206017](#).
- [10] R. Dijkgraaf, C. Vafa, “Matrix models, topological strings, and supersymmetric gauge theories”, *Nuclear Phys. B*, **644**:1–2 (2002), 3–20; [arXiv: hep-th/0206255](#).
- [11] R. Dijkgraaf, C. Vafa, “On geometry and matrix models”, *Nuclear Phys. B*, **644**:1/2 (2002), 21–39; [arXiv: hep-th/0207106](#).
- [12] R. Dijkgraaf, C. Vafa, “A perturbative window into non-perturbative physics”, [arXiv: hep-th/0208048](#).
- [13] K. Demeterfi, N. Deo, S. Jain, C.-I. Tan, “Multiband structure and critical behavior of matrix models”, *Phys. Rev. D*, **42** (1990), 4105–4122.
- [14] Č. Crnković, G. Moore, “Multicritical multi-cut matrix models”, *Phys. Lett. B*, **257**:3–4 (1991), 322–328.
- [15] G. Akemann, J. Ambjørn, “New universal spectral correlators”, *J. Phys. A*, **29**:22 (1996), L555–L560; [arXiv: cond-mat/9606129](#).
- [16] G. Bonnet, F. David, B. Eynard, “Breakdown of universality in multi-cut matrix models”, *J. Phys. A*, **33**:38 (2000), 6739–6768; [arXiv: cond-mat/0003324](#).
- [17] I. M. Krichever, “The τ -function of the universal Whitham hierarchy, matrix models and topological field theories”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **47**:4 (1994), 437–475; [arXiv: hep-th/9205110](#).
- [18] A. Marshakov, A. Mironov, “Seiberg–Witten systems and Whitham hierarchies: A short review”, [arXiv: hep-th/9809196](#).
- [19] A. Marshakov, *Seiberg–Witten theory and integrable systems*, World Scientific, River Edge, NJ, 1999.
- [20] L. Chekhov, A. Mironov, “Matrix models vs. Seiberg–Witten/Whitham theories”, *Phys. Lett. B*, **552**:3–4 (2003), 293–302; [arXiv: hep-th/0209085](#).
- [21] V. A. Kazakov, A. Marshakov, “Complex curve of the two matrix model and its tau-function”, *J. Phys. A*, **36**:12 (2003), 3107–3136; [arXiv: hep-th/0211236](#).
- [22] A. Gerasimov, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, A. Orlov, “Matrix models of two-dimensional gravity and Toda theory”, *Nuclear Phys. B*, **357**:2–3 (1991), 565–618.
- [23] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Orlov, A. Zabrodin, “Matrix models among integrable theories: forced hierarchies and operator formalism”, *Nuclear Phys. B*, **366**:3 (1991), 569–601.
- [24] А. Ю. Морозов, “Интегрируемость и матричные модели”, *УФН*, **164**:1 (1994), 3–62.
- [25] A. A. Migdal, “Loop equations and $1/N$ expansion”, *Phys. Rep.*, **102**:4 (1983), 199–290.
- [26] J. Ambjørn, J. Jurkiewicz, Yu. M. Makeenko, “Multiloop correlators for two-dimensional quantum gravity”, *Phys. Lett. B*, **251**:4 (1990), 517–524.
- [27] Yu. Makeenko, “Loop equations in matrix models and in 2D quantum gravity”, *Modern Phys. Lett. A*, **6**:21 (1991), 1901–1913.
- [28] F. David, “Loop equations and nonperturbative effects in two-dimensional quantum gravity”, *Modern Phys. Lett. A*, **5**:13 (1990), 1019–1029.
- [29] A. Mironov, A. Morozov, “On the origin of Virasoro constraints in matrix models: Lagrangian approach”, *Phys. Lett. B*, **252**:1 (1990), 47–52.
- [30] J. Ambjørn, Yu. M. Makeenko, “Properties of loop equations for the Hermitean matrix model and for two-dimensional quantum gravity”, *Mod. Phys. Lett. A*, **5**:22 (1990), 1753–1763.
