Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Х. Гарсиа-Куерва, К. С. Казарян, В. И. Коляда, Х. Л. Торреа, Неравенство Хаусдорфа–Юнга с векторнозначными коэффициентами и приложения, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 3, 3–84

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm18>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 14:07:32

УДК 517.518+517.52

**НЕРАВЕНСТВО ХАУСДОРФА–ЮНГА С ВЕКТОРНОЗНАЧНЫМИ
КОЭФФИЦИЕНТАМИ И ПРИЛОЖЕНИЯ****Посвящается профессору П. Л. Ульянову
к семидесятилетию со дня его рождения**

Х. ГАРСИА-КУЕРВА, К. С. КАЗАРЯН, В. И. КОЛЯДА, Х. Л. ТОРРЕА

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	3
§ 2. Общие определения и вспомогательные результаты	9
§ 3. Интерполяционные пространства	14
§ 4. Интерполяция и тип Фурье банаховых пространств	21
§ 5. Тип и котип Радемахера	26
§ 6. Тип Фурье банаховых пространств относительно групп	34
§ 7. Типы и котиры банаховых пространств относительно общих ортонормированных систем	46
§ 8. Соотношения между типами (котипами) по системе Радемахера и другим ортонормированным системам	58
§ 9. Теоремы Харди и Пэли для векторнозначных функций	69
§ 10. Оценки преобразований Фурье гладких функций	77
Список литературы	82

§ 1. Введение

Вопросы разложения функций в тригонометрические ряды, берущие начало в исследованиях Даламбера, Эйлера и Бернулли, до настоящего времени являются важнейшими в теории рядов Фурье. В этой области можно выделить круг задач, которые кратко формулируются так: оценить коэффициенты Фурье через функцию и, обратно, функцию через ее коэффициенты Фурье. Решению этих задач были посвящены усилия многих математиков. В пространстве L^2 главными результатами являются равенство Парсеваля и теорема Рисса–Фишера. Эти результаты частично распространяются

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и образования Испании (грант № РВ94-0149).

Третий автор выражает глубокую благодарность Департаменту математики Мадридского автономного университета за исключительное гостеприимство и прекрасные условия для работы.

на пространства L^p с $p \neq 2$ теоремами Хаусдорфа–Юнга и Харди–Литтлвуда–Пэли. В случае L^1 -метрики о коэффициентах нельзя сказать ничего определенного (кроме того, что они стремятся к нулю). Однако для аналитических функций из пространств H^1 справедливы более сильные утверждения, выражающиеся в неравенствах Харди и Пэли. Далее, известен ряд теорем о поведении коэффициентов Фурье при дополнительных условиях гладкости на функцию. Основополагающим результатом в этом направлении является теорема Бернштейна об абсолютной сходимости рядов Фурье функций класса $\text{Lip } \alpha$ ($\alpha > 1/2$).

В последние десятилетия все больше внимания привлекают аналогичные вопросы для классов функций со значениями в произвольном банаховом пространстве. Анализ векторнозначных функций представляет собой сравнительно новое направление; его истоки относятся к 30-м годам и содержатся в работах С. Бохнера [11], Р.П. Боаса и С. Бохнера [10], Р. Пэли и А. Зигмунда [61]. Векторнозначный анализ связан с классическими проблемами теории функций и зачастую позволяет объединить на основе единого подхода различные, казалось бы, далекие результаты этой теории. Такие возможности связаны с тем, что многие фундаментальные операторы действительного анализа можно интерпретировать как операторы свертки с векторнозначным ядром. Считаю нелишним привести некоторые примеры такого рода (хотя, на первый взгляд, они лежат в стороне от основной темы нашего обзора).

Рассмотрим максимальный оператор Харди–Литтлвуда на действительной прямой

$$(1.1) \quad Mf(x) = \sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |f(t)| dt,$$

где верхняя грань берется по всем интервалам $I \subset \mathbb{R}$, содержащим точку x . Хорошо известно [74, гл. 1], что при $1 < p < \infty$ этот оператор ограничен в $L^p(\mathbb{R})$.

Расположим все положительные рациональные числа в последовательность $\{\rho_n\}$ и обозначим $I_n = (-\rho_n, \rho_n)$, $\varphi_n = \frac{1}{|I_n|} \chi_{I_n}$ (χ_E обозначает характеристическую функцию множества E). Тогда в случае $f \geq 0$

$$(1.2) \quad Mf(x) \leq 2 \sup_n \frac{1}{|I_n|} \int_{I_n} f(t) dt = 2 \sup_n \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x-t) f(t) dt.$$

Полагая $\varphi = \{\varphi_n\}$, рассмотрим для любого $x \in \mathbb{R}$ линейное отображение $K(x)$ пространства $X = \mathbb{R}$ в пространство $Y = l^\infty$, определяемое формулой $K(x)\xi = \xi \cdot \varphi(x)$ ($\xi \in \mathbb{R}$). Пусть

$$(1.3) \quad Tf(x) = \left\{ \int_{\mathbb{R}} \varphi_n(x-t) f(t) dt \right\} = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x-t) f(t) dt \equiv \int_{\mathbb{R}} K(x-t) f(t) dt$$

(последние два интеграла понимаются в смысле Бохнера (см. § 2)). Оператор T каждой функции f ставит в соответствие последовательность функций. При этом, в силу (1.2), для $f \geq 0$

$$Mf(x) \leq 2 \|Tf(x)\|_{l^\infty}.$$

Таким образом, вопрос об ограниченности в L^p ($1 < p < \infty$) полуаддитивного оператора Харди–Литтлвуда (1.1) сводится к ограниченности линейного (сверточного) оператора (1.3) из $L^p(\mathbb{R})$ в пространство $L_Y^p(\mathbb{R})$ ($Y = l^\infty$).

Операторы свертки являются главным объектом теории Кальдерона–Зигмунда. Для скалярного случая эта теория была разработана в 50-х годах [17], [18]. Основная идея состояла в том, чтобы вывести ограниченность в L^p ($1 < p < \infty$) оператора

$$(1.4) \quad Tf(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{|x-t| \geq \varepsilon} K(x-t)f(t) dt$$

из предположения о его ограниченности в L^2 и некоторых условий на гладкость ядра K . Как было выяснено впоследствии, ограниченность в L^2 можно заменить ограниченностью в L^r при некотором $r \in [1, \infty]$.

Эти идеи были распространены на векторнозначный случай в работе Бенедика, Кальдерона и Панцоне [6]. Именно, была построена аналогичная теория для операторов вида (1.4), где f – функция на $\mathbb{R}^n$ со значениями в банаховом пространстве X , а ядро K – функция со значениями в пространстве $L(X, Y)$ всех линейных ограниченных операторов из X в Y (Y – банахово пространство).

Возвращаясь к оператору (1.3), заметим, что его ограниченность из $L^\infty(\mathbb{R})$ в $L_Y^\infty(\mathbb{R})$ ($Y = l^\infty$) очевидна. Чтобы применить теорию Кальдерона–Зигмунда, остается подобрать мажоранту ядра K , удовлетворяющую соответствующим условиям гладкости.¹

В качестве другого примера укажем теоремы типа Литтлвуда–Пэли [74, гл. 4], относящиеся к весьма трудным результатам теории функций. Как и в случае максимального оператора, оказалось, что оценки для квадратичной функции Литтлвуда–Пэли в L^p ($1 < p < \infty$) можно вывести из ограниченности в $L_{l_2}^p$ специально подобранного векторнозначного оператора с ядром Кальдерона–Зигмунда (см. [74], [41], [78]).

Конечно, приведенными примерами не исчерпывается та весомая роль, которую приобрел векторнозначный анализ в теории функций. Ясно также, что дальнейшие исследования в этой области являются важной и интересной задачей и могут привести к новым, неожиданным эффектам.

Вернемся к конкретному предмету данной статьи. Ее отправной точкой является классическая теорема Хаусдорфа–Юнга, которую мы теперь рассмотрим подробнее.

Пусть $f(x) \in L[0, 1]$ – комплекснозначная функция периода 1 с рядом Фурье

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi i n x}.$$

Если $f \in L^2[0, 1]$, то

$$(1.5) \quad \int_0^1 |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

(равенство Парсеваля). С другой стороны, если последовательность комплексных чисел $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ такова, что $\sum |c_n|^2 < \infty$, то существует функция $f(x) \in L^2[0, 1]$,

¹Подробности можно найти в работе [71].

для которой c_n являются коэффициентами Фурье и выполняется (1.5) (теорема Рисса–Фишера).

Эти теоремы могут быть частично распространены на пространства L^p с $p \neq 2$. Если $1 \leq p \leq \infty$, то полагаем $p' = p/(p-1)$.

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Тогда:

(1) если $f \in L^p[0, 1]$ и

$$(1.6) \quad c_n = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi i n x} dx \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

то

$$(1.7) \quad \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^{p'} \right)^{1/p'} \leq \left(\int_0^1 |f(x)|^p dx \right)^{1/p};$$

(2) если $\{c_n\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ – последовательность комплексных чисел такая, что

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^p < \infty,$$

то существует функция $f \in L^{p'}[0, 1]$, для которой выполняются равенства (1.6) и

$$(1.8) \quad \left(\int_0^1 |f(x)|^{p'} dx \right)^{1/p'} \leq \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^p \right)^{1/p}.$$

Заметим, что эта теорема неверна при $p > 2$ (см. [82, гл. 12]).

Теорема 1.1 была доказана Юнгом в 1912–13 гг. для случая, когда p' – четное положительное число. Отправной точкой доказательства Юнга являлось установленное им неравенство для свертки. В 1923 году Хаусдорф распространил результаты Юнга на все значения $p \in [1, 2]$. В этом же году Ф. Рисс доказал, что аналог теоремы 1.1 имеет место для любой равномерно ограниченной ортонормированной системы на $[a, b]$,

$$|\varphi_n(x)| \leq M \quad (x \in [a, b], n \in \mathbb{N}).$$

ТЕОРЕМА 1.2. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Тогда:

(1) если $f \in L^p[a, b]$, то

$$(1.9) \quad \|\{c_k\}\|_{l^{p'}} \leq M^{2/p-1} \|f\|_{L^p},$$

где c_k – коэффициенты Фурье функции f ;

(2) если $\{c_k\} \in l^p$, то существует функция $f \in L^{p'}[a, b]$, для которой c_k являются коэффициентами Фурье и

$$(1.10) \quad \|f\|_{L^{p'}} \leq M^{2/p-1} \|\{c_k\}\|_{l^p}.$$

В 1926 году М. Рисс предложил другое доказательство этой теоремы, как одно из первых приложений его теоремы о выпуклости.

Аналог теоремы 1.1 для преобразования Фурье был доказан Е. Титчмаршем [76], [77].

Преобразование Фурье функции $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ определяется равенством

$$(1.11) \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx \quad (\xi \in \mathbb{R}^n).$$

Согласно теореме Планшереля, если $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, то последовательность

$$(1.12) \quad F_N(\xi) = \int_{|x| \leq N} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx$$

сходится в $L^2(\mathbb{R}^n)$; предел этой последовательности обозначается $\widehat{f}(\xi)$ и называется преобразованием Фурье функции $f \in L^2$. При этом $\|f\|_2 = \|\widehat{f}\|_2$.

ТЕОРЕМА 1.3. Пусть $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq 2$. Тогда последовательность (1.12) сходится по норме $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ и предельная функция удовлетворяет неравенству

$$(1.13) \quad \|\widehat{f}\|_{p'} \leq \|f\|_p.$$

Функцию $\widehat{f}$, определяемую в теореме 1.3, называют преобразованием Фурье функции $f \in L^p$, $1 \leq p \leq 2$.

Сравним неравенства (1.7) и (1.13). Если $f(x) = A e^{2\pi i m x}$ ($m \in \mathbb{Z}$), то (1.7) превращается в равенство (Харди и Литтлвуд показали, что равенство в (1.7) имеет место только для функций указанного типа). Вместе с тем, оказывается, что неравенство (1.13) при $1 < p < 2$ может быть улучшено. Именно, для $1 < p < 2$

$$(1.14) \quad \|\widehat{f}\|_{p'} \leq A_p^n \|f\|_p, \quad A_p = (p^{1/p} (p')^{-1/p'})^{1/2}.$$

Это неравенство было доказано К. И. Бабенко [3] для случая, когда p' – четное положительное число ($n = 1$), и в общем случае – У. Бекнером [5].

Вернемся к теореме 1.1. В этой теореме предполагается, что $1 \leq p \leq 2$. В частности, теорема утверждает, что любая последовательность класса l^p является последовательностью коэффициентов Фурье функции из $L^{p'}$. При фиксированном $p \in [1, 2]$ множество всех таких функций образует некоторое подмножество в $L^{p'}$, занимающее тем большую его часть, чем ближе p к 2. При $p = 2$ это множество совпадает с L^2 . Положение меняется при $p > 2$. Оказывается, что в этом случае не всякая последовательность класса l^p является последовательностью коэффициентов Фурье. Именно, в 30-х годах Пэли и Зигмундом было доказано, что если $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |a_n|^2 = \infty$, то при некоторой расстановке знаков ряд

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \pm a_n e^{2\pi i n x}$$

не является рядом Фурье суммируемой функции. Это утверждение является частным случаем более общей теоремы Пэли–Зигмунда, относящейся к так называемым случайным тригонометрическим рядам

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) r_n(t)$$

(r_n – функции Радемахера). Результаты Пэли и Зигмунда послужили толчком к исследованиям случайных функциональных рядов $\sum f_n r_n(t)$ (f_n – функции из некоторого пространства) и более общих рядов $\sum x_n r_n(t)$, где $\{x_n\}$ – последовательность векторов произвольного банахова пространства X (см. [43]).

Интерес к тригонометрическим рядам с векторными коэффициентами и векторнозначным преобразованием Фурье появился в конце 60-х годов. Правда, эта тематика затрагивалась еще в работе Бохнера [11] в 30-х годах (в частности, в этой работе отмечалось, что для преобразований Фурье векторнозначных функций теорема Планшереля может не иметь места).

В 1967 году в работе Я. Петре [62] были выделены банаховы пространства X , обладающие тем свойством, что при некотором $p \in (1, 2]$ для любой функции $f: \mathbb{R} \rightarrow X$

$$(1.15) \quad \left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)\|_X^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \leq A_p \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, \quad p' = \frac{p}{p-1}.$$

Такие пространства были названы пространствами, имеющими тип Фурье p . В работе [64] это понятие было использовано при изучении интерполяционных пространств.

Если X – гильбертово пространство, то, как легко видеть, X имеет тип Фурье 2 (более точно, выполняется равенство Планшереля $\|\widehat{f}\|_{L_X^2} = \|f\|_{L_X^2}$). В 1973 году С. Квапень [50] доказал, что любое пространство с типом Фурье 2 изоморфно гильбертову пространству. Этот результат был выведен им из аналогичного утверждения для пространств, у которых одновременно тип и котип Радемахера равны 2.

Определения типа и котипа Радемахера банаховых пространств были введены в 1972 году Хоффман–Йоргенсенем [38] (в связи с вероятностными задачами о безусловной сходимости рядов в пространствах Банаха) и Морэем (в исследованиях по теории факторизации линейных операторов). Эти понятия быстро нашли приложения в многочисленных работах, посвященных геометрии банаховых пространств, теории вероятностей, теории операторов (см. [39], [51], [68]). Значительно меньше работ было посвящено изучению типа Фурье банаховых пространств и соответствующих задач теории функций. Существенное продвижение в этой области принадлежит Ж. Бургейну [12], [13], который доказал справедливость неравенства Хаусдорфа–Юнга относительно тригонометрической системы и системы Уолша для банаховых пространств, имеющих нетривиальный тип Радемахера. Неравенства такого же типа (но более слабые) были получены Бургейном [12] для систем характеров произвольных абелевых групп.

