Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Системы интегралов в инволюции и уравнения ассоциативности, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1755>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.196.121.252

26 апреля 2023 г., 14:59:37

Системы интегралов в инволюции и уравнения ассоциативности

О. И. Мохов

В данной работе, в частности, доказано, что уравнения ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля (см. [1]–[3]) эквивалентны условию, что все функционалы, плотности которых являются частными производными первого порядка некоторой функции $F(u^1, \dots, u^N)$ (“потенциала”), находятся в инволюции относительно постоянной однородной скобки Пуассона первого порядка. Действительно, рассмотрим произвольную постоянную однородную скобку Пуассона первого порядка, т.е. теоретико-полеую скобку Пуассона

$$\{u^i(x), u^j(y)\}_1 = \eta^{ij} \delta'(x - y), \quad (1)$$

где η^{ij} – произвольная симметричная постоянная матрица, $\eta^{ij} = \eta^{ji}$, $\eta^{ij} = \text{const}$; $u = (u^1, \dots, u^N)$ – фиксированные локальные координаты в некоторой рассматриваемой односвязной области U ; $u^i(x)$, $i = 1, \dots, N$, – функции одной переменной (N скалярных полей на одномерном многообразии), $u(x) = (u^1(x), \dots, u^N(x))$ – N -компонентное скалярное поле со значениями в области U . Пусть $F(u^1, \dots, u^N)$ – произвольная гладкая функция N переменных, определенная в области U . Рассмотрим на пространстве полей $u(x)$ N функционалов $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, N$, плотности которых являются частными производными первого порядка функции $F(u^1, \dots, u^N)$:

$$\mathcal{F}_i = \int \frac{\partial F}{\partial u^i}(u^1(x), \dots, u^N(x)) dx, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. *Функционалы $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, N$, находятся в инволюции относительно постоянной однородной скобки Пуассона первого порядка (1), т.е. $\{\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j\}_1 = 0$, $i, j = 1, \dots, N$, тогда и только тогда, когда функция $F(u^1, \dots, u^N)$ удовлетворяет уравнениям ассоциативности двумерных топологических квантовых теорий поля:*

$$\frac{\partial^3 F}{\partial u^k \partial u^m \partial u^i} \eta^{ij} \frac{\partial^3 F}{\partial u^j \partial u^n \partial u^l} = \frac{\partial^3 F}{\partial u^l \partial u^m \partial u^i} \eta^{ij} \frac{\partial^3 F}{\partial u^j \partial u^n \partial u^k}. \quad (3)$$

Матрица η^{ij} не предполагается здесь невырожденной. Если для $F(u^1, \dots, u^N)$ выполнены уравнения (3), то для любых значений координат $u^1, \dots, u^N$ в области U N -мерная алгебра $\mathcal{A}$ с базисом $(e_1, \dots, e_N)$ и умножением $e_i \cdot e_j = c_{ij}^k(u^1, \dots, u^N) e_k$, где $c_{ij}^k(u^1, \dots, u^N) = \eta^{ks} \partial^3 F / (\partial u^s \partial u^i \partial u^j)$, является ассоциативной. В топологических теориях поля матрица η^{ij} является невырожденной (она играет роль плоской контравариантной метрики) и в этом случае алгебра $\mathcal{A}$ является ассоциативной тогда и только тогда, когда выполнены уравнения (3), называемые уравнениями ассоциативности или уравнениями Виттена–Дейкграфа–Верлинде–Верлинде и Дубровина [1]–[3]. Матрица η_{ij} (ковариантная метрика), обратная к невырожденной матрице η^{ij} , $\eta_{is} \eta^{sj} = \delta_i^j$, задает невырожденную инвариантную симметричную билинейную форму $\langle e_i, e_j \rangle = \eta_{ij}$ на алгебре $\mathcal{A}$: $\langle e_i \cdot e_j, e_k \rangle = \langle e_i, e_j \cdot e_k \rangle$. Переопределенная нелинейная система уравнений ассоциативности (3) является совместной и интегрируемой методом обратной задачи. Большое количество примеров точных решений уравнений ассоциативности (3) см. в [3]. Пусть матрица η^{ij} является невырожденной, $\det \eta^{ij} \neq 0$. В работе автора [4] доказано, что если функция $F(u^1, \dots, u^N)$ является решением уравнений ассоциативности (3), то оператор

$$M^{ij} = \eta^{mn} \eta^{ip} \eta^{jr} \frac{\partial^3 F}{\partial u^p \partial u^m \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ \frac{\partial^3 F}{\partial u^r \partial u^n \partial u^s} u_x^s \quad (4)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда содействия отечественной науке, Российского фонда фундаментальных исследований (гранты № 03-01-00782 и № 05-01-00170) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4182.2006.1).

