Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Ширяев, Доказательство неравенства Пуанкаре–Чернова и логарифмического неравенства Соболева методами стохастического исчисления для броуновского движения, *УМН*, 2006, том 61, выпуск 3, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm1756>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 17:01:03

**Доказательство неравенства Пуанкаре–Чернова и
логарифмического неравенства Соболева методами
стохастического исчисления для броуновского движения**

А. Н. Ширяев

1. Пусть $\xi = \xi(\omega)$ – стандартная нормальная, $\mathcal{N}(0, 1)$, случайная величина, функция $g = g(x) \in C^1$, $x \in \mathbb{R}$, $Eg(\xi) = 0$ и $Eg^2(\xi) < \infty$. Известное *неравенство Пуанкаре–Чернова* (см., например, [1]–[6]) утверждает, что

$$Eg^2(\xi) \leq E(g'(\xi))^2. \quad (1)$$

(Без предположения $Eg(\xi) = 0$ это неравенство имеет вид $Dg(\xi) \leq E(g'(\xi))^2$.)

Если $g \in C^1$, $Eg^2(\xi) = 1$ и $E(g'(\xi))^2 < \infty$, то оказывается, что $Eg^2(\xi) \log g^2(\xi) < \infty$ (иными словами, если $g \in L^2$, $g' \in L^2$, то $g \in L^2 \log L^2$, где $\|g\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}} g^2(x) \varphi(x) dx$ и $\varphi(x) = (2\pi)^{-1/2} e^{-x^2/2}$). Вытекает это из *логарифмического неравенства Соболева*

$$Eg^2(\xi) \log g^2(\xi) \leq 2E(g'(\xi))^2, \quad (2)$$

установленного впервые в работе Л. Гросса [5]. (Если не предполагать, что выполнено условие $Eg^2(\xi) = 1$, то это неравенство имеет такой вид: *энтропия* $Eg^2(\xi) \log g^2(\xi) - Eg^2(\xi) \log Eg^2(\xi) \leq 2E(g'(\xi))^2$; константа 2 неумлучшаема.)

Известны разные доказательства неравенства Пуанкаре–Чернова и логарифмического неравенства Соболева (см., например, [1]–[8]). Ниже мы даем прозрачные доказательства этих неравенств, основанные на идее привлечения броуновского движения и использовании его стандартных свойств.

2. Пусть $B = (B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение (при $t = 1$ распределение B_1 совпадает с распределением ξ , что далее будет использовано). Пусть $E|h(B_T)| < \infty$ для некоторого $T > 0$, где $h = h(x)$ – измеримая функция, $x \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим мартингал $M_t = E[h(B_T) | \mathcal{F}_t]$, $t \leq T$, где $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Понятно, что $M_t = E[h(B_T) | B_t] = F(t, B_t)$, где $F(t, x)$ – некоторая измеримая функция (в качестве которой можно взять $E[h(B_T) | B_t = x]$). Для $F(t, x)$ справедливо обратное уравнение Колмогорова $\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 0$, и формула Ито дает для каждого $u \leq T$, что

$$F(u, B_u) = F(0, B_0) + \int_0^u \frac{\partial F}{\partial x}(t, B_t) dB_t, \quad (3)$$

т.е.

$$M_u = M_0 + \int_0^u \frac{\partial F}{\partial x}(t, B_t) dB_t. \quad (4)$$

Если $E|h(B_T)| < \infty$, $E|h'(B_T)| < \infty$, то интегрированием по частям находим для $F(t, x) = \int_{\mathbb{R}} h(y) \varphi_{T-t}(y|x) dy$ с $\varphi_s(y|x) = (1/\sqrt{2\pi s}) e^{-(y-x)^2/(2s)}$, что $\frac{\partial F}{\partial x}(t, x) = \int_{\mathbb{R}} h'(y) \varphi_{T-t}(y|x) dy = E[h'(B_T) | B_t = x]$, и из (4) видим, что для M_u , $u \leq T$, справедливо стохастическое представление

$$M_u = M_0 + \int_0^u E[h'(B_T) | \mathcal{F}_t] dB_t, \quad (5)$$

и, в частности, для $h(B_T)$ имеет место представление

$$h(B_T) = Eh(B_T) + \int_0^T E[h'(B_T) | \mathcal{F}_t] dB_t, \quad (6)$$

которое можно было бы получить и из известной формулы Кларка–Окона, требующей обращения к производной Маллявена; см. также [2], [9].

3. Для доказательства неравенства Пуанкаре–Чернова возьмем в (6) $h = g$ с $Eg(B_T) = 0$, $Eg^2(B_T) < \infty$ и $E(g'(B_T))^2 < \infty$. По свойствам стохастических интегралов и неравенству Иенсена

$$\begin{aligned} Eg^2(B_T) &= E \int_0^T (E[g'(B_T) | \mathcal{F}_t])^2 dt \leq E \int_0^T E[(g'(B_T))^2 | \mathcal{F}_t] dt \\ &= \int_0^T E(g'(B_T))^2 dt = T E(g'(B_T))^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Положив $N_T = E[g'(B_T) | \mathcal{F}_t]$, $t \leq T$, видим, что N_t^2 , $t \leq T$, – субмартиггал и, значит, $EN_t^2 \geq EN_0^2$, $t \leq T$. Тем самым, из (7) находим: $T(Eg'(B_T))^2 \leq Eg^2(B_T) \leq T E(g'(B_T))^2$, что при $T = 1$ дает *двустороннее неравенство Пуанкаре–Чернова*