Появление данной обзорной статьи связано с тем, что, с одной стороны, к настоящему времени в рассматриваемой области уже получен ряд общих результатов, но, с другой стороны, эти результаты пока представлены в разрозненном виде, не позволяющем сразу воссоздать общую картину. Вместе с тем, в последнее время значительно расширился спектр исследований по векторнозначному гармоническому анализу и

смежным вопросам, в которых используются неравенства типа Хаусдорфа–Юнга. И хотя еще рано говорить о создании цельной теории, тем не менее возникла необходимость четче обозначить границы того, что уже сделано, выделить наиболее важные результаты и открытые проблемы и на основе этого выявить единый подход к дальнейшим исследованиям. В этом мы видим основные цели нашей работы. Наш подход состоит в том, что фундаментальные понятия типа и котипа банаховых пространств изучаются не для преобразования Фурье на локально-компактных абелевых группах, но для общих равномерно ограниченных ортонормированных систем. Прежде всего, это дает возможность сразу выделить общие результаты и принципы, не связанные с конкретными особенностями данной системы. С другой стороны, одновременное изучение всего класса ортонормированных систем приводит к постановке интересных и нетривиальных задач, относящихся как к теории ортогональных рядов, так и к геометрии банаховых пространств и гармоническому анализу. Нам представляется, что такой подход поможет также установить новые связи между этими теориями.

Выше уже отмечалось, что понятиям типа и котипа Радемахера посвящено очень большое число исследований. Из этой обширной области мы выделяем лишь те результаты, которые непосредственно связаны с задачами теории функций.

Мы стремились сделать изложение последовательным, систематическим и доступным. Поэтому мы приводим схемы доказательств основных результатов. В ряде случаев мы даем новые доказательства. Некоторые результаты, по-видимому, приводятся нами впервые.

Наконец, мы формулируем нерешенные задачи – как известные, так и те, которые возникли в ходе написания этой статьи.

§ 2. Общие определения и вспомогательные результаты

Пусть R – непустое множество и Λ – σ -алгебра подмножеств R . Предположим, что на Λ задана σ -конечная мера μ . Будем говорить, что (R, Λ, μ) (или, коротко, (R, μ)) – пространство с мерой (см. [40, с. 28]).

Атомом называется такое μ -измеримое множество $A \subset R$ с $\mu(A) > 0$, которое не содержит измеримых подмножеств с мерой, отличной от нуля и $\mu(A)$.

ЛЕММА 2.1. Пусть (R, μ) – пространство с мерой. Предположим, что μ -измеримое множество $E \subset R$ с $\mu(E) > 0$ не содержит атомов. Тогда для любого $0 < t < \mu(E)$ найдется μ -измеримое множество $Q \subset E$ с $\mu(Q) = t$.

Доказательство содержится, например, в [81, с. 372].

Действительная (или комплекснозначная) функция f , определенная на R , называется μ -измеримой, если для любого открытого подмножества G действительной прямой $\mathbb{R}$ (или комплексной плоскости $\mathbb{C}$) прообраз $f^{-1}(G)$ μ -измерим.

Характеристическую функцию μ -измеримого множества $E \subset R$ будем обозначать через χ_E .

Функция распределения μ -измеримой функции f определяется равенством

$$\lambda_f(y) \equiv \mu(\{x \in R : |f(x)| > y\}) \quad (y \geq 0).$$

Через $S_0(R, \mu)$ обозначим класс всех μ -измеримых функций f на R , которые конечны μ -почти всюду на R и удовлетворяют условию $\lambda_f(y) < +\infty$ для любого $y > 0$.

Невозрастающей перестановкой функции $f \in S_0(R, \mu)$ называется функция f^* , невозрастающая на $(0, +\infty)$ и равноизмеримая с $|f|$, т.е. такая, что для любого $y \geq 0$

$$|\{t > 0 : f^*(t) > y\}| = \mu(\{x \in R : |f(x)| > y\}).$$

Перестановка f^* может быть задана равенством (см. [7, гл. 2])

$$(2.1) \quad f^*(t) = \inf\{y > 0 : \lambda_f(y) \leq t\}, \quad 0 < t < \infty.$$

Отметим следующие свойства перестановок (см. [49], [7]):

(1) если $0 < t < t + s < \infty$, то

$$(2.2) \quad (f + g)^*(t + s) \leq f^*(t) + f^*(s)$$

и

$$(2.3) \quad (fg)^*(t + s) \leq f^*(t)f^*(s);$$

(2) если $0 < p < \infty$, то

$$(2.4) \quad \int_R |f|^p d\mu = \int_0^\infty [f^*(s)]^p ds;$$

(3) если E – измеримое подмножество R , $\mu(E) = t$, то

$$(2.5) \quad \int_E |f| d\mu \leq \int_0^t f^*(s) ds.$$

Пусть p, r – положительные числа. Функция $f \in S_0(R, \mu)$ принадлежит пространству Лоренца $L^{p,r} \equiv L^{p,r}(R, \mu)$, если

$$\|f\|_{p,r} \equiv \left(\int_0^\infty (t^{1/p} f^*(t))^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} < \infty.$$

Имеем $L^{p,p} = L^p$, $0 < p < \infty$ (см. (2.4)). Далее, если $0 < p < \infty$ и $0 < r < q < \infty$, то $L^{p,r} \subset L^{p,q}$; более того,

$$(2.6) \quad \|f\|_{p,q} \leq c \|f\|_{p,r}.$$

(см. [7, с. 217]).

Рассмотрим дискретный случай $R = \mathbb{N}$, $\mu(n) = 1$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. В этом случае S_0 является множеством всех числовых последовательностей $\{a_k\}$ с $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Невозрастающая перестановка последовательности $\{a_k\}$ обозначается $\{a_k^*\}$. Если в последовательности $\{|a_k|\}$ бесконечно много отличных от нуля элементов, то перестановку $\{a_k^*\}$ получим, располагая все такие элементы в невозрастающем порядке. Пространство Лоренца последовательностей обозначается $l^{p,r}$. Если $a = \{a_k\}$, $a_k \rightarrow 0$, то

$$\|a\|_{p,r} = \left(\sum_{k=1}^\infty k^{r/p-1} (a_k^*)^r \right)^{1/r}.$$

В дальнейшем мы будем использовать следующие неравенства Харди.

ЛЕММА 2.2. Пусть f – измеримая неотрицательная функция на $(0, \infty)$ и $\alpha > 0$. Тогда:

(1) если $1 \leq p < \infty$, то

$$(2.7) \quad \int_0^\infty x^{-\alpha-1} \left(\int_0^x f(t) dt \right)^p dx \leq C_{p,\alpha} \int_0^\infty x^{-\alpha-1} (xf(x))^p dx,$$

$$(2.8) \quad \int_0^\infty x^{\alpha-1} \left(\int_x^\infty f(t) dt \right)^p dx \leq C_{p,\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} (xf(x))^p dx;$$

(2) если функция f монотонно убывает на $(0, \infty)$, то неравенства (2.7) и (2.8) выполняются для любого $p > 0$.

Доказательство утверждения (1) содержится в [35, с. 296]. Чтобы доказать неравенство (2.7) при $0 < p < 1$ для убывающей функции f , заметим, что интеграл в правой части (2.7) в этом случае может сходиться лишь при $\alpha < p$ (если только f не равна тождественно нулю). Кроме того, можно считать, что f ограничена и имеет компактный носитель. Положим $F(x) = \int_0^x f(t) dt$. Интегрируя по частям и учитывая убывание f , получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty x^{-\alpha-1} (F(x))^p dx &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty x^{-\alpha} f(x) (F(x))^{p-1} dx \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty x^{-\alpha+p-1} (f(x))^p dx. \end{aligned}$$

Аналогично доказывается (2.8) при $0 < p < 1$ (в предположении, что f убывает).

ЛЕММА 2.3. Пусть $\{a_n\}$ – неотрицательная последовательность и $\alpha > 0$. Тогда:

(1) если $1 \leq p < \infty$, то

$$(2.9) \quad \sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha-1} \left(\sum_{k=1}^n a_k \right)^p \leq C_{p,\alpha} \sum_{n=1}^\infty n^{-\alpha-1} (na_n)^p,$$

$$(2.10) \quad \sum_{n=1}^\infty n^{\alpha-1} \left(\sum_{k=n}^\infty a_k \right)^p \leq C_{p,\alpha} \sum_{n=1}^\infty n^{\alpha-1} (na_n)^p;$$

(2) если последовательность $\{a_n\}$ монотонно убывает, то неравенства (2.9) и (2.10) выполняются для любого $p > 0$.

Эту лемму можно легко вывести из предыдущей (или доказать аналогичным путем).

Приведем некоторые определения и результаты, относящиеся к векторнозначным функциям.

Пусть A – банахово пространство и (R, μ) – пространство с мерой. Будем рассматривать функции $f: R \rightarrow A$. Функция вида

$$(2.11) \quad f = \sum_{j=1}^N a_j \chi_{E_j},$$

где $a_j \in A$ и $E_j \subset R$ — μ -измеримые попарно непересекающиеся множества с $\mu(E_j) < \infty$, называется μ -простой функцией. Функция $f: R \rightarrow A$ называется сильно μ -измеримой, если существует последовательность μ -простых функций $\{f_n\}$ такая, что

$$(2.12) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x) - f_n(x)\| = 0 \text{ для } \mu\text{-п.в. } x \in R.$$

Ясно, что, если f сильно μ -измерима, то действительная функция $x \mapsto \|f(x)\|$ μ -измерима на R .

Интеграл Бохнера μ -простой функции (2.11) определяется равенством

$$\int_R f(x) d\mu(x) = \sum_{j=1}^N a_j \mu(E_j).$$

Сильно μ -измеримая функция $f: R \rightarrow A$ называется μ -интегрируемой по Бохнеру на R , если существует последовательность μ -простых функций $\{f_n\}$, удовлетворяющая (2.12) и такая, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_R \|f(x) - f_n(x)\| d\mu(x) = 0.$$

В этом случае последовательность интегралов $\{\int_R f_n d\mu\}$ сходится по норме пространства A ; предел этой последовательности называется интегралом Бохнера функции f по множеству R и обозначается $\int_R f(x) d\mu(x)$ (см. [40, гл. 5]).

Согласно теореме Бохнера [11] (см. также [40, с. 190]) сильно μ -измеримая функция f μ -интегрируема по Бохнеру тогда и только тогда, когда норма $\|f(x)\|$ μ -интегрируема.

Через $L_A^p \equiv L_A^p(R, \mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) обозначаем пространство всех сильно μ -измеримых функций $f: R \rightarrow A$ с конечной нормой

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_A^p} &= \left(\int_R \|f(x)\|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \\ \|f\|_{L_A^\infty} &= \sup_{x \in R} \|f(x)\| \quad (p = \infty). \end{aligned}$$

В дискретном случае $R = \mathbb{N}$ соответствующее пространство обозначается через l_A^p . Таким образом, l_A^p есть пространство всех последовательностей $\{a_n\}$ ($a_n \in A$) с нормой

$$\begin{aligned} \|\{a_n\}\|_{l_A^p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|a_n\|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty), \\ \|\{a_n\}\|_{l_A^p} &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \|a_n\| \quad (p = \infty). \end{aligned}$$

Следующая лемма доказывается стандартным путем (см. [22, с. 140]).

ЛЕММА 2.4. Пусть A – банахово пространство и $1 \leq p < \infty$. Тогда множество всех μ -простых функций всюду плотно в $L_A^p(R, \mu)$.

Если A – банахово пространство, то через A^* обозначим сопряженное пространство всех непрерывных линейных функционалов на A . Если пространство A комплексно, то умножение на комплексные числа в A^* определяется равенством

$$(2.13) \quad (\alpha g)(a) = \overline{\alpha} g(a) \quad (g \in A^*, a \in A)$$

(см. [44, с. 75, 181, 199]). Вместо $g(a)$, где $g \in A^*$ и $a \in A$, пишем также $\langle a, g \rangle$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5. Пусть A – банахово пространство и $1 < p < \infty$. Тогда для любой функции $f \in L_A^p$

$$(2.14) \quad \|f\|_{L_A^p} = \sup \left\{ \left| \int_R \langle f(x), g(x) \rangle d\mu \right| : \|g\|_{L_{A^*}^{p'}} = 1 \right\},$$

где верхняя грань берется по всем функциям $g: R \rightarrow A^*$ таким, что $\|g\|_{L_{A^*}^{p'}} = 1$.

Это предложение доказано в [23, с. 97]. Оно означает, что пространство L_A^p изометрично вложено в $(L_{A^*}^{p'})^*$. Заметим, что, вообще говоря, эти пространства не совпадают (см. [23]).

Аналогично, имеет место двойственное утверждение, согласно которому $L_{A^*}^{p'}$ изометрично вложено в $(L_A^p)^*$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.6. Пусть A – банахово пространство и $1 < p < \infty$. Тогда для любой функции $g \in L_{A^*}^{p'}$

$$(2.15) \quad \|g\|_{L_{A^*}^{p'}} = \sup \left\{ \left| \int_R \langle f(x), g(x) \rangle d\mu \right| : \|f\|_{L_A^p} = 1 \right\}.$$

Мы будем рассматривать также пространства Лоренца векторнозначных функций. Пусть $f: R \rightarrow A$ – сильно μ -измеримая функция. Невозрастающую перестановку действительной функции $\|f(x)\|$ ($x \in R$) будем обозначать через $f^*(t)$ ($0 < t < +\infty$). Если $0 < p, r < \infty$, то через $L_A^{p,r} \equiv L_A^{p,r}(R, \mu)$ обозначим пространство всех сильно μ -измеримых функций $f: R \rightarrow A$, для которых

$$(2.16) \quad \|f\|_{L_A^{p,r}} \equiv \left(\int_0^\infty [t^{1/p} f^*(t)]^r \frac{dt}{t} \right)^{1/r} < \infty.$$

В дискретном случае $R = \mathbb{N}$ рассматриваем последовательности $\{a_k\}$ ($a_k \in A$) с $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = 0$. Невозрастающую перестановку последовательности $\{\|a_k\|\}$ обозначаем $\{a_k^*\}$. Пространство Лоренца обозначается через $l_A^{p,r}$; это пространство всех последовательностей $\{a_k\}$ ($a_k \in A$) таких, что

$$(2.17) \quad \|\{a_k\}\|_{l_A^{p,r}} \equiv \left(\sum_{k=1}^\infty k^{r/p-1} (a_k^*)^r \right)^{1/r} < \infty.$$

В заключение остановимся на понятии векторнозначной аналитической функции.

Пусть A – банахово пространство и D – область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Функция $f: D \rightarrow A$ называется аналитической в точке $z_0 \in D$, если в A существует предел

$$\lim_{z \rightarrow z_0, z \in D} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Если функция f аналитична в каждой точке $z \in D$, то она называется аналитической в области D . Отправляясь от этого определения, можно развить теорию векторнозначных аналитических функций, почти полностью аналогичную обычной теории.

В частности, справедлив следующий аналог теоремы Адамара о трех прямых [22, с. 560]. Обозначим через Ω полосу $\{z = x + iy : 0 < x < 1\}$ в комплексной плоскости и через $\bar{\Omega}$ ее замыкание.

ТЕОРЕМА 2.7. Пусть A – банахово пространство и $f: \bar{\Omega} \rightarrow A$ – функция, ограниченная и непрерывная в $\bar{\Omega}$ и аналитическая в Ω . Тогда функция

$$M_\theta = \sup_{-\infty < y < +\infty} |f(\theta + iy)|$$

удовлетворяет неравенству

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta \quad (0 \leq \theta \leq 1).$$

§ 3. Интерполяционные пространства

В этом параграфе мы дадим краткое описание методов теории интерполяции, которые играют важную роль в рассматриваемых нами вопросах.

3.1. Метод комплексной интерполяции. Основу этого метода составляет классическая теорема Рисса–Торина (см. [82, гл. 12]).

Пусть R и S – пространства с мерами μ и ν соответственно. Предположим, что T – линейный оператор, областью определения которого является пространство всех μ -простых комплекснозначных функций на R , а значениями – ν -измеримые комплекснозначные функции на S . Пусть $1 \leq p, q \leq \infty$. Если существует постоянная M такая, что

$$(3.1) \quad \|Tf\|_{L^q(S, \nu)} \leq M \|f\|_{L^p(R, \mu)}$$

для всех μ -простых функций f на R , то говорят, что T имеет сильный тип (p, q) . Наименьшая постоянная M в (3.1) называется сильной (p, q) -нормой (или просто нормой) оператора T .