является гамильтоновым.

ТЕОРЕМА 2. Если функция $F(u^1, \dots, u^N)$ удовлетворяет уравнениям ассоциативности (3), то функционалы $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, N$, находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, задаваемой гамильтоновым оператором (4), т.е. $\{\mathcal{F}_i, \mathcal{F}_j\}_2 = 0$, $i, j = 1, \dots, N$, где

$$\{u^i(x), u^j(y)\}_2 = \eta^{mn} \eta^{ip} \eta^{jr} \frac{\partial^3 F}{\partial u^p \partial u^m \partial u^k} u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^3 F}{\partial u^r \partial u^n \partial u^s} u_x^s \delta(x-y) \right). \quad (5)$$

В работе автора [4] доказано, что скобки Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_1$ и $\{\cdot, \cdot\}_2$ согласованы и образуют пучок $\lambda_1 \{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda_2 \{\cdot, \cdot\}_2$ скобок Пуассона, где λ_1 и λ_2 – произвольные константы, и для любых констант λ_1 и λ_2 скобка $\{\cdot, \cdot\}_{\lambda_1, \lambda_2} = \lambda_1 \{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda_2 \{\cdot, \cdot\}_2$ является скобкой Пуассона.

СЛЕДСТВИЕ 1. Если функция $F(u^1, \dots, u^N)$ удовлетворяет уравнениям ассоциативности (3), то функционалы $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, N$, находятся в инволюции относительно пучка скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\lambda_1, \lambda_2} = \lambda_1 \{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda_2 \{\cdot, \cdot\}_2$, где λ_1 и λ_2 – произвольные константы.

Рассмотрим также на пространстве полей $u(x)$ функционал $\mathcal{F}$, плотностью которого является сам “потенциал” $F(u^1(x), \dots, u^N(x))$: $\mathcal{F} = \int F(u^1(x), \dots, u^N(x)) dx$.

ТЕОРЕМА 3. Функционал $\mathcal{F}$ и функционалы $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, N$, находятся в инволюции относительно постоянной однородной скобки Пуассона первого порядка (1) тогда и только тогда, когда функция $F(u^1, \dots, u^N)$ удовлетворяет уравнениям

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^k \partial u^i} \eta^{ij} \frac{\partial^3 F}{\partial u^j \partial u^n \partial u^l} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^l \partial u^i} \eta^{ij} \frac{\partial^3 F}{\partial u^j \partial u^n \partial u^k}. \quad (6)$$

Уравнения (6) возникли в другом контексте в работах автора [5]–[7] и играют важную роль в теории согласованных скобок Пуассона гидродинамического типа, теории уравнений ассоциативности и теории фробениусовых многообразий.

ТЕОРЕМА 4. Если функция $F(u^1, \dots, u^N)$ удовлетворяет уравнениям (6), то функционал $\mathcal{F}$ и функционалы $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, N$, находятся в инволюции относительно скобки Пуассона, задаваемой гамильтоновым оператором (4).

СЛЕДСТВИЕ 2. Если функция $F(u^1, \dots, u^N)$ удовлетворяет уравнениям (6), то функционал $\mathcal{F}$ и функционалы $\mathcal{F}_i$, $i = 1, \dots, N$, находятся в инволюции относительно пучка скобок Пуассона $\{\cdot, \cdot\}_{\lambda_1, \lambda_2} = \lambda_1 \{\cdot, \cdot\}_1 + \lambda_2 \{\cdot, \cdot\}_2$, где λ_1 и λ_2 – произвольные константы.

Список литературы

- [1] E. Witten, *Surv. Differ. Geom.*, **1** (1991), 243–310. [2] R. Dijkgraaf, H. Verlinde, E. Verlinde, *Nuclear Phys. B*, **352**:1 (1991), 59–86. [3] B. Dubrovin, *Integrable systems and quantum groups* (Montecatini Terme, 1993), *Lecture Notes in Math.*, **1620**, 1996, 120–348; [arXiv: hep-th/9407018](#). [4] О. И. Мохов, *Функц. анализ и его прилож.*, **40**:1 (2006), 14–29; [arXiv: hep-th/0406292](#). [5] О. И. Мохов, *УМН*, **53**:2 (1998), 153–154. [6] О. И. Mokhov, *Rep. Math. Phys.*, **43**:1/2 (1999), 247–256. [7] О. И. Мохов, *Солитоны, геометрия, топология – на перекрестках*, Труды МИАН, **225**, 1999, 284–300.

О. И. Мохов (O. I. Mokhov)

Центр нелинейных исследований

при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

E-mail: mokhov@mi.ras.ru, mokhov@landau.ac.ru, mokhov@bk.ru

Представлено С. П. Новиковым

Принято редколлегией

02.06.2006