- [31] H. Itoyama, Y. Matsuo, “Noncritical Virasoro algebra of the $d < 1$ matrix model and quantized string field”, *Phys. Lett. B*, **255**:2 (1991), 202–208.
- [32] A. Klemm, M. Mariño, S. Theisen, “Gravitational corrections in supersymmetric gauge theory and matrix models”, *J. High Energy Phys.*, **0303**:051 (2003), 23; [arXiv: hep-th/0211216](#).

- [33] A. Alexandrov, A. Morozov, A. Mironov, “Partiton functions of matrix models: First special functions of string theory”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **19**:24 (2004), 4127–4163; [arXiv: hep-th/0310113](#).
- [34] A. Alexandrov, A. Mironov, A. Morozov, “Solving Virasoro constraints in matrix models”, *Fortschr. Phys.*, **53**:5–6 (2005), 512–521; [arXiv: hep-th/0412205](#).
- [35] L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev, “DV and WDVV”, *Phys. Lett. B*, **562**:3–4 (2003), 323–338; [arXiv: hep-th/0301071](#).
- [36] L. Chekhov, A. Marshakov, A. Mironov, D. Vasiliev, “Complex geometry of matrix models”, [arXiv: hep-th/0506075](#).
- [37] M. Bertola, “Second and third order observables of the two-matrix model”, *J. High Energy Phys.*, **0311**:062 (2003), 30; [arXiv: hep-th/0309192](#).
- [38] G. Akemann, “Higher genus correlators for the Hermitian matrix model with multiple cuts”, *Nuclear Phys.*, **B482**:1–2 (1996), 403–430; [arXiv: hep-th/9606004](#).
- [39] I. K. Kostov, “Conformal field theory techniques in random matrix models”, [arXiv: hep-th/9907060](#).
- [40] R. Dijkgraaf, A. Sinkovics, M. Temürhan, “Matrix models and gravitational corrections”, *Adv. Theor. Math. Phys.*, **7**:6 (2003), 1155–1174; [arXiv: hep-th/0211241](#).
- [41] Al. B. Zamolodchikov, “Conformal scalar field on the hyperelliptic curve and critical Ashkin–Teller multipoint correlation functions”, *Nuclear Phys. B*, **285** (1987), 481–503.
- [42] Л. О. Чехов, “Поправки рода один к многоразрезным решениям матричной модели”, *ТМФ*, **141**:3 (2004), 358–374; [arXiv: hep-th/0401089](#).
- [43] B. Eynard, A. Kokotov, D. Korotkin, “Genus one contribution to free energy in Hermitian two-matrix model”, *Nuclear Phys. B*, **694**:3 (2004), 443–472; [arXiv: hep-th/0403072](#).
- [44] B. Eynard, “Topological expansion for the 1-Hermitian matrix model correlation functions”, *J. High Energy Phys.*, **0411**:031 (2004), 35; [arXiv: hep-th/0407261](#).
- [45] L. Chekhov, B. Eynard, “Hermitian matrix model free energy: Feynman graph technique for all genera”, *J. High Energy Phys.*, **0603**:014 (2006); [arXiv: hep-th/0504116](#).
- [46] L. Chekhov, “Matrix models with hard walls: Geometry and solutions”, *J. Phys. A* (to appear); [arXiv: hep-th/0602013](#).
- [47] L. Chekhov, B. Eynard, “Matrix eigenvalue model: Feynman graph technique for all genera”, [arXiv: math-ph/0604014](#).
- [48] L. Chekhov, B. Eynard, N. Orantin, “Free energy topological expansion for the 2-matrix model”, [arXiv: math-ph/0603003](#).
- [49] B. Eynard, “Loop equations for the semiclassical 2-matrix model with hard edges”, *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, **10**:006 (2005), 20; [arXiv: math-ph/0504002](#).
- [50] M. Bertola, “Two-matrix model with semiclassical potentials and extended Whitham hierarchy”, [arXiv: hep-th/0511295](#).
- [51] A. Zabrodin, P. Wiegmann, “Large N expansion for the 2D Dyson gas”, [arXiv: hep-th/0601009](#).
- [52] E. Witten, “On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity”, *Nuclear Phys. B*, **340**:2–3 (1990), 281–332.