ТЕОРЕМА 3.1. Предположим, что $1 \leq p_j, q_j \leq \infty$ ($j = 0, 1$), $0 < \theta < 1$ и

$$(3.2) \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

Пусть T – линейный оператор сильных типов (p_0, q_0) и (p_1, q_1) с соответствующими сильными нормами M_0 и M_1 . Тогда T имеет сильный тип (p, q) и его сильная (p, q) -норма M_θ удовлетворяет неравенству

$$(3.3) \quad M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

В вещественном случае эта теорема была доказана в 1926 году М. Риссом (в этом случае необходимо предполагать, что $p_j \leq q_j$, – иначе в правой части (3.3) появляется дополнительный множитель 2). В 1938 году О. В. Торин распространил теорему 3.1 на комплексные пространства L^p . Отправной точкой доказательства Торина является замена функции f семейством функций, зависящим от параметра z :

$$(3.4) \quad F(z) = |f|^{p/p(z)} e^{i \arg f} \quad (F(\theta) = f),$$

где $F(z)$ при каждом фиксированном z есть комплекснозначная функция на R , комплексный параметр z изменяется в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$, а $p(z)$ определяется первым из равенств (3.2) с заменой θ на z . Фундаментальную роль в доказательстве играет также теорема о трех прямых.

Эти идеи послужили отправной точкой метода комплексной интерполяции, введенного независимо в работах А. Кальдерона, Ж. Л. Лионса и С. Г. Крейна (см. [79, гл. 1]).

Пусть A_0 и A_1 – комплексные банаховы пространства, линейно и непрерывно вложенные в некоторое отделимое топологическое векторное пространство $\mathcal{A}$. Два таких пространства будем называть интерполяционной парой $\{A_0, A_1\}$. Сумма $A_0 + A_1$ определяется как множество всех элементов $a \in \mathcal{A}$, представимых в виде $a = a_0 + a_1$, где $a_0 \in A_0, a_1 \in A_1$. Для каждого $a \in A_0 + A_1$ полагаем

$$\|a\|_{A_0+A_1} = \inf (\|a_0\|_{A_0} + \|a_1\|_{A_1}),$$

где нижняя грань берется по всем представлениям $a = a_0 + a_1$ ($a_0 \in A_0, a_1 \in A_1$). Далее, для любого $a \in A_0 \cap A_1$, по определению,

$$\|a\|_{A_0 \cap A_1} = \max(\|a\|_{A_0}, \|a\|_{A_1}).$$

Пространства $A_0 \cap A_1$ и $A_0 + A_1$ являются банаховыми (см. [8, п. 2.3]).

Следующее основное определение принадлежит А. Кальдерону [16].

Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Обозначим через $\mathcal{F} \equiv \mathcal{F}(A_0, A_1)$ пространство всех функций F , определенных в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$ комплексной плоскости, принимающих значения в $A_0 + A_1$ и обладающих следующими свойствами:

- (i) F ограничена и непрерывна по норме $A_0 + A_1$ в полосе $0 \leq \operatorname{Re} z \leq 1$;
- (ii) F $(A_0 + A_1)$ -аналитична в открытой полосе $0 < \operatorname{Re} z < 1$;
- (iii) функция $y \mapsto F(j + iy)$ ($y \in \mathbb{R}, j = 0, 1$) принимает значения в A_j , является A_j -непрерывной на $\mathbb{R}$ и стремится к нулю при $|y| \rightarrow \infty$.

Очевидно, что $\mathcal{F}$ – векторное пространство. Норма в $\mathcal{F}$ определяется равенством

$$\|F\|_{\mathcal{F}} = \max \left(\sup_{y \in \mathbb{R}} \|F(iy)\|_{A_0}, \sup_{y \in \mathbb{R}} \|F(1 + iy)\|_{A_1} \right).$$

Пространство $\mathcal{F}$ полно относительно этой нормы [8, гл. 4].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.2. Пусть $0 < \theta < 1$. Будем говорить, что элемент $a \in A_0 + A_1$ принадлежит пространству $[A_0, A_1]_\theta \equiv A_\theta$, если существует функция $F \in \mathcal{F}$ такая, что

$$a = F(\theta).$$

Норма в пространстве $[A_0, A_1]_\theta$ определяется равенством

$$\|a\|_{[A_0, A_1]_\theta} = \inf \{ \|F\|_{\mathcal{F}} : F(\theta) = a, F \in \mathcal{F} \}.$$

Пространство A_θ является полным [8, гл. 4].

ЛЕММА 3.3. *Предположим, что функция $F \in \mathcal{F}$ обладает дополнительным свойством*

$$F(iy) \in L_{A_0}^{r_0}, \quad F(1+iy) \in L_{A_1}^{r_1} \quad (1 \leq r_0, r_1 < \infty).$$

Пусть $a = F(\theta)$. Тогда

$$(3.5) \quad \|a\|_{A_\theta} \leq C_\theta (\|F(iy)\|_{L_{A_0}^{r_0}} + \|F(1+iy)\|_{L_{A_1}^{r_1}}),$$

где C_θ не зависит от F .

Эта лемма доказана в статье А. Кальдерона [16].

Важнейшую роль играет следующее интерполяционное свойство (см. [16], [8, 4.1.2]).

ТЕОРЕМА 3.4. *Пусть $\{A_0, A_1\}$ и $\{B_0, B_1\}$ – интерполяционные пары банаховых пространств и $T: A_0 + A_1 \rightarrow B_0 + B_1$ – линейный оператор. Предположим, что сужение T на A_i является ограниченным оператором из A_i в B_i с нормой M_i ($i = 0, 1$). Пусть $0 < \theta < 1$. Тогда T является ограниченным оператором из A_θ в B_θ с нормой M_θ , удовлетворяющей неравенству*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Приведем еще один результат Кальдерона – об интерполяции пространств $L_A^p(R, \mu)$, где (R, μ) – фиксированное пространство с мерой (см. [79, 1.18.4], [8, 5.1]).

ТЕОРЕМА 3.5. *Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара банаховых пространств, $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ и $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Тогда*

$$(3.6) \quad [L_{A_0}^{p_0}, L_{A_1}^{p_1}]_\theta = L_{[A_0, A_1]_\theta}^p$$

и нормы в этих пространствах равны. Равенство (3.6) сохраняет силу и при $1 \leq p_0 < p_1 = \infty$, если заменить $L_{A_1}^\infty$ замыканием множества простых функций по норме этого пространства.

3.2. Метод вещественной интерполяции. Идея этого метода восходит к интерполяционной теореме Марцинкевича.

Пусть, как и выше, (R, μ) и (S, ν) – пространства с мерами. Предположим, что T – отображение пространства $L^p(R, \mu)$ ($1 \leq p < \infty$) в множество всех ν -измеримых функций на S (мы можем рассматривать как вещественные, так и комплекснозначные функции). Пусть $1 \leq q < \infty$. Будем говорить, что T имеет слабый тип (p, q) , если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой функции $f \in L^p(R, \mu)$

$$(3.7) \quad (Tf)^*(t) \leq C \|f\|_{L^p(R, \mu)} t^{-1/q} \quad (t > 0).$$

Далее, предположим, что T обладает свойством субаддитивности:

$$|T(f+g)(x)| \leq |Tf(x)| + |Tg(x)|.$$

ТЕОРЕМА 3.6. Пусть $1 < r < \infty$. Предположим, что T – субаддитивное отображение из $L^1(\mathbb{R}^n) + L^r(\mathbb{R}^n)$ в пространство измеримых функций на $\mathbb{R}^n$. Если T имеет слабый тип $(1, 1)$ и слабый тип (r, r) , то для любого $1 < p < r$ отображение T имеет сильный тип (p, p) ,

$$(3.8) \quad \|Tf\|_p \leq C_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(\mathbb{R}^n).$$

При $r = \infty$ теорема сохраняет силу, если потребовать, что T ограничено действует в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\|Tf\|_\infty \leq C \|f\|_\infty$.

Теорема Марцинкевича была сформулирована им в 1939 году без доказательства; впервые ее доказал Зигмунд в 1956 году (см. [8, гл. 1]). Основная идея доказательства состояла в том, что для оценки функции распределения $\lambda_{Tf}(y)$ при любом $y > 0$ функция f разбивалась на два слагаемых $f = g + h$ так, что $g \in L^1$ и $h \in L^r$, причем разбиение получалось “разрезанием” $|f|$ на уровне y . Эта идея “переменного разбиения” оказалась чрезвычайно плодотворной и нашла многочисленные применения в анализе. В частности, она привела к определению метода вещественной интерполяции банаховых пространств. Существуют различные модификации этого метода. Они связаны с различными способами разбиения элементов, но приводят к одному и тому же интерполяционному пространству, определяемому двумя индексами p и θ , где $1 \leq p \leq \infty$, $0 < \theta < 1$. Наиболее распространенным является K -метод, принадлежащий Я. Петре (см. [79, 1.3]).

Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. K -функционал Петре определяется равенством ($t > 0$)

$$K(t, a; A_0, A_1) = \inf_{a=a_0+a_1} \{ \|a_0\|_{A_0} + t \|a_1\|_{A_1} \}, \quad a \in A_0 + A_1,$$

где нижняя грань берется по всевозможным представлениям $a = a_0 + a_1$ с $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$. Часто пишут просто $K(t, a)$ вместо $K(t, a; A_0, A_1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.7. Пусть $0 < \theta < 1$ и $1 \leq p \leq \infty$. Пространство $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ состоит из всех элементов $a \in A_0 + A_1$, для которых

$$(3.9) \quad \|a\|_{\theta, p} = \left\{ \int_0^\infty (t^{-\theta} K(t, a))^p \frac{dt}{t} \right\}^{1/p} < \infty \quad (p < \infty),$$

$$(3.10) \quad \|a\|_{\theta, \infty} = \sup_{t>0} t^{-\theta} K(t, a) < \infty \quad (p = \infty).$$

На близкой идее основан и L -метод (также принадлежащий Петре). Этот метод эквивалентен K -методу, но во многих случаях является более гибким. Не вдаваясь в детали, приведем теорему эквивалентности, в которой выражено существо L -метода (см. [79, 1.4]).

ТЕОРЕМА 3.8. Пусть $1 \leq r_0, r_1 < \infty$ и

$$L(t, a) = \inf_{\substack{a=a_0+a_1 \\ a_j \in A_j}} (\|a_0\|_{A_0}^{r_0} + t \|a_1\|_{A_1}^{r_1}) \quad (t > 0, a \in A_0 + A_1).$$

Далее, пусть $0 < \eta < 1$, $r = (1 - \eta)r_0 + \eta r_1$, $\theta = \eta r_1 / r$ и $1 \leq p \leq \infty$.

Тогда существует положительная постоянная K такая, что для любого элемента $a \in A_0 + A_1$

$$\frac{1}{K} \|a\|_{\theta, p} \leq \left(\int_0^\infty (t^{-\eta} L(t, a))^{p/r} \frac{dt}{t} \right)^{1/p} \leq K \|a\|_{\theta, p},$$

если $1 \leq p < \infty$, и

$$\frac{1}{K} \|a\|_{\theta, \infty} \leq \sup_{t>0} (t^{-\eta} L(t, a))^{1/r} \leq K \|a\|_{\theta, \infty}.$$

В работах Петре был развит и так называемый J -метод, основанный на интегральном представлении элементов. Для $t > 0$ и $a \in A_0 \cap A_1$ положим

$$J(t, a) \equiv J(t, a; A_0, A_1) = \max(\|a\|_{A_0}, t\|a\|_{A_1}).$$

Имеет место следующая теорема эквивалентности [79, 1.6].

ТЕОРЕМА 3.9. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $0 < \theta < 1$. Для того чтобы $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала сильно измеримая в $A_0 + A_1$ функция $t \rightarrow u(t)$ ($t > 0$) со значениями в $A_0 \cap A_1$ такая, что

$$(3.11) \quad a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \quad (\text{сходимость в } A_0 + A_1)$$

и

$$(3.12) \quad J_{\theta, p}(u) \equiv \left(\int_0^\infty (t^{-\theta} J(t, u(t)))^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty.$$

При этом существует постоянная $K > 0$ такая, что для любого элемента $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$

$$(3.13) \quad \frac{1}{K} \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} \leq \inf_u J_{\theta, p}(u) \leq K \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}},$$

где нижняя грань берется по всевозможным функциям u , удовлетворяющим условиям (3.11) и (3.12).

Теорема сохраняет силу и при $p = \infty$, $0 \leq \theta \leq 1$, если положить $J_{\theta, \infty}(u) = \sup_{t>0} t^{-\theta} J(t, u(t))$.

На интегральном представлении основан и метод средних. Исторически именно этот метод (введенный Лионсом и Петре [53]) был первым методом вещественной интерполяции.

Для банахова пространства A и $1 \leq p < \infty$ обозначим через L_A^{*p} пространство всех A -значных сильно измеримых функций $t \rightarrow u(t)$ ($t > 0$) таких, что

$$\|u\|_{L_A^{*p}} = \left(\int_0^\infty \|u(t)\|_A^p \frac{dt}{t} \right)^{1/p} < \infty \quad (p < \infty),$$

$$\|u\|_{L_A^{*\infty}} = \sup_{t>0} \|u(t)\|_A < \infty \quad (p = \infty).$$

Существо метода средних можно выразить следующей теоремой [79, гл. 1].

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть $1 \leq p_0, p_1 \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ и $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$. Для того чтобы $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала сильно измеримая в $A_0 + A_1$ функция $t \rightarrow u(t)$ ($t > 0$) со значениями в $A_0 \cap A_1$ такая, что

$$(3.14) \quad a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \quad (\text{сходимость в } A_0 + A_1)$$

и

$$(3.15) \quad t^{-\theta} u(t) \in L_{A_0}^{*p_0}, \quad t^{1-\theta} u(t) \in L_{A_1}^{*p_1}.$$

При этом существует постоянная $K > 0$ такая, что для любого элемента $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$

$$\frac{1}{K} \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}} \leq \inf_u \max \left\{ \|t^{-\theta} u(t)\|_{L_{A_0}^{*p_0}}, \|t^{1-\theta} u(t)\|_{L_{A_1}^{*p_1}} \right\} \leq K \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta, p}},$$

где нижняя грань берется по всем функциям u , удовлетворяющим условиям (3.14) и (3.15).

Если $p_0 = p_1$, то теорема 3.10 совпадает с теоремой 3.9. Главное в том, что независимо от выбора p_0, p_1 мы получаем эквивалентные нормы; это обстоятельство и придает дополнительную гибкость методу средних.

На этом мы завершаем краткий обзор основных методов вещественной интерполяции. Главным свойством пространств $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ является их интерполяционное свойство, выражающееся в следующей теореме [79, гл. 1], [7, с. 301].

ТЕОРЕМА 3.11. Пусть $\{A_0, A_1\}$ и $\{B_0, B_1\}$ – интерполяционные пары банаховых пространств и $T: A_0 + A_1 \rightarrow B_0 + B_1$ – линейный оператор. Предположим, что сужение T на A_i является ограниченным оператором из A_i в B_i с нормой M_i ($i = 0, 1$). Пусть $0 < \theta < 1$, $1 \leq p < \infty$ или $0 \leq \theta \leq 1$, $p = \infty$. Тогда T является ограниченным оператором из $(A_0, A_1)_{\theta, p}$ в $(B_0, B_1)_{\theta, p}$ с нормой $M_{\theta, p}$, удовлетворяющей неравенству

$$M_{\theta, p} \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta.$$

Следующая теорема описывает интерполяцию пространств Лоренца (см. [8, гл. 5], [79, 1.18.6]). Основное пространство с мерой (R, μ) предполагается фиксированным.

ТЕОРЕМА 3.12. Пусть $1 \leq p_i < \infty$, $1 \leq r_j, r \leq \infty$ ($i = 0, 1$), $0 < \theta < 1$ и $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$. Далее, пусть A – банахово пространство. Предположим, что $p_0 \neq p_1$ (или $p_0 = p_1$, $1/r = (1 - \theta)/r_0 + \theta/r_1$). Тогда

$$(3.16) \quad (L_A^{p_0, r_0}, L_A^{p_1, r_1})_{\theta, r} = L_A^{p, r}$$

и нормы эквивалентны.

СЛЕДСТВИЕ 3.13. Пусть $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $p_0 \neq p_1$, $1 \leq r \leq \infty$, $0 < \theta < 1$ и $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$. Тогда

$$(3.17) \quad (L_A^{p_0}, L_A^{p_1})_{\theta, r} = L_A^{p, r}.$$

В частности,

$$(3.18) \quad (L_A^{p_0}, L_A^{p_1})_{\theta, p} = L_A^p.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (3.17) сохраняет силу и при $1 \leq p_0 < p_1 = \infty$, если заменить $L_{A_1}^\infty$ замыканием множества простых функций по норме этого пространства.

Заметим, что в отличие от теоремы 3.5 пространство A предполагается фиксированным. Это ограничение можно снять только в равенстве (3.18). Именно, Лионс и Петре [53] (см. также [79, 1.18.4]) получили следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.14. Пусть $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ и

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Далее, пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара. Тогда

$$(3.19) \quad (L_{A_0}^{p_0}, L_{A_1}^{p_1})_{\theta, p} = L_{(A_0, A_1)_{\theta, p}}^p.$$

Как показал М. Цвикел [21], аналогичного описания пространств $(L_{A_0}^{p_0}, L_{A_1}^{p_1})_{\theta, r}$ при $r \neq p$, вообще говоря, не существует.

3.3. Сравнение методов вещественной и комплексной интерполяции.

Рассмотрим пространства L^p скалярных функций. В силу (3.6) и (3.19) при $1 \leq p_0, p_1 < \infty$, $0 < \theta < 1$ и $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$ имеем

$$(L^{p_0}, L^{p_1})_{\theta, p} = [L^{p_0}, L^{p_1}]_\theta = L^p.$$

В этом примере пространства, полученные с помощью вещественной и комплексной интерполяции, совпадают. Однако в общем случае эти методы дают совершенно различные шкалы интерполяционных пространств. Именно, существует интерполяционные пары $\{A_0, A_1\}$ такие, что $[A_0, A_1]_\theta$ и $(A_0, A_1)_{\eta, p}$ являются различными пространствами при любых $0 < \theta, \eta < 1$ и $1 \leq p \leq \infty$ (например, так обстоит дело с интерполяцией пространств Соболева [79, 1.9.3]).

Пусть X и Y – банаховы пространства; тогда запись $X \hookrightarrow Y$ означает, что $X \subset Y$ и $\|x\|_Y \leq C\|x\|_X$ для любого элемента $x \in X$. Если при фиксированном $t > 0$ в банаховом пространстве X ввести новую норму $\|x\|_{tX} = t\|x\|_X$ ($x \in X$), то полученное пространство обозначается tX .

Справедливы следующие вложения (Лионс, Петре [53], [8, гл. 4]).

ТЕОРЕМА 3.15. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара и $0 < \theta < 1$. Тогда

$$(3.20) \quad (A_0, A_1)_{\theta, 1} \hookrightarrow [A_0, A_1]_\theta \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta, \infty}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $a \in (A_0, A_1)_{\theta,1}$. В силу теоремы 3.9 a допускает представление

$$a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}$$

с функцией u , удовлетворяющей соответствующим условиям. Рассмотрим преобразование Меллина функции $t^{-\theta}u(t)$:

$$(3.21) \quad F(z) = \int_0^\infty t^{z-\theta} u(t) \frac{dt}{t}.$$

Имеем $a = F(\theta)$. При этом, как легко видеть, $F \in \mathcal{F}$ и $\|F\|_{\mathcal{F}} \leq C \|a\|_{(A_0, A_1)_{\theta,1}}$. Этим доказано первое вложение в (3.20).

2) Пусть $a \in [A_0, A_1]_\theta$. Тогда a допускает представление $a = F(\theta)$, $F \in \mathcal{F}$. Имеем в силу теоремы о трех прямых (см. §2)

$$\begin{aligned} K(t, a) &= K(t, F(\theta)) = \|F(\theta)\|_{A_0+tA_1} \\ &\leq \sup_y \|F(iy)\|_{A_0}^{1-\theta} t^\theta \sup_y \|F(1+iy)\|_{A_1}^\theta \leq t^\theta \|F\|_{\mathcal{F}}. \end{aligned}$$

Следовательно, $a \in (A_0, A_1)_{\theta,\infty}$ (см. (3.10)) и $\|a\|_{(A_0, A_1)_{(\theta,\infty)}} \leq \|F\|_{\mathcal{F}}$. Отсюда следует второе вложение в (3.20).

Отметим еще одно вложение, которое легко следует из определения 3.7:

$$(3.22) \quad (A_0, A_1)_{\theta,p} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q}, \quad \text{если } 1 \leq p < q \leq \infty.$$

§ 4. Интерполяция и тип Фурье банаховых пространств

В связи с теоремой 3.15 возникает следующий вопрос: при каких дополнительных условиях на пространства A_0, A_1 эту теорему можно усилить так, чтобы имели место вложения

$$(A_0, A_1)_{\theta,p} \hookrightarrow [A_0, A_1]_\theta \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta,q} \quad (1 < p \leq q < \infty)?$$

Этот вопрос был рассмотрен в работе Я. Петре [62] и привел к понятию типа Фурье банахова пространства. Исходная идея содержится в доказательстве теоремы 3.15: замена переменного $t = e^{-2\pi s}$ ($s \in \mathbb{R}$) при $x = 0$ и $x = 1$ в (3.21) приводит к преобразованиям Фурье функций

$$f_0(s) = e^{2\pi s\theta} u(e^{-2\pi s}) \quad \text{и} \quad f_1(s) = e^{2\pi s(\theta-1)} u(e^{-2\pi s}).$$

Таким образом, ясно, что в рассматриваемом вопросе важную роль играют свойства преобразования Фурье как оператора, определенного на соответствующем пространстве векторнозначных функций.

Пусть A – комплексное банахово пространство. Будем рассматривать функции $f: \mathbb{R} \rightarrow A$. Преобразование Фурье функции $f \in L_A^1$ определяется равенством

$$(4.1) \quad \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i x \xi} dx, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

(где интеграл понимается в смысле Бохнера).

Следующее определение, основанное на неравенстве Хаусдорфа–Юнга, принадлежит Я. Петре [62].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Будем говорить, что пространство A имеет тип Фурье p , если существует постоянная K такая, что для любой функции $f \in L_A^p$ с компактным носителем

$$(4.2) \quad \|\widehat{f}\|_{L_A^{p'}} \leq K \|f\|_{L_A^p}.$$

Это определение равносильно тому, что преобразование Фурье, первоначально определенное на $L_A^1 \cap L_A^p$ равенством (4.1), может быть продолжено до линейного ограниченного оператора из L_A^p в $L_A^{p'}$.

Ясно, что любое банахово пространство имеет тип 1.

Следующая теорема Петре [62] дает ответ на вопрос, поставленный в начале параграфа.

ТЕОРЕМА 4.2. Пусть $\{A_0, A_1\}$ – интерполяционная пара, причем A_j имеет тип Фурье p_j ($1 < p_j \leq 2$, $j = 0, 1$). Далее, пусть $0 \leq \theta < 1$ и $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$. Тогда

$$(4.3) \quad (A_0, A_1)_{\theta, p} \hookrightarrow [A_0, A_1]_{\theta} \hookrightarrow (A_0, A_1)_{\theta, p'}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. 1) Пусть $a \in (A_0, A_1)_{\theta, p}$. Воспользуемся методом средних. Предположим, что функция $t \mapsto u(t) \in A_0 \cap A_1$ такова, что

$$(4.4) \quad a = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t} \quad (\text{сходимость в } A_0 + A_1)$$

и

$$(4.5) \quad \|u\|^* \equiv \|t^{-\theta}u\|_{L_{A_0}^{*p_0}} + \|t^{1-\theta}u\|_{L_{A_1}^{*p_1}} < \infty.$$

Фиксируем отрезок $I \subset (0, \infty)$ и положим

$$v = u \chi_I, \quad b = \int_0^\infty v(t) \frac{dt}{t}.$$

Далее, пусть

$$(4.6) \quad G(z) = \int_0^\infty t^{z-\theta} v(t) \frac{dt}{t}, \quad z = x + iy \in \mathbb{C}$$

(преобразование Меллина). Тогда $G \in \mathcal{F}(A_0, A_1)$ (G аналитична в $\mathbb{C}$) и $G(\theta) = b$. Пусть $\varphi_j(t) = t^{j-\theta}v(t)$ ($j = 0, 1$). Производя в (4.6) замену переменного $t = e^{-2\pi s}$ ($s \in \mathbb{R}$) при $x = 0$ и $x = 1$, получим

$$G(iy) = 2\pi \widehat{\psi}_0(y), \quad G(1 + iy) = 2\pi \widehat{\psi}_1(y),$$

где $\psi_j(s) = \varphi_j(e^{-2\pi s})$ ($j = 0, 1$). В силу (4.5) $\psi_j \in L_{A_j}^{p_j}$; при этом ψ_j имеет компактный носитель ($j = 0, 1$). Поскольку A_j имеет тип Фурье p_j , то

$$\|G(j + iy)\|_{L_{A_j}^{p'_j}} \leq C \|\psi_j\|_{L_{A_j}^{p_j}} = (2\pi)^{-1/p_j} C \|\varphi_j\|_{L_{A_j}^{*p_j}} \quad (j = 0, 1).$$

Отсюда в силу неравенства (3.5)

$$(4.7) \quad \|b\|_{[A_0, A_1]_\theta} \leq C \|u\|^*,$$

где постоянная C не зависит от выбора функции u и отрезка I . Теперь положим $I_k = [1/k, k]$, $v_k = u\chi_{I_k}$, $b_k = \int_0^\infty v_k(t) \frac{dt}{t}$. В силу (4.4), $b_k \rightarrow a$ при $k \rightarrow \infty$ в $A_0 + A_1$. Кроме того, из (4.7) следует, что $\{b_k\}$ фундаментальна в $[A_0, A_1]_\theta$ и $\|b_k\|_{[A_0, A_1]_\theta} \leq C \|u\|^*$. Поэтому в силу полноты $[A_0, A_1]_\theta$ имеем $\|a\|_{[A_0, A_1]_\theta} \leq C \|u\|^*$. Этим доказано левое вложение в (4.3).

2) Пусть $a \in [A_0, A_1]_\theta$. Возьмем произвольное представление $a = F(\theta)$, где $F \in \mathcal{F}$. Пусть $\tilde{F}(z) = F(z) \left(\frac{\theta + 1}{z + 1} \right)^2$, так что $\tilde{F}(\theta) = a$. Тогда

$$(4.8) \quad \tilde{F}(iy) \in L_{A_0}^{p_0}, \quad \tilde{F}(1 + iy) \in L_{A_1}^{p_1}.$$

Положим

$$(4.9) \quad u(t) = \frac{t^\theta}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} t^{-z} \tilde{F}(z) dz \quad (t > 0, 0 \leq x \leq 1)$$

(обратное преобразование Меллина). Полагая $x = 0$ и $x = 1$, получим

$$t^{j-\theta} u(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-iy} \tilde{F}(j + iy) dy \quad (j = 0, 1).$$

Поскольку A_j имеет тип Фурье p_j , то в силу (4.8) отсюда следует, что при $j = 0, 1$

$$(4.10) \quad \|t^{j-\theta} u\|_{L_{A_j}^{*p'_j}} \leq C \|\tilde{F}(j + iy)\|_{L_{A_j}^{p_j}} \leq c' \sup_y \|F(j + iy)\|_{A_j}.$$

Далее, полагая в (4.9) $x = \theta$, имеем

$$u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} t^{-iy} \tilde{F}(\theta + iy) dy,$$

так что $u(e^{2\pi s}) = (2\pi)^{-1} \hat{\Phi}(s)$, где $\Phi(y) = \tilde{F}(\theta + iy)$.

Отсюда следует, что

$$(4.11) \quad a = \Phi(0) = \int_{\mathbb{R}} \hat{\Phi}(s) ds = \int_0^\infty u(t) \frac{dt}{t}.$$

Учитывая (4.10), (4.11) и теорему 3.10, получаем правое вложение в 4.3. Теорема доказана.

Поскольку любое банахово пространство имеет тип 1, то теорему 3.15 можно рассматривать как предельный случай теоремы 4.2.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В условиях теоремы 4.2 ни одно из вложений (4.3) нельзя усилить, заменяя в левой части p числом $r > p$ или в правой части p' числом $q < p'$. Это легко вытекает из теорем 3.5, 3.12 и следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.4. Пусть (Ω, ν) – пространство с мерой и $1 < p < \infty$. Тогда пространство $A = L^p(\Omega, \nu)$ имеет тип Фурье $\min(p, p')$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p \leq 2$. Предположим, что $f: \mathbb{R} \rightarrow A$ – простая функция. Рассмотрим преобразование Фурье

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}} e^{-2\pi i x \xi} f(x) dx.$$

При любом фиксированном $\xi \in \mathbb{R}$ $\widehat{f}(\xi)$ есть функция, определенная на пространстве Ω . Имеем, применяя обобщенное неравенство Минковского,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)\|_A^{p'} d\xi \right)^{p/p'} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Omega} |\widehat{f}(\xi)(y)|^p d\nu(y) \right)^{p'/p} d\xi \right)^{p/p'} \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(\xi)(y)|^{p'} d\xi \right)^{p/p'} d\nu(y). \end{aligned}$$

В силу неравенства Хаусдорфа–Юнга при любом фиксированном $y \in \Omega$

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)(y)\|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \leq \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)(y)|^p dx \right)^{1/p}.$$

Следовательно, по теореме Фубини

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)\|_A^{p'} d\xi \right)^{p/p'} \leq \int_{\Omega} d\nu(y) \int_{\mathbb{R}} |f(x)(y)|^p dx = \int_{\mathbb{R}} \|f(x)\|_A^p dx.$$

Таким образом, L^p имеет тип Фурье p при $1 < p \leq 2$. Случай $p > 2$ рассматривается аналогично.

Детальное изучение результатов, относящихся к понятию типа Фурье, будет проведено ниже. Здесь мы вкратце рассмотрим дальнейшие применения этого понятия в теории интерполяции и теории функциональных пространств.

В работе Петре [62] показано, что с помощью теоремы 4.2 могут быть получены некоторые известные теоремы вложения для пространств Соболева–Лиувилля и Бесова. Приведем определения этих пространств (см. [74, гл. 5]).

Пусть $1 \leq p \leq \infty$ и $r \in \mathbb{N}$. Функция $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ принадлежит пространству Соболева $W_p^r(\mathbb{R}^n)$, если f имеет все обобщенные производные $D^\alpha f$ порядка $|\alpha| \leq r$, принадлежащие $L^p(\mathbb{R}^n)$. Норма в W_p^r определяется равенством

$$\|f\|_{W_p^r} = \sum_{|\alpha| \leq r} \|D^\alpha f\|_p.$$

Если $1 \leq p \leq \infty$ и $\alpha > 0$, то пространство Соболева–Лиувилля $\mathcal{L}_p^\alpha(\mathbb{R}^n)$ определяется как множество всех функций f , представимых в виде свертки $f = G_\alpha * g$, где $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, а G_α – ядро Бесселя порядка α . При этом

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^\alpha} = \|g\|_p.$$

Известно [74, гл. 5], что

$$W_p^r(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_p^r(\mathbb{R}^n) \quad (1 < p < \infty, r \in \mathbb{N}).$$

Пусть $\alpha > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ и $1 \leq q < \infty$.

Пространство Бесова $B_{p,q}^\alpha(\mathbb{R}^n)$ состоит из всех функций $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, для которых конечна норма

$$\|f\|_{B_{p,q}^\alpha} \equiv \|f\|_p + \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha} \omega_k(f; t)_p]^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q},$$

где $k > \alpha$ – целое и

$$\omega_k(f; t)_p = \sup_{|h| \leq t} \left\| \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f(x + jh) \right\|_p$$

– модуль непрерывности порядка k . Легко видеть, что

$$(4.12) \quad B_{p,q}^\alpha \subset B_{p,s}^\alpha \quad \text{при } q < s.$$

Известно, что

$$(4.13) \quad (L^p, W_p^r)_{\theta,q} = B_{p,q}^{\theta r} \quad (1 \leq p \leq \infty, 1 \leq q < \infty, r \in \mathbb{N}, 0 < \theta < 1)$$

и

$$(4.14) \quad [L^p, W_p^r]_\theta = \mathcal{L}_p^{\theta r} \quad (1 < p < \infty, 0 < \theta < 1, r \in \mathbb{N})$$

(см. [79, гл. 2]). Далее, пространство $\mathcal{L}_p^\alpha$ изометрично пространству L^p [74, гл. 5]; в силу предложения 4.4 отсюда следует, что W_p^r ($1 < p \leq 2$) имеет тип Фурье p . Применяя теорему 4.2, получаем следующие вложения

$$(4.15) \quad B_{p,p}^\alpha \subset \mathcal{L}_p^\alpha \subset B_{p,p'}^\alpha \quad (1 < p \leq 2, \alpha > 0).$$

Аналогично, имеем

$$(4.16) \quad B_{p,p'}^\alpha \subset \mathcal{L}_p^\alpha \subset B_{p,p}^\alpha \quad (2 \leq p < \infty, \alpha > 0).$$

Эти результаты хорошо известны (они берут начало в работе Марцинкевича [54] и во всей полноте были доказаны в работах Бесова, Лизоркина и Тейблсона (см. [74, гл. 5]). Первое вложение в (4.15) неумлучшаемо, однако второе может быть усилено. Именно,

$$(4.17) \quad \mathcal{L}_p^\alpha \subset B_{p,2}^\alpha \quad (1 < p \leq 2, \alpha > 0).$$

Аналогично,

$$(4.18) \quad B_{p,2}^\alpha \subset \mathcal{L}_p^\alpha \quad (2 \leq p < \infty, \alpha > 0).$$

(см. [74]).

В связи с последними вложениями отметим еще одну работу Я. Петре [63], в которой рассматривалось понятие λ -типа банахова пространства (связанное с безусловной сходимостью рядов в B -пространствах). В частности, в этой работе получены новые доказательства вложений (4.17) и (4.18) с помощью интерполяции.

Полезные применения теоремы 4.2 содержатся также в работе М. Мильмана [58]. Одним из результатов этой работы является равенство

$$(W_1^r, W_p^r)_\theta = W_{p_\theta}^r \quad \left(\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{p}, 1 < p < \infty, r \in \mathbb{N} \right),$$

включающее предельный случай пространства W_1^r .

§ 5. Тип и котип Радемахера

Рассмотрим систему функций Радемахера

$$r_n(t) = \text{sign} \sin 2^n \pi t \quad (t \in [0, 1], n \in \mathbb{N}).$$

Важные свойства этой системы выражают неравенства Хинчина (см. [82, гл. 5]).

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $0 < p < \infty$. Существует постоянная $A_p > 0$ такая, что для любого полинома $F(t) = \sum_{k=1}^n a_k r_k(t)$ ($a_k \in \mathbb{C}$)

$$(5.1) \quad \frac{1}{A_p} \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 |F(t)|^p dt \right)^{1/p} \leq A_p \left(\sum_{k=1}^n |a_k|^2 \right)^{1/2}.$$

СЛЕДСТВИЕ 5.2. Пусть $1 < p < \infty$. Существует постоянная $B_p > 0$ такая, что для любой комплекснозначной функции $f \in L^p[0, 1]$ и любого $n \in \mathbb{N}$

$$(5.2) \quad \left\| \sum_{k=1}^n c_k(f) r_k \right\|_p \leq B_p \|f\|_p, \quad c_k(f) = \int_0^1 f(t) r_k(t) dt.$$

Действительно, если $S_n = \sum_{k=1}^n c_k(f) r_k$, то, в силу (5.1)

$$\begin{aligned} \|S_n\|_p^2 &\leq A_p^2 \sum_{k=1}^n |c_k(f)|^2 = A_p^2 \int_0^1 f(t) \overline{S_n(t)} dt \\ &\leq A_p^2 \|f\|_p \|\overline{S_n}\|_{p'} \leq B_p \|f\|_p \|S_n\|_p. \end{aligned}$$

Отсюда следует (5.2).

Мы будем рассматривать полиномы по системе Радемахера с коэффициентами из произвольного банахова пространства X . Для таких полиномов неравенство Хинчина, вообще говоря, не имеет места. Однако справедлива следующая теорема Кахана [43, гл. 2].

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть $0 < p < q < \infty$. Существует постоянная $A_{p,q} > 0$ такая, что для любого банахова пространства X и любого полинома $F(t) = \sum_{k=1}^n r_k(t)x_k$ ($x_k \in X$)

$$(5.3) \quad \|F\|_{L_X^p} \leq \|F\|_{L_X^q} \leq A_{p,q} \|F\|_{L_X^p}.$$

Таким образом, все L_X^p -нормы ($0 < p < \infty$) полинома F эквивалентны между собой. Вместе с тем, в случае произвольного банахова пространства X справедливы лишь тривиальные оценки этих норм через коэффициенты полинома:

$$(5.4) \quad \|\{x_k\}\|_{l_X^\infty} \leq \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_X^1} \leq \|\{x_k\}\|_{l_X^1}.$$

Нетривиальные оценки составляют основу понятий типа и котипа Радемахера, введенных в 1972 году Хоффман-Йоргенсеном и Морэем.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.4. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Будем говорить, что банахово пространство X имеет тип p , если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых векторов $x_1, \dots, x_n \in X$

$$(5.5) \quad \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_X^2} \leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.5. Пусть $2 \leq q \leq \infty$. Будем говорить, что банахово пространство X имеет котип q , если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых векторов $x_1, \dots, x_n \in X$

$$(5.6) \quad \|\{x_k\}_{k=1}^n\|_{l_X^q} \leq C \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_X^2}.$$

В силу теоремы 5.3 L_X^2 -норма в этих определениях может быть заменена L_X^r -нормой ($0 < r < \infty$).

Каждое банахово пространство имеет тип 1 и котип ∞ (см. (5.3) и (5.4)).

Заметим, что при $p > 2$ можно для любой постоянной C выбрать $x_1, \dots, x_n \in X$ так, что (5.5) не будет выполняться. Действительно, пусть $x_1 = \dots = x_n \neq 0$. Тогда, в силу (5.5) для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $n^{1/2} \leq C n^{1/p}$; следовательно, $p \leq 2$.

Аналогичное замечание справедливо относительно условия $q \geq 2$ в определении 5.5.

Если X – гильбертово пространство, то X имеет тип 2 и котип 2.

Действительно, в этом случае в силу ортогональности функций r_k имеем

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t)x_k \right\|^2 dt = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Это утверждение в определенном смысле обратимо. Именно, С. Кwapень [50] установил следующий важный результат.

ТЕОРЕМА 5.6. *Пусть банахово пространство X имеет тип 2 и котип 2. Тогда X изоморфно некоторому гильбертову пространству.*

В силу (5.3), эту теорему можно сформулировать так:

Банахово пространство X изоморфно гильбертову пространству тогда и только тогда, когда X удовлетворяет двусторонним неравенствам Хинчина.

В работе [50] доказано также, что пространство X имеет одновременно тип 2 и котип 2 тогда и только тогда, когда

$$C^{-1} \left(\sum_{k=-n}^n \|x_k\|^2 \right)^{1/2} \leq \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=-n}^n e^{2\pi i k t} x_k \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{k=-n}^n \|x_k\|^2 \right)^{1/2},$$

где x_k – произвольные векторы из X , а $C > 0$ – постоянная. В свою очередь, это свойство равносильно тому, что X имеет тип Фурье 2.

Вернемся к общему случаю. Из определений типа и котипа и неравенства Иенсена вытекает

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.7. *Пусть X – банахово пространство. Тогда:*

- (i) *если X имеет тип $1 < p_0 \leq 2$, то X имеет тип p при любом $1 \leq p \leq p_0$;*
- (ii) *если X имеет котип $2 \leq q_0 < \infty$, то X имеет котип q при любом $q_0 \leq q \leq \infty$.*

Далее, введем следующее определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.8. Для любого банахова пространства X положим

$$p_X = \sup\{p \leq 2 : X \text{ имеет тип } p\},$$

$$q_X = \inf\{q \geq 2 : X \text{ имеет котип } q\}.$$

Если $p_X > 1$ ($q_X < \infty$), то говорят, что X имеет нетривиальный тип (соответственно, нетривиальный котип).

В качестве примера рассмотрим пространства L^p (см. [51, с. 70]).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.9. *Пусть $X = L^p(\Omega, \mu)$, $1 \leq p < \infty$. Тогда X имеет тип $\min(p, 2)$ и котип $\max(p, 2)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 \leq p \leq 2$ и $x_1, \dots, x_n \in X$. Применяя теорему Фубини и неравенства Хинчина, получим:

$$(5.7) \quad \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_X^p} \asymp \left(\int_{\Omega} \left(\sum_{k=1}^n |x_k(\xi)|^2 \right)^{p/2} d\mu(\xi) \right)^{1/p}.$$

Отсюда

$$\left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_X^p} \leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_{L^p}^p \right)^{1/p},$$

так что X имеет тип p . С другой стороны, в силу (5.7) и неравенства Минковского

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_X^p}^p &\geq C \left(\sum_{k=1}^n \left(\int_{\Omega} |x_k(\xi)|^p d\mu(\xi) \right)^{2/p} \right)^{p/2} \\ &= C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_{L^p}^2 \right)^{p/2} \quad (C > 0); \end{aligned}$$

следовательно, X имеет котип 2. Аналогично рассматривается случай $2 < p < \infty$.

Если мера μ такова, что Ω состоит из конечного числа μ -атомов, то пространство $L^p(\Omega, \mu)$ ($1 \leq p \leq \infty$) конечномерно и имеет тип 2 и котип 2. Однако в остальных случаях значения типа и коти́па, полученные в предложении 5.9, являются точными.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.10. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $X = L^p(\Omega, \mu)$, где пространство Ω не является объединением конечного числа μ -атомов. Тогда

$$p_X = \min(p, 2), \quad q_X = \max(p, 2).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из нашего условия и леммы 2.1 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ можно выбрать в Ω попарно непересекающиеся μ -измеримые подмножества $E_1, \dots, E_n$ с $\mu(E_k) \equiv \mu_k > 0$, $k = 1, \dots, n$. Положим $x_k(\xi) = \chi_{E_k}(\xi) \mu_k^{-1/p}$, $\xi \in \Omega$. Тогда $\|x_k\|_{L^p} = 1$ и $\|\sum_{k=1}^n r_k(t) x_k\|_{L^p} = n^{1/p}$ при любом двоично-иррациональном $t \in [0, 1]$. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Если при некотором $s \geq 1$

$$\left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_X^2} \leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|_{L^p}^s \right)^{1/s}$$

(где постоянная C не зависит от n), то $n^{1/p} \leq C n^{1/s}$ и в силу произвольности n имеем $s \leq p$. Учитывая предложение 5.9, получаем $p_X = p$, $q_X = 2$. Аналогично, при $p > 2$ имеем $q_X = p$, $p_X = 2$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.11. Если $X = L^\infty[0, 1]$ или $X = c_0$, то $p_X = 1$, $q_X = \infty$.

Действительно, выберем в пространстве $X = L^\infty[0, 1]$ векторы $x_k = r_k$ ($k = 1, \dots, n$). Для любой двоично-иррациональной точки $t \in [0, 1]$ имеем

$$(5.8) \quad \left\| \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k \right\|_X = n.$$

Если $p > 1$, то (5.5) не имеет места при достаточно больших n . Таким образом, $p_X = 1$. Рассматривая функции $x_k(\xi) = \chi_{[(k-1)/n, k/n)}(\xi)$ ($k = 1, \dots, n$), убеждаемся также в том, что $q_X = \infty$.

В случае $X = c_0$ при любом фиксированном $n \in \mathbb{N}$ положим

$$x_k = \sum_{j=1}^{2^n} \varepsilon_k^{(j)} e_j \quad (k = 1, \dots, n),$$

где $\varepsilon_k^{(j)}$ — значение функции r_k на интервале $(\frac{j-1}{2^n}, \frac{j}{2^n})$. Вновь получим равенство (5.8), из которого следует, что $p_X = 1$. К равенству $q_X = \infty$ придем, беря $x_k = e_k$, где e_k — последовательность, у которой все члены равны нулю, кроме k -го, равного 1.

Между понятиями типа и коти́па имеется определенная симметрия (двойственность). Действительно, используя предложение 2.6 и ортогональность функций Радемахера, легко доказать следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.12. Пусть банахово пространство X имеет тип $1 < p \leq 2$. Тогда сопряженное пространство X^* имеет котип p' .

Обратное неверно – пространство c_0 имеет только тип 1, а его сопряженное l^1 имеет котип 2.

Из того, что X имеет котип $2 \leq q < \infty$, не следует, что X^* имеет тип q' (в качестве примера можно взять $X = l^1$).

Пространства с нетривиальным типом играют важную роль во многих вопросах геометрии банаховых пространств и векторнозначного анализа Фурье. В работах [56], [67] было выяснено, что нетривиальность типа равносильна существованию у пространства определенных геометрических и аналитических свойств выпуклости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.13. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Будем говорить, что банахово пространство X равномерно содержит l_n^p , если для любого $\lambda > 1$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существуют элементы $x_1, \dots, x_n \in X$ такие, что для любых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| \leq \lambda \left(\sum_{k=1}^n |\alpha_k|^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \leq \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k x_k \right\| \leq \lambda \max_{1 \leq k \leq n} |\alpha_k| \quad (p = \infty).$$

Ясно, что элементы x_k удовлетворяют неравенствам $1 \leq \|x_k\| \leq \lambda$.

Морэй и Пизье [56] доказали следующую теорему.

ТЕОРЕМА 5.14. Если X – банахово пространство, то

- (i) $p(X) > 1$ тогда и только тогда, когда X не содержит l_n^1 равномерно;
- (ii) $q(X) < \infty$ тогда и только тогда, когда X не содержит l_n^∞ равномерно.

Нетрудно показать, что X равномерно содержит l_n^1 тогда и только тогда, когда X^* равномерно содержит l_n^1 (см. [30], [31]). Ограничимся действительным случаем. Пусть X равномерно содержит l_n^1 . Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ и любого $\lambda > 1$ найдутся векторы $x_1, \dots, x_{2^n}$ такие, что $\|x_i\| \leq \lambda$ и для любых чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_{2^n}$

$$\left\| \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i x_i \right\| \geq \sum_{i=1}^{2^n} |\alpha_i|.$$

Пусть $\delta^{(i)} = \{\delta_1^{(i)}, \dots, \delta_n^{(i)}\}$ ($i = 1, \dots, 2^n$) – всевозможные наборы из n чисел, равных ± 1 . На подпространстве Y , натянутом на линейно независимые векторы $x_1, \dots, x_{2^n}$, определим линейные функционалы y_k^* равенствами

$$\langle x, y_k^* \rangle = \lambda \sum_{i=1}^{2^n} \delta_k^{(i)} \alpha_i, \quad x = \sum_{i=1}^{2^n} \alpha_i x_i \quad (k = 1, \dots, n).$$

Ясно, что $1 \leq \|y_k^*\| \leq \lambda$. Продолжим y_k^* на все пространство X с сохранением нормы. Поскольку

$$\left\langle x_i, \sum_{k=1}^n \beta_k y_k^* \right\rangle = \lambda \sum_{k=1}^n \delta_k^{(i)} \beta_k,$$

то

$$\left\| \sum_{k=1}^n \beta_k y_k^* \right\| \geq \sum_{k=1}^n |\beta_k| \quad (\beta_k \in \mathbb{R}).$$

Следовательно, X^* равномерно содержит l_n^1 . Аналогично получим обратное утверждение.

Таким образом, из теоремы 5.14 выводим

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.15. *Если X – банахово пространство, то $p_X > 1$ тогда и только тогда, когда $p_{X^*} > 1$.*

Из теоремы 5.14 легко следует также

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.16. *Если $p_X > 1$, то $q_X < \infty$.*

Обратное неверно (если $X = l^1$, то $p_X = 1$, $q_X = 2$). Более того, даже если предположить, что $q_X < \infty$ и $q_{X^*} < \infty$, все равно нельзя утверждать, что $p_X > 1$ (см. [67]).

Возвращаясь к вопросу о двойственности между понятиями типа и коти́па, покажем, что предложение 5.12 можно усилить.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.17. *Пусть банахово пространство X имеет тип $1 < p \leq 2$. Тогда для любого $1 < r < \infty$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждой функции $g \in L_{X^*}^r[0, 1]$ последовательность $\{c_k(g)\}$ ее коэффициентов Фурье по системе Радемахера удовлетворяет неравенству*

$$(5.9) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k(g)\|_{X^*}^{p'} \right)^{1/p'} \leq C \|g\|_{L_{X^*}^r}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предложения 2.6 для любого $\varepsilon > 0$ и любого $n \in \mathbb{N}$ существует последовательность $\{x_k\} \in l_X^p$ такая, что $\|\{x_k\}\|_{l_X^p} = 1$ и

$$\left(\sum_{k=1}^n \|c_k(g)\|_{X^*}^{p'} \right)^{1/p'} < \sum_{k=1}^n \langle x_k, c_k(g) \rangle + \varepsilon.$$

Поскольку X имеет тип p , то в силу (5.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \langle x_k, c_k(g) \rangle &= \int_0^1 \left\langle \sum_{k=1}^n r_k(t) x_k, g(t) \right\rangle dt \\ &\leq \left\| \sum_{k=1}^n r_k x_k \right\|_{L_X^{r'}} \|g\|_{L_{X^*}^r} \leq C \|g\|_{L_{X^*}^r}. \end{aligned}$$

Отсюда следует (5.9).

Аналогично доказывается обратное утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.18. *Пусть X – банахово пространство и $1 < p \leq 2$. Предположим, что существуют числа $C > 0$ и $1 < r < \infty$ такие, что для каждой функции $g \in L_{X^*}^r[0, 1]$ выполняется неравенство (5.9). Тогда X имеет тип p .*

ЗАМЕЧАНИЕ 5.19. Предложения 5.17 и 5.18 остаются в силе, если поменять местами X и X^* .

Доказанные предложения естественно приводят к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.20. Пусть $2 \leq q < \infty$. Будем говорить, что банахово пространство X имеет сильный котип q , если оно для любого $1 < r < \infty$ обладает следующим свойством: существует такая постоянная $A_r > 0$, что для каждой функции $f \in L_X^r[0, 1]$

$$(5.10) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|c_k(f)\|^q \right)^{1/q} \leq A_r \|f\|_{L_X^r},$$

где $c_k(f)$ – коэффициенты Фурье функции f по системе Радемахера.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.21. Если для фиксированного $q \in [2, \infty)$ указанное свойство выполняется при некотором $1 < r < \infty$, то оно выполняется при любом $1 < r < \infty$ (см. предложения 5.17, 5.18 и замечание 5.19). В частности, взяв $r = q'$, получим аналог неравенства Хаусдорфа–Юнга–Рисса (1.9).

Из предложений 5.17, 5.18 и замечания 5.19 вытекает следующий результат.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.22. Пусть X – банахово пространство и $1 \leq p \leq 2$. Тогда:

- (i) X имеет тип p тогда и только тогда, когда X^* имеет сильный котип p' ;
- (ii) X^* имеет тип p тогда и только тогда, когда X имеет сильный котип p' .

Учитывая еще предложение 5.15, получаем

СЛЕДСТВИЕ 5.23. Банахово пространство X имеет нетривиальный тип тогда и только тогда, когда X имеет нетривиальный сильный котип.

Очевидно, что если X имеет сильный котип $2 \leq q < \infty$, то X имеет котип q . Обратное неверно. Ясно также, что эквивалентность коти́па и сильного коти́па связана с дополнительными свойствами пространства, выражаемыми неравенствами вида (5.2).

Пусть $1 < r < \infty$. Будем называть банахово пространство X K_r -выпуклым, если существует постоянная $A_r > 0$ такая, что для любой функции $f \in L_X^r[0, 1]$ частные суммы ее ряда Фурье по системе Радемахера удовлетворяют неравенству

$$(5.11) \quad \left\| \sum_{k=1}^n c_k(f) r_k \right\|_{L_X^r} \leq A_r \|f\|_{L_X^r} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

В силу неравенства Кахана (5.3) показатель r в левой части можно заменить любым $s > 0$. Поэтому при $r < s$ из K_r -выпуклости следует K_s -выпуклость. Покажем, что это верно и при $1 < s < r$.

ЛЕММА 5.24. Пусть X – банахово пространство. Тогда:

- (i) если $1 < r < \infty$, то X K_r -выпукло тогда и только тогда, когда X^* $K_{r'}$ -выпукло;
- (ii) если X K_r -выпукло при некотором $1 < r < \infty$, то X K_s -выпукло при любом $1 < s < \infty$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X K_r -выпукло. Пусть $g \in L_{X^*}^{r'}$ и $n \in \mathbb{N}$. В силу предложения 2.6 для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in L_X^r$ с $\|f\|_{L_X^r} = 1$ такая, что

$$\left\| \sum_{k=1}^n c_k(g)r_k \right\|_{L_{X^*}^{r'}} < \int_0^1 \left\langle f(t), \sum_{k=1}^n c_k(g)r_k(t) \right\rangle dt + \varepsilon.$$

Легко видеть, что интеграл в правой части равен

$$\int_0^1 \left\langle \sum_{k=1}^n c_k(f)r_k(\xi), g(\xi) \right\rangle d\xi.$$

В свою очередь, в силу (5.11) последний интеграл не превосходит $A_r \|g\|_{L_{X^*}^{r'}}$. Таким образом, X^* $K_{r'}$ -выпукло. Обратное доказывается аналогично. Утверждение (ii) следует из (i) и неравенства Кахана.

Для $r = 2$ определение K_r -выпуклости было введено в работе [56]. Следуя этой работе, будем называть K_r -выпуклые пространства ($1 < r < \infty$) просто K -выпуклыми пространствами.

Из определения следует, что если X K -выпукло и имеет котип $q \in [2, \infty)$, то X имеет сильный котип q .

Пространства $L^1[0, 1]$, l^1 не являются K -выпуклыми (они имеют котип 2, но не имеют нетривиального сильного коти́па). Пространства $L^p(\Omega, \mu)$ ($1 < p < \infty$) K -выпуклы (это легко следует из (5.2)).

Пользуясь предложением 5.22 и леммой 5.24, получаем следующее предложение [56].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.25. Пусть X – банахово пространство. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (i) X K -выпукло в том и только в том случае, если X^* K -выпукло.
- (ii) Если X K -выпукло, то X имеет тип $1 < p \leq 2$ тогда и только тогда, когда X^* имеет котип p' . В частности,

$$(5.12) \quad \frac{1}{p_X} + \frac{1}{q_{X^*}} = \frac{1}{p_{X^*}} + \frac{1}{q_X} = 1.$$

Для $X = l^1$ равенство (5.12) не выполняется. В работе [56] была выдвинута гипотеза о том, что K -выпуклыми являются пространства, не содержащие l_n^1 равномерно, и только они. Положительный ответ был получен Пизье [67].

ТЕОРЕМА 5.26. Банахово пространство X K -выпукло тогда и только тогда, когда X не содержит l_n^1 равномерно.

В силу теоремы 5.14 получаем, что пространство K -выпукло тогда и только тогда, когда оно имеет нетривиальный тип.

§ 6. Тип Фурье банаховых пространств относительно групп

В §4 было введено понятие типа Фурье банахова пространства X – оно означает, что для преобразования Фурье функций, заданных на $\mathbb{R}$ и принимающих значения в X , выполняется неравенство Хаусдорфа–Юнга. Рассматривая функции, заданные на произвольной локально компактной абелевой группе, мы приходим к более общему понятию типа Фурье. В этой области уже получены некоторые результаты; им будет посвящен настоящий параграф.

Начнем с краткого обзора необходимых определений и фактов из теории топологических групп (см. [69], [36], [72]).

Топологической группой называется группа G , снабженная такой топологией, относительно которой групповые операции в G непрерывны.

Для основной групповой операции мы используем символы суммы или произведения. Определения будем давать, как правило, для аддитивных групп.

В дальнейшем предположим, что G – абелева группа и локально компактное хаусдорфово пространство. Хорошо известно (см., например, [72], [36]), что на любой компактной абелевой группе G существует единственная вероятностная борелевская мера μ_G , обладающая следующими свойствами инвариантности:

$$(6.1) \quad \mu_G(E + h) = \mu_G(E), \quad \mu_G(-E) = \mu_G(E)$$

для любого борелевского множества $E \subset G$ и любого $h \in G$. Мера μ_G называется мерой Хаара на группе G .

Для локально компактной абелевой группы мера Хаара существует и определяется однозначно с точностью до положительного постоянного множителя.

Наиболее важными для нас будут следующие примеры:

1) Окружность

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$$

– мультипликативная группа с индуцированной из $\mathbb{C}$ топологией.

2) Действительная прямая $\mathbb{R}$ с операцией сложения и обычной топологией.

3) Группа целых чисел $\mathbb{Z}$ с дискретной топологией.

4) Канторова группа $\mathbb{D} = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ – декартово произведение последовательности групп второго порядка $G_n = \{0, 1\}$ ($n = 1, 2, \dots$). Элементами $\mathbb{D}$ являются всевозможные последовательности $\{\delta_n\}$ ($\delta_n = 0, 1$). В $\mathbb{D}$ определены покомпонентное сложение по модулю 2 и топология прямого произведения. Согласно теореме Тихонова группа $\mathbb{D}$ компактна. Поэтому отображение

$$\{\delta_n\} \rightarrow 2 \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n 3^{-n}$$

является гомеоморфизмом $\mathbb{D}$ на классическое канторово множество.

Пусть G – локально компактная абелева группа. Характером группы G называется непрерывный гомоморфизм G в группу $\mathbb{T}$, т.е. такая непрерывная комплекснозначная функция γ на G , что

$$|\gamma(t)| = 1 \quad \text{и} \quad \gamma(t + s) = \gamma(t)\gamma(s) \quad (t, s \in G).$$

Множество $\widehat{G}$ всех характеров группы G является мультипликативной абелевой группой (с операцией поточечного умножения). Единицей в $\widehat{G}$ является функция, тождественно равная 1; обратный элемент $\gamma^{-1} = \overline{\gamma}$. В $\widehat{G}$ вводится топология, в которой сходимость эквивалентна равномерной сходимости на компактных подмножествах G . Группа $\widehat{G}$ называется группой, двойственной к G .

Группа с дискретной топологией называется дискретной группой. Отметим следующее свойство: если группа G компактна, то группа $\widehat{G}$ дискретна; если группа G дискретна, то $\widehat{G}$ компактна.

Рассмотрим примеры.

Если $G = \mathbb{Z}$ и γ – характер на $\mathbb{Z}$, то

$$\gamma(n) = \left(\gamma(1) \right)^n \quad \text{для любого } n \in \mathbb{Z}.$$

Значение $\gamma(1)$ может быть любым комплексным числом $z \in \mathbb{T}$. Таким образом, можно отождествить $\widehat{\mathbb{Z}}$ с группой $\mathbb{T}$, $\widehat{\mathbb{Z}} = \mathbb{T}$.

Пусть теперь $G = \mathbb{T}$. Ясно, что при любом $n \in \mathbb{Z}$ функция $\gamma_n(z) = z^n$ ($z \in \mathbb{T}$) является характером $\mathbb{T}$. Можно показать, что $\mathbb{T}$ не имеет других характеров и мультипликативная группа $\widehat{\mathbb{T}}$ изоморфна аддитивной группе $\mathbb{Z}$.

Характеры группы $G = \mathbb{R}$ определяются формулой:

$$\gamma_x(t) = e^{2\pi i x t} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad \text{для некоторого } x \in \mathbb{R}.$$

Эта формула дает все характеры $\mathbb{R}$ и группа $\widehat{\mathbb{R}}$ изоморфна $\mathbb{R}$ (с обычной топологией).

Для $G = \mathbb{D}$ каждый характер имеет следующий вид:

$$\{\delta_j\}_{j=1}^{\infty} \rightarrow (-1)^{\sum_{\mu=1}^k \varepsilon_{\mu} \delta_{\mu}},$$

где $k \in \mathbb{N}$ и ε_{μ} равно 0 или 1 ($\mu = 1, \dots, k$). Таким образом, характер однозначно определяется числом

$$(6.2) \quad n = \sum_{\mu=1}^k \varepsilon_{\mu} 2^{\mu-1}.$$

Двойственная группа $\widehat{\mathbb{D}}$ изоморфна группе $\mathbb{N}_0$ неотрицательных целых чисел, в которой операция сложения задается следующим образом: если

$$n = \sum_{\mu=1}^k \varepsilon_{\mu}(n) 2^{\mu-1}, \quad m = \sum_{\nu=1}^l \varepsilon_{\nu}(m) 2^{\nu-1}$$

– двоичные разложения чисел $n, m \in \mathbb{N}_0$, то

$$m + n = \sum_{\mu=1}^{\max(k,l)} [\varepsilon_{\mu}(m) \oplus \varepsilon_{\mu}(n)] 2^{\mu-1},$$

где $\oplus$ означает сложение по модулю 2. Очевидно, что при таком определении операции $+$ для каждого $m \in \mathbb{N}_0$ имеем $m + m = 0$ и $-m = m$. Удобно отождествить группу $\mathbb{N}_0$ со специальной последовательностью функций, определенных на $[0, 1]$ и принимающих значения $+1$ и -1 . Пусть

$$w_0(t) = 1 \quad \text{для } t \in [0, 1].$$

Далее, равенством

$$t = \sum_{j=1}^{\infty} \delta_j 2^{-j}$$

устанавливается взаимно-однозначное соответствие между непериодическими элементами $\mathbb{D}$ и двоично-иррациональными точками $t \in [0, 1]$. Исходя из двоичного разложения (6.2) натурального числа n , полагаем

$$(6.3) \quad w_n(t) = (-1)^{\sum_{\mu=1}^k \varepsilon_{\mu}(n) \delta_{\mu}} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Поскольку $r_{\mu}(t) = (-1)^{\delta_{\mu}}$, то выполняется равенство

$$(6.4) \quad w_n(t) = \prod_{\mu=1}^k (r_{\mu}(t))^{\varepsilon_{\mu}(n)} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

Здесь t – любая двоично-иррациональная точка. В изучаемых нами вопросах несущественны значения функций w_n на счетном множестве двоично-рациональных точек; условимся в этих точках также определять функции w_n ($n \geq 1$) равенством (6.4). В частности,

$$(6.5) \quad w_{2^j}(t) = r_j(t) \quad (j \in \mathbb{N}, t \in [0, 1]).$$

Последовательность функций $\{w_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется системой Уолша.

Мы видели, что группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{T}$ двойственны друг к другу. Этот факт является частным случаем следующей теоремы

Принцип двойственности Л.С. ПОНТЯГИНА. Для любой локально компактной абелевой группы G с двойственной группой $\Gamma = \widehat{G}$ естественное отображение G в $\widehat{\Gamma}$, которое каждому элементу $t \in G$ ставит в соответствие характер t' на Γ по формуле

$$(6.6) \quad t'(\gamma) = \gamma(t), \quad \gamma \in \widehat{G},$$

является изоморфизмом топологических групп G и $\widehat{\Gamma}$.

В дальнейшем мы будем отождествлять элементы $t \in G$ с элементами $t' \in \widehat{\Gamma}$.

Пусть G – локально компактная абелева группа. Преобразование Фурье функции $f \in L^1(G)$ определяется равенством

$$(6.7) \quad \mathcal{F}_G(f)(\gamma) = \int_G f(t) \overline{\gamma(t)} d\mu_G(t), \quad \gamma \in \widehat{G}.$$

Будем писать также $\widehat{f}(\gamma)$ вместо $\mathcal{F}(f)(\gamma)$. Для локально компактных абелевых групп имеет место аналог теоремы Хаусдорфа–Юнга, что позволяет определить преобразование Фурье для функций $f \in L^p(G)$, $1 < p \leq 2$ (являющееся ограниченным оператором из $L^p(G)$ в $L^{p'}(\widehat{G})$) [36, гл. 8].

Если X – банахово пространство, то преобразование Фурье функции $f \in L^1_X(G)$ определяется, как в (6.7), где интеграл следует понимать в смысле Бохнера.

Пусть $1 \leq p \leq 2$. Для линейных комбинаций вида

$$(6.8) \quad \sum_{j=1}^n \varphi_j(t) x_j \quad (x_j \in X, \varphi_j \in L^p(G), j = 1, \dots, n)$$

преобразование Фурье определяется равенством

$$(6.9) \quad \mathcal{F}\left(\sum_{j=1}^n \varphi_j x_j\right)(\gamma) = \sum_{j=1}^n \widehat{\varphi}_j(\gamma) x_j.$$

Множество функций вида (6.8) (тензорное произведение $L^p(G) \otimes X$) является всюду плотным подмножеством в $L^p_X(G)$ (см. §2).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.1. Будем говорить, что пространство X имеет тип Фурье p относительно группы G , если оператор $\mathcal{F}$, первоначально определенный на $L^p(G) \otimes X$ равенством (6.9), может быть продолжен до ограниченного оператора

$$\mathcal{F}: L^p_X(G) \rightarrow L^{p'}_X(\widehat{G}).$$

Норму оператора $\mathcal{F}$ будем обозначать через $C_p(X, G)$.

Определение 6.1 было дано М. Мильманом [59].

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Пусть G – дискретная счетная группа, $G = \{h_k\}_{k=1}^\infty$. Легко видеть, что в этом случае определение 6.1 равносильно тому, что для любых векторов $x_1, \dots, x_n \in X$

$$(6.10) \quad \left(\int_{\widehat{G}} \left\| \sum_{k=1}^n \gamma(h_k) x_k \right\|^{p'} d\gamma \right)^{1/p'} \leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p}.$$

Рассмотрим понятие типа Фурье с точки зрения двойственности. Пусть G – локально компактная абелева группа. В соответствии с принципом двойственности преобразование Фурье функции $\psi \in L^1(\widehat{G})$ определяется равенством

$$(6.11) \quad \widehat{\psi}(t) = \int_{\widehat{G}} \psi(\gamma) \overline{\gamma(t)} d\mu_{\widehat{G}}(\gamma), \quad t \in G.$$

ТЕОРЕМА 6.3. *Банахово пространство X имеет тип Фурье p ($1 \leq p \leq 2$) относительно группы G тогда и только тогда, когда сопряженное пространство X^* имеет тип Фурье p относительно $\widehat{G}$. При этом $C_p(X, G) = C_p(X^*, \widehat{G})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что X имеет тип Фурье p относительно G . Тогда для любой функции $f \in L_X^p(G)$

$$(6.12) \quad \left(\int_{\widehat{G}} \|\widehat{f}(\gamma)\|_X^{p'} d\gamma \right)^{1/p'} \leq C \left(\int_G \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}.$$

Покажем, что преобразование Фурье может быть также продолжено до ограниченного оператора

$$\mathcal{F}: L_{X^*}^p(\widehat{G}) \rightarrow L_{X^*}^{p'}(G).$$

Пусть

$$(6.13) \quad g(\gamma) = \sum_{k=1}^m \psi_k(\gamma) x_k^* \quad (\psi_k \in L^p(\widehat{G}), x_k^* \in X^*).$$

Преобразование Фурье $\widehat{g} = \sum_{k=1}^m \widehat{\psi}_k x_k^* \in L_{X^*}^{p'}(G)$ (см. (6.11)). В силу предложения 2.6 для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f \in L_X^p(G)$ с $\|f\|_{L_X^p(G)} = 1$ такая, что

$$\left(\int_G \|\widehat{g}(t)\|_{X^*}^{p'} d\mu_G(t) \right)^{1/p'} \leq (1 + \varepsilon) \left| \int_G \langle f(t), \widehat{g}(t) \rangle d\mu_G(t) \right|.$$

Пользуясь теоремой Фубини и учитывая (6.11), (6.7) и (2.13), получаем

$$\int_G \langle f(t), \widehat{g}(t) \rangle d\mu_G(t) = \int_{\widehat{G}} \langle \widehat{f}(\gamma), g(\gamma) \rangle d\mu_{\widehat{G}}(\gamma).$$

Поэтому в силу (6.12) и инвариантности меры $\mu_{\widehat{G}}$ относительно обратного элемента (см. (6.1)) имеем

$$\begin{aligned} & \left(\int_G \|\widehat{g}(t)\|_{X^*}^{p'} d\mu_G(t) \right)^{1/p'} \\ & \leq (1 + \varepsilon) \int_{\widehat{G}} \|\widehat{f}(\gamma)\|_X \|g(\gamma)\|_{X^*} d\mu_{\widehat{G}}(\gamma) \\ & \leq (1 + \varepsilon) \left(\int_{\widehat{G}} \|\widehat{f}(\gamma)\|_X^{p'} d\mu_{\widehat{G}}(\gamma) \right)^{1/p'} \left(\int_{\widehat{G}} \|g(\gamma)\|_{X^*}^p d\mu_{\widehat{G}}(\gamma) \right)^{1/p} \\ & \leq C(1 + \varepsilon) \|g\|_{L_{X^*}^p(\widehat{G})}. \end{aligned}$$

Поскольку множество функций вида (6.13) всюду плотно в $L_{X^*}^p(\widehat{G})$, то отсюда следует, что X^* имеет тип Фурье p относительно $\widehat{G}$ и $C_p(X^*, \widehat{G}) \leq C_p(X, G)$.

Обратное утверждение получаем совершенно аналогично. Теорема доказана.

В случае $G = \mathbb{R}$ получаем, что банахово пространство X имеет тип Фурье p ($1 \leq p \leq 2$) тогда и только тогда, когда X^* имеет тип Фурье p (этот результат был получен Я. Петре [62]).

Теперь установим, что для банахова пространства X тип Фурье p относительно одной из групп $\mathbb{T}$, $\mathbb{R}$ или $\mathbb{Z}$ влечет тип Фурье p относительно каждой из этих групп.

Будем использовать следующие соотношения:

$$(6.14) \quad \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left(\frac{\sin \theta}{\theta + k\pi} \right)^2 = 1 \quad \text{для любого } \theta \in \mathbb{R}$$

и

$$(6.15) \quad B_r \equiv \inf_{\theta \in \mathbb{R}} \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin \theta}{\theta + k\pi} \right|^r \right)^{1/r} > 0 \quad (r > 1).$$

Первое из них мгновенно следует из равенства Парсеваля (1.5), примененного к 1-периодической функции $\varphi_\theta(x) = e^{-i\theta(x-[x])}$ (где $[x]$ – целая часть числа $x \in \mathbb{R}$, θ фиксировано). Второе неравенство очевидно.

ТЕОРЕМА 6.4. *Банахово пространство X имеет тип Фурье p ($1 \leq p \leq 2$) относительно $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{Z}$. При этом*

$$C_p(X, \mathbb{R}) \leq C_p(X, \mathbb{Z}) \leq B_{p'}^{-1} C_p(X, \mathbb{R}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{R}$. Тогда для любой функции $f \in L_X^p(\mathbb{R})$

$$(6.16) \quad \left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)\|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \leq C \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^p dt \right)^{1/p}.$$

Мы должны показать, что преобразование Фурье может быть продолжено до ограниченного оператора $\mathcal{F}: L_X^p(\mathbb{Z}) \rightarrow L_X^{p'}(\mathbb{T})$. Для этого достаточно доказать неравенство

$$(6.17) \quad \left(\int_0^1 \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{2\pi i n t} \right\|^{p'} dt \right)^{1/p'} \leq C' \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^p \right)^{1/p},$$

где $\{x_n\}$ – произвольная финитная последовательность векторов из X .

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \chi_{[n, n+1)}(t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Имеем

$$\|f(t)\|^p = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^p \chi_{[n, n+1)}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

и, следовательно,

$$(6.18) \quad \left(\int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^p dt \right)^{1/p} = \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^p \right)^{1/p}.$$

Далее,

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \xi} \widehat{\chi}_{[0,1)}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \xi} \frac{1 - e^{-2\pi i \xi}}{2\pi i \xi}$$

и

$$\|\widehat{f}(\xi)\| = \frac{1}{\pi} \left| \frac{\sin \pi \xi}{\xi} \right| \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \xi} \right\|.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)\|^{p'} d\xi &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right|^{p'} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \xi} \right\|^{p'} d\xi \\ &= \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi(\xi + k)} \right|^{p'} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \xi} \right\|^{p'} d\xi \end{aligned}$$

и в силу (6.15)

$$\left(\int_0^1 \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \xi} \right\|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \leq B_{p'}^{-1} \left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)\|^{p'} d\xi \right)^{1/p'}.$$

Используя (6.16) и (6.18), получаем (6.17) (с постоянной $C' = B_{p'}^{-1}C$).

Предположим теперь, что X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{Z}$, так что выполняется (6.17). Мы должны вывести отсюда (6.16); это будет означать, что X имеет тип Фурье p и относительно $\mathbb{R}$. Ясно, что достаточно рассмотреть функции вида

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n \chi_{[n\delta, (n+1)\delta)}(t),$$

где $\{x_n\}$ – финитная последовательность векторов из X и $\delta > 0$. Для таких функций имеем

$$(6.19) \quad \int_{\mathbb{R}} \|f(t)\|^p dt = \delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^p$$

и

$$\widehat{f}(\xi) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \delta \xi} \frac{1 - e^{-2\pi i \delta \xi}}{2\pi i \delta \xi}.$$

Как и выше, получаем, используя (6.14),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)\|^{p'} d\xi &= \delta^{p'-1} \int_{\mathbb{R}} \left| \frac{\sin \pi \xi}{\pi \xi} \right|^{p'} \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \delta \xi} \right\|^{p'} d\xi \\ &\leq \delta^{p'-1} \int_0^1 \left\| \sum_{n \in \mathbb{Z}} x_n e^{-2\pi i n \delta \xi} \right\|^{p'} d\xi. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (6.17) и (6.19)

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|\widehat{f}(\xi)\|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \leq C' \left(\delta \sum_{n \in \mathbb{Z}} \|x_n\|^p \right)^{1/p} = C' \|f\|_{L_X^p(\mathbb{R})},$$

что и требовалось. Теорема доказана.

Поскольку группа $\mathbb{R}$ изоморфна своей двойственной группе, то, применяя теоремы 6.3 и 6.4, мгновенно получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 6.5. *Банахово пространство X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{T}$. При этом*

$$C_p(X, \mathbb{R}) \leq C_p(X, \mathbb{T}) \leq B_p^{-1} C_p(X, \mathbb{R}).$$

ТЕОРЕМА 6.6. *Для любого банахова пространства X следующие свойства эквивалентны:*

- (1) X имеет тип Фурье p относительно окружности $\mathbb{T}$;
- (2) X имеет тип Фурье p относительно действительной прямой $\mathbb{R}$;
- (3) X имеет тип Фурье p относительно группы целых чисел $\mathbb{Z}$.

Бургейн [13] показал, что если банахово пространство X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{T}$, то X имеет также тип Фурье p относительно $\mathbb{R}$. Полностью теорема 6.6 была независимо доказана в работах [1], [28], [47].

Рассмотрим некоторые вопросы, связанные с прямыми произведениями групп. Пусть $G_1, \dots, G_n$ – локально компактные абелевы группы и $G = G_1 \times \dots \times G_n$ – их прямое произведение. Если $\gamma_j \in \widehat{G}_j$ ($j = 1, \dots, n$), то формулой

$$(6.20) \quad \gamma(t_1, \dots, t_n) = \prod_{j=1}^n \gamma_j(t_j), \quad (t_1, \dots, t_n) \in G,$$

определяется характер γ на G . Нетрудно показать (см. [36, гл. 6]), что любой характер на G имеет вид (6.20) и отображение $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \mapsto \gamma$, задаваемое формулой (6.20), является топологическим изоморфизмом прямого произведения $\widehat{G}_1 \times \dots \times \widehat{G}_n$ на группу характеров $\widehat{G}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.7. *Если банахово пространство X имеет тип Фурье p ($1 \leq p \leq 2$) относительно каждой из групп G_j ($j = 1, \dots, n$), то X имеет тип Фурье p относительно их прямого произведения $G = G_1 \times \dots \times G_n$ и*

$$C_p(X, G) \leq \prod_{j=1}^n C_p(X, G_j).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Ясно, что достаточно рассмотреть случай $n = 2$. Пусть $f \in L_X^1(G) \cap L_X^p(G)$. Тогда

$$\widehat{f}(\gamma_1, \gamma_2) = \iint_G f(t_1, t_2) \overline{\gamma_1(t_1) \gamma_2(t_2)} dt_1 dt_2 = \mathcal{F}_{G_2} \{ \mathcal{F}_{G_1} [f(\cdot, t_2)](\gamma_1) \}(\gamma_2).$$

Используя неравенство Минковского ($p'/p \geq 1$), получаем

$$\begin{aligned}
& \left(\iint_{\widehat{G}} \|\widehat{f}(\gamma_1, \gamma_2)\|_X^{p'} d\gamma_1 d\gamma_2 \right)^{p/p'} \\
&= \left(\int_{\widehat{G}_1} d\gamma_1 \left(\int_{\widehat{G}_2} \|\mathcal{F}_{G_2}\{\mathcal{F}_{G_1}[f(\cdot, t_2)](\gamma_1)\}(\gamma_2)\|_X^{p'} d\gamma_2 \right) d\gamma_1 \right)^{p/p'} \\
&\leq C_p^p(B, G_2) \left(\int_{\widehat{G}_1} \left(\int_{G_2} \|\mathcal{F}_{G_1}[f(\cdot, t_2)](\gamma_1)\|_X^p dt_2 \right)^{p'/p} d\gamma_1 \right)^{p/p'} \\
&\leq C_p^p(X, G_2) \int_{G_2} \left(\int_{\widehat{G}_1} \|\mathcal{F}_{G_1}[f(\cdot, t_2)](\gamma_1)\|_X^{p'} d\gamma_1 \right)^{p/p'} dt_2 \\
&\leq C_p^p(X, G_2) C_p^p(X, G_1) \int_{G_2} \int_{G_1} \|f(t_1, t_2)\|_X^p dt_1 dt_2.
\end{aligned}$$

Предложение доказано.

Теорема 6.4 допускает обобщение на высшие размерности (доказательство аналогично).

ТЕОРЕМА 6.8. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Банахово пространство имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{Z}^n$. При этом

$$C_p(X, \mathbb{R}^n) \leq C_p(X, \mathbb{Z}^n) \leq B_{p'}^{-n} C_p(X, \mathbb{R}^n).$$

Далее, применяя теорему 6.3, получаем также следующие результаты.

ТЕОРЕМА 6.9. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Банахово пространство X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{T}^n$. При этом

$$C_p(X, \mathbb{R}^n) \leq C_p(X, \mathbb{T}^n) \leq B_{p'}^{-n} C_p(X, \mathbb{R}^n).$$

ТЕОРЕМА 6.10. Пусть $n \in \mathbb{N}$ и X – банахово пространство. Тогда следующие три свойства эквивалентны:

- (1) X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{T}^n$;
- (2) X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{R}^n$;
- (3) X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{Z}^n$.

Рассмотрим один интересный эффект, связанный с прямыми произведениями. Для некоторых групп Γ выполняется следующее свойство: если банахово пространство X имеет тип Фурье p относительно Γ , то постоянная $C_p(X, \Gamma^N)$ одна и та же для всех N .² Для групп $\mathbb{T}$ и $\mathbb{Z}$ этот факт доказал М. Андерсон [1]. Мы получим более общий результат, из которого следует, что указанное свойство справедливо также для групп $\mathbb{D}$ и $\mathbb{N}_0$.

²Группа $\mathbb{R}$ этим свойством не обладает, как следует из результатов К.И. Бабенко [3] и У. Бекнера [5] (см. § 1).

Пусть Γ – дискретная счетная абелева группа и $G = \widehat{\Gamma}$ (напомним, что в этом случае группа G компактна). Мы будем рассматривать элементы группы Γ как характеры группы G . Поэтому естественно считать основную групповую операцию в Γ умножением. Считаем также меры одноэлементных множеств из Γ равными единице.

Будем говорить, что множества $\Omega, \Omega' \subset \Gamma$ независимы, если для любых $\gamma, \delta \in \Omega$ и $\gamma', \delta' \in \Omega'$ равенство $\gamma\gamma' = \delta\delta'$ имеет место тогда и только тогда, когда $\gamma = \delta$ и $\gamma' = \delta'$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6.11. Дискретная счетная абелева группа Γ называется диссипативной, если для любого конечного множества $\Omega \subset \Gamma$ найдется такое множество $\Omega' \subset \Gamma$, что:

- 1) множества Ω и Ω' независимы;
- 2) существует биективное отображение $\psi: \Omega \rightarrow \Omega'$ такое, что для любого набора $\{x_\gamma\}_{\gamma \in \Omega}$ элементов произвольного банахова пространства X и любого $y > 0$

$$(6.21) \quad \mu_G \left(\left\{ t \in G : \left\| \sum_{\gamma \in \Omega} \gamma(t) x_\gamma \right\| > y \right\} \right) = \mu_G \left(\left\{ t \in G : \left\| \sum_{\gamma \in \Omega} \psi(\gamma)(t) x_\gamma \right\| > y \right\} \right).$$

Из этого определения и теоремы Фубини мгновенно следует

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.12. Пусть Γ и Λ – дискретные счетные абелевы группы. Если Γ и Λ диссипативны, то их прямое произведение $\Gamma \times \Lambda$ также диссипативно.

Покажем, что группы $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{N}_0$ диссипативны.

Пусть Ω – конечное подмножество $\mathbb{Z}$. Положим

$$m_0 = 2 \max_{n \in \Omega} |n| + 1, \quad \Omega' = \{m_0 n\}_{n \in \Omega} \quad \text{и} \quad \psi(n) = m_0 n \quad (n \in \Omega).$$

Ясно, что Ω и Ω' независимы (как подмножества аддитивной группы). Элементам $n \in \mathbb{Z}$ соответствуют функции $e^{2\pi i n t}$ ($0 \leq t < 1$); условие (6.21) легко следует из периодичности этих функций.

Далее, пусть Ω – конечное подмножество в $\mathbb{N}_0$. Пусть

$$n = \sum_{\mu=1}^k \varepsilon_\mu(n) 2^{\mu-1}$$

– двоичное разложение числа $1 \leq n < 2^k$. Выберем k_0 так, чтобы для всех $n \in \Omega$ выполнялось неравенство $n < 2^{k_0}$. Определим отображение ψ следующим образом: если $0 \in \Omega$, то полагаем $\psi(0) = 0$; для любого $n \in \Omega$, $n \neq 0$,

$$\psi(n) = \sum_{\mu=1}^k \varepsilon_\mu(n) 2^{\mu+k_0}.$$

Пусть $\Omega' = \{\psi(n)\}_{n \in \Omega}$. Ясно, что ψ – биекция и Ω, Ω' независимы. Далее, группа $\mathbb{N}_0$ отождествляется с последовательностью функций Уолша $\{w_n\}_{n=0}^\infty$. Для любого $n \in \Omega$ ($n \neq 0$) имеем (см. (6.4))

$$w_n(t) = \prod_{\mu=1}^k [r_\mu(t)]^{\varepsilon_\mu(n)} \quad \text{и} \quad w_{\psi(n)}(t) = \prod_{\mu=1}^k [r_{\mu+k_0+1}(t)]^{\varepsilon_\mu(n)}.$$

Отсюда следует (6.21).

ТЕОРЕМА 6.13. Пусть Γ – дискретная счетная диссипативная абелева группа и банахово пространство X имеет тип Фурье p относительно Γ . Тогда для любого натурального N

$$C_p(X, \Gamma^N) = C_p(X, \Gamma).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство $C_p(X, \Gamma^N) \geq C_p(X, \Gamma)$ очевидно, поскольку Γ можно рассматривать как подгруппу в Γ^N . По тем же соображениям, а также в силу предложения 6.12 для доказательства обратного неравенства достаточно рассмотреть случай $N = 2$.

Пусть $\Gamma \times \Gamma = \{\eta_k\}_{k=1}^\infty$. В силу замечания 6.2 мы должны доказать, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых векторов $x_1, \dots, x_n \in X$ выполняется неравенство ($\mu \equiv \mu_G$)

$$(6.22) \quad \left(\int_G \int_G \left\| \sum_{k=1}^n \eta_k(t, s) x_k \right\|^{p'} d\mu(t) d\mu(s) \right)^{1/p'} \leq C_p(X, \Gamma) \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p}.$$

Имеем (см. (6.20))

$$(6.23) \quad \eta_k(t, s) = \gamma_k(t) \tilde{\gamma}_k(s) \quad (\gamma_k, \tilde{\gamma}_k \in \Gamma; t, s \in G).$$

Пусть Ω – множество всех элементов $\gamma_k, \tilde{\gamma}_k$ ($k = 1, \dots, n$). Из определения 6.11 следует, что существуют множество $\Omega' \subset \Gamma$ и биекция $\psi: \Omega \rightarrow \Omega'$ такие, что Ω и Ω' независимы и для любых $x_1, \dots, x_n \in X$

$$(6.24) \quad \mu \left(\left\{ s \in G : \left\| \sum_{k=1}^n x_k \tilde{\gamma}_k(s) \right\| > y \right\} \right) = \mu \left(\left\{ s \in G : \left\| \sum_{k=1}^n x_k \psi(\tilde{\gamma}_k)(s) \right\| > y \right\} \right) \quad (y > 0).$$

Положим $\beta_k = \psi(\tilde{\gamma}_k)$. Используя теорему Фубини и (6.24), имеем для любых $x_1, \dots, x_n \in X$

$$\begin{aligned} \int_G \int_G \left\| \sum_{k=1}^n \eta_k(t, s) x_k \right\|^{p'} d\mu(t) d\mu(s) &= \int_G \int_G \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) \tilde{\gamma}_k(s) x_k \right\|^{p'} d\mu(t) d\mu(s) \\ &= \int_G \int_G \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) \beta_k(s) x_k \right\|^{p'} d\mu(t) d\mu(s) \\ &= \int_G \int_G \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) \beta_k(s+t) x_k \right\|^{p'} d\mu(t) d\mu(s) \\ &= \int_G \int_G \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) \beta_k(t) \beta_k(s) x_k \right\|^{p'} d\mu(t) d\mu(s). \end{aligned}$$

При фиксированном $s \in G$ положим $x'_k(s) = \beta_k(s) x_k$; тогда $\|x'_k(s)\| = \|x_k\|$. Рассмотрим интеграл

$$J(s) = \int_G \left\| \sum_{k=1}^n \gamma_k(t) \beta_k(t) x'_k(s) \right\|^{p'} dt.$$

Ключевым моментом является то, что элементы $\gamma_k \beta_k$ при различных k различны – это сразу следует из независимости множеств Ω, Ω' и (6.23). Поэтому мы получаем при любом $s \in G$

$$J(s) \leq C_p^{p'}(X, \Gamma) \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{p'/p}.$$

Отсюда следует (6.22). Теорема доказана.

Теперь мы можем дополнить приведенные выше результаты.³

ТЕОРЕМА 6.14. *Пусть банахово пространство X имеет тип Фурье p относительно одной из групп $\mathbb{T}$, $\mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$. Тогда для любого натурального n выполняются следующие свойства:*

- (1) X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{T}^\infty$ и

$$C_p(X, \mathbb{T}) = C_p(X, \mathbb{T}^n) = C_p(X, \mathbb{T}^\infty);$$

- (2) X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{R}^\infty$ и

$$C_p(X, \mathbb{R}^\infty) \leq C_p(X, \mathbb{T}), \quad C_p(X, \mathbb{R}^\infty) \leq C_p(X, \mathbb{Z});$$

- (3) X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{Z}^\infty$ и

$$C_p(X, \mathbb{Z}) = C_p(X, \mathbb{Z}^n) = C_p(X, \mathbb{Z}^\infty).$$

Применяя теоремы 6.3 и 6.13, а также теорему 7.15 из § 7 настоящей работы, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 6.15. *Если банахово пространство X имеет тип Фурье p относительно одной из групп $\mathbb{D}$, $\mathbb{N}_0$, то оно имеет тип Фурье p и относительно другой. При этом для любого натурального n*

- 1) X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{D}^\infty$ и

$$C_p(X, \mathbb{D}) = C_p(X, \mathbb{D}^n) = C_p(X, \mathbb{D}^\infty);$$

- 2) X имеет тип Фурье p относительно $\mathbb{N}_0^\infty$ и

$$C_p(X, \mathbb{N}_0) = C_p(X, \mathbb{N}_0^n) = C_p(X, \mathbb{N}_0^\infty).$$

В заключение этого параграфа мы остановимся на результатах Ж. Бургейна [12], посвященных неравенствам типа Хаусдорфа–Юнга для характеров компактных абелевых групп. В работе [12] была доказана следующая теорема.

³Определения, связанные с прямыми произведениями последовательностей локально компактных абелевых групп, см. в [36, гл. 2], [34, § 38], [37, гл. 6].

ТЕОРЕМА 6.16. Пусть G – компактная абелева группа. Если банахово пространство X имеет нетривиальный тип Радемахера, то существуют числа $p > 1$, $q < \infty$ и $0 < C < \infty$ такие, что для любых векторов $x_1, \dots, x_n \in X$ и любых характеров $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \widehat{G}$

$$\left(\int_G \left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2} \leq C \left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^p \right)^{1/p}$$

и

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q \right)^{1/q} \leq C \left(\int_G \left\| \sum_{j=1}^n \gamma_j(t) x_j \right\|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Доказательство этой теоремы является довольно трудным. Впоследствии Бургейн [13] получил более сильные результаты для канторовой группы $\mathbb{D}$ и окружности $\mathbb{T}$. В §8 мы дадим полное доказательство теоремы Бургейна для группы $\mathbb{D}$.

§7. Типы и котиры банаховых пространств относительно общих ортонормированных систем

7.1. Выше мы изучали понятия типа и котира Радемахера, а также понятие типа Фурье и его обобщение на произвольные локально компактные абелевы группы. Последнее обобщение включает такие классические ортонормированные системы, как тригонометрическая система и система Уолша. Естественно пойти дальше и выделить в изучаемом круге вопросов те общие закономерности, которые не связаны со специфическими особенностями конкретных систем, а присущи каждой равномерно ограниченной ортонормированной системе. Этой задаче посвящен настоящий параграф. Отправной точкой наших определений является теорема Ф. Рисса (теорема 1.2).

Пусть (I, μ) – пространство с мерой, $\mu(I) = 1$. Далее, пусть $\Phi = \{\varphi_n\}_{n=1}^\infty$ – ортонормированная система (ОНС) скалярных (действительных или комплекснозначных) функций на I . Будем предполагать, что система Φ равномерно ограничена,

$$(7.1) \quad |\varphi_n(t)| \leq M \text{ для всех } t \in I \text{ и всех } n \in \mathbb{N}.$$

Пусть X – банахово пространство. Для каждой функции $f \in L_X^1(I)$ через $c_n(f)$ обозначим ее коэффициенты Фурье,

$$(7.2) \quad c_n(f) = \int_I f(t) \overline{\varphi_n(t)} d\mu, \quad n \in \mathbb{N},$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера. Для векторнозначных функций имеет место аналог теоремы Мерсера:

если система $\{\varphi_n\}$ равномерно ограничена, то для любой функции $f \in L_X^1$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(f) = 0.$$

Доказательство такое же, как в скалярном случае (см. [4, с. 74]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.1. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Будем говорить, что банахово пространство X имеет Φ -тип p , если существует постоянная C такая, что для любого конечного набора $\{x_k\}_{k=1}^n$ элементов $x_k \in X$

$$(7.3) \quad \left(\int_I \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) x_k \right\|^{p'} d\mu \right)^{1/p'} \leq C \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^p \right)^{1/p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Пусть X имеет Φ -тип p . Тогда, как легко видеть, для любой последовательности $\{x_k\} \in l_X^p$ ряд $\sum_{k=1}^\infty \varphi_k x_k$ сходится по норме $L_X^{p'}(I)$ и его сумма f удовлетворяет неравенству

$$(7.4) \quad \|f\|_{L_X^{p'}} \leq C \|\{x_k\}\|_{l_X^p}.$$

Более того, этот ряд при любой перестановке его членов сходится в $L_X^{p'}$ к той же сумме f .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.3. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Будем говорить, что банахово пространство X имеет Φ -котип p' , если существует постоянная C такая, что для любого полинома $\sum_{k=1}^n x_k \varphi_k$ с коэффициентами $x_k \in X$

$$(7.5) \quad \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C \left(\int_I \left\| \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k(t) \right\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7.4. Пусть $1 \leq p \leq 2$. Будем говорить, что банахово пространство X имеет сильный Φ -котип p' , если существует постоянная C такая, что для любой функции $f \in L_X^p(I)$ последовательность ее коэффициентов Фурье $\{c_n(f)\}$ удовлетворяет неравенству

$$(7.6) \quad \left(\sum_{n=1}^\infty \|c_n(f)\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C \left(\int_I \|f(t)\|^p d\mu \right)^{1/p}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Систему Радемахера будем обозначать через R . В случае $\Phi = R$ наши определения равносильны определениям § 5. Далее, пусть G – компактная абелева группа со счетной двойственной группой $\Gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^\infty$. Легко видеть, что Γ – ортонормированная система функций на G .⁴ Тип Фурье p ($1 \leq p \leq 2$) банахова пространства X относительно Γ есть не что иное, как Γ -тип p в смысле определения 7.1 (см. замечание 6.2). С другой стороны, тип Фурье p пространства X относительно G означает то же самое, что сильный Γ -котип p' (см. определения 6.1 и 7.4). Например, если $G = \mathbb{T}$, то система характеров есть тригонометрическая система $T = \{e^{2\pi i n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}$ ($t \in [0, 1]$). Сильный T -котип p' ($1 \leq p \leq 2$) банахова пространства X совпадает с типом Фурье p относительно $\mathbb{T}$. Далее, по теореме 6.6 тип Фурье p относительно $\mathbb{T}$ равносильен типу Фурье p относительно $\mathbb{Z}$. Но группа $\widehat{\mathbb{T}}$ изоморфна $\mathbb{Z}$; поэтому согласно

⁴В силу теоремы Стоуна–Вейерштрасса [36, т. 1, с. 197] система Γ полна в $L^1(G)$ (определение см. в п. 7.2).

сказанному выше тип Фурье p относительно $\mathbb{Z}$ совпадает с T -типом p . Таким образом, T -тип p и сильный T -котип p' ($1 \leq p \leq 2$) банахова пространства X равносильны. Аналогичное утверждение справедливо и для системы Уолша; ниже мы вернемся к этим вопросам.

Напомним, что понятие типа Фурье (относительно $\mathbb{R}$) впервые ввел Я. Петре [62]. В работе О. Бласко и А. Пелчинского [9] применялось другое определение типа Фурье p – в терминах коэффициентов по тригонометрической системе T ; согласно введенной нами терминологии это определение означает сильный T -котип p' и равносильно типу Фурье относительно группы $\mathbb{T}$. Из теоремы 6.5 следует равносильность “континуального” и “дискретного” типов Фурье, изучавшихся в указанных работах.

7.2. В общем случае из Φ -котипа p' не следует сильный Φ -котип p' (для системы Радемахера этот вопрос