$$(Eg'(\xi))^2 \leq Eg^2(\xi) \leq E(g'(B_T))^2.$$

4. Для доказательства логарифмического неравенства Соболева воспользуемся представлением (5) с $h = g^2$, $Eg^2(B_T) = 1$. Получим: $M_u = 1 + \int_0^u E[h'(B_T) | \mathcal{F}_t] dB_t$, где $h' = (g^2)' = 2gg'$. Отсюда $dM_t = E[h'(B_T) | \mathcal{F}_t] dB_t$, $M_0 = 1$. Без ограничения общности можно считать, что $g^2(B_T) > 0$ (п.н.). Тогда $dM_t = M_t d\widetilde{M}_t$, где $\widetilde{M}_t = \int_0^t E[h'(B_T) | \mathcal{F}_t] / M_t dB_t$, $t \leq T$, есть локальный мартиггал. Решение уравнения $dM_t = M_t d\widetilde{M}_t$ с $M_0 = 1$ имеет вид $M_t = \exp\{\widetilde{M}_t - \frac{1}{2}\langle \widetilde{M} \rangle_t\}$, где $\langle \widetilde{M} \rangle$ есть квадратическая характеристика $\widetilde{M}$. Поэтому $M_t \log M_t = M_t(\widetilde{M}_t - \frac{1}{2}\langle \widetilde{M} \rangle_t)$ и по формуле Ито

$$\begin{aligned} d(M_t \log M_t) &= d(M_t \widetilde{M}_t) - \frac{1}{2} d(M_t \langle \widetilde{M} \rangle_t) \\ &= M_t d\widetilde{M}_t + \widetilde{M}_t dM_t + d\langle M, \widetilde{M} \rangle_t - \frac{1}{2} \langle \widetilde{M} \rangle_t dM_t - \frac{1}{2} M_t d\langle \widetilde{M} \rangle_t. \end{aligned}$$

Отсюда для моментов остановки $\tau_n = \inf\{t \leq T : M_t \geq n, |\widetilde{M}_t| \geq n\}$ находим, что $E[M_{T \wedge \tau_n} \log M_{T \wedge \tau_n}] = E\{\langle M, \widetilde{M} \rangle_{T \wedge \tau_n} - \frac{1}{2} \int_0^{T \wedge \tau_n} M_t d\langle \widetilde{M} \rangle_t\} = \frac{1}{2} E \int_0^{T \wedge \tau_n} M_t d\langle \widetilde{M} \rangle_t \leq \frac{1}{2} E \int_0^T M_t d\langle \widetilde{M} \rangle_t$. Отсюда по лемме Фату и неравенству Коши–Буняковского

$$\begin{aligned} E[M_T \log M_T] &\leq \frac{1}{2} E \int_0^T M_t d\langle \widetilde{M} \rangle_t = \frac{1}{2} E \int_0^T \frac{(E[h'(B_T) | \mathcal{F}_t])^2}{E[h(B_T) | \mathcal{F}_t]} dt \\ &= 2E \int_0^T E \left[\frac{g'(B_T) g(B_T)}{\sqrt{E[g^2(B_T) | \mathcal{F}_t]}} \middle| \mathcal{F}_t \right] dt \leq 2E \int_0^T E[(g'(B_T))^2 | \mathcal{F}_t] E \left[\frac{g^2(B_T)}{E[g^2(B_T) | \mathcal{F}_t]} \middle| \mathcal{F}_t \right] dt \\ &= 2E \int_0^T E[(g'(B_T))^2 | \mathcal{F}_t] dt = 2T E(g'(B_T))^2. \end{aligned}$$

Поскольку $M_T = g^2(B_T)$, то $E[g^2(B_T) \log g^2(B_T)] \leq 2T E(g'(B_T))^2$, что при $T = 1$ в предположении $Eg^2(\xi) = 1$ дает логарифмическое неравенство Соболева (2).

Список литературы

- [1] Н. Chernoff, *Ann. Probab.*, **9**:3 (1981), 533–535. [2] L. H. Y. Chen, *Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb.*, **69**:2 (1985), 251–277. [3] Ch. A. J. Klaassen, *Ann. Probab.*, **13**:3 (1985), 966–974. [4] В. В. Владимиров, *Что такое математическая физика?*, Препринт № НС-06/001, М., МИАН, 2006. [5] L. Gross, *Amer. J. Math.*, **97**:4 (1975), 1061–1083. [6] С. Ané, S. Blachère, D. Chafaï, P. Fougères, I. Gentil, F. Malrieu, C. Roberto, G. Scheffer, *Panor. Synthèses*, **10** (2000). [7] M. Ledoux, *Lecture Notes in Math.*, **1709** (1999), 120–216. [8] I. Gentil, A. Guillin, L. Miclo, *Probab. Theory Related Fields*, **133**:3 (2005), 409–436. [9] А. Ю. Шевляков, *Теория вероятн. и матем. статист.*, **16** (1978), 159–163.

А. Н. Ширяев (A. N. Shiryaev)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: albertsh@mi.ras.ru

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
02.05.2006