- [53] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, “Topological strings in $d < 1$ ”, *Nuclear Phys. B*, **352**:1 (1991), 59–86.
- [54] A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, “WDVV-like equations in $\mathcal{N} = 2$ SUSY Yang–Mills theory”, *Phys. Lett. B*, **389**:1 (1996), 43–52; [arXiv: hep-th/9607109](#).
- [55] H. Itoyama, A. Morozov, “The Dijkgraaf–Vafa prepotential in the context of general Seiberg–Witten theory”, *Nuclear Phys. B*, **657**:1–3 (2003), 53–78; [arXiv: hep-th/0211245](#).

- [56] L. Chekhov, A. Zabrodin, “A critical matrix model for non-oriented string”, *Mod. Phys. Lett. A*, **6**:34 (1991), 3143–3152.
- [57] B. Eynard, *Large N expansion of the 2-matrix model, multicut case*, Preprint SPHT-03/106, CEA/SPHT, Saclay, 2003; [arXiv: math-ph/0307052](#).
- [58] P. Wiegmann, A. Zabrodin, “Large N expansion for normal and complex matrix ensembles”, [arXiv: hep-th/0309253](#).
- [59] M. Adler, P. van Moerbeke, “Hermitian, symmetric and symplectic random ensembles: PDEs for the distribution of the spectrum”, *Ann. of Math. (2)*, **153**:1 (2001), 149–189; [arXiv: math-ph/0009001](#).
- [60] G. Szegő, *Orthogonal polynomials*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1975.
- [61] N. Seiberg, E. Witten, “Electric-magnetic duality, monopole condensation and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang–Mills theory”, *Nuclear Phys. B*, **426**:1 (1994), 19–52; “Erratum”, *Nuclear Phys. B*, **430** (1994), 485–486; [arXiv: hep-th/9407087](#).
- [62] N. Seiberg, E. Witten, “Monopoles, duality and chiral symmetry breaking in $N = 2$ supersymmetric QCD”, *Nuclear Phys. B*, **431**:3 (1994), 484–550.
- [63] A. Gorsky, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, “RG equations from Whitham hierarchy”, *Nuclear Phys. B*, **527**:3 (1998), 690–716; [arXiv: hep-th/9802007](#).
- [64] J.D. Fay, *Theta functions on Riemann surfaces*, Lecture Notes in Math., **352**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
- [65] H.E. Rauch, “Weierstrass points, branch points, and moduli of Riemann surfaces”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **12** (1959), 543–560.
- [66] A. Boyarsky, A. Marshakov, O. Ruchayskiy, P. Wiegmann, A. Zabrodin, “Associativity equations in dispersionless integrable hierarchies”, *Phys. Lett. B*, **515**:3–4 (2001), 483–492; [arXiv: hep-th/0105260](#).
- [67] F. David, “Non-perturbative effects in matrix models and vacua of two dimensional gravity”, *Phys. Lett. B*, **302**:4 (1993), 403–410; [arXiv: hep-th/9212106](#).
- [68] O. Lechtenfeld, “Eigenvalue tunneling in matrix models”, *Internat. J. Modern Phys. A*, **7**:10 (1992), 2335–2354.
- [69] S. Kharchev, A. Marshakov, A. Mironov, A. Morozov, “Generalized Kontsevich Model versus Toda hierarchy and discrete matrix models”, *Nuclear Phys. B*, **397**:1–2 (1993), 339–378; [arXiv: hep-th/9203043](#).
- [70] E.W. Barnes, “The theory of the double gamma function”, *Philos. Trans. Roy. Soc. A*, **196** (1901), 265–387.
- [71] F.J. Dyson, “Statistical theory of the energy levels of complex systems. I”, *J. Math. Phys.*, **3** (1962), 140–156; “II”, , 157–165; “III”, , 166–175.

Л. О. Чехов (L. O. Chekhov)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН,
 Институт теоретической и экспериментальной физики,
 Москва,
 Русско-Французская лаборатория им. Ж. В. Понселе,
 Москва
E-mail: chekhov@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
 28.05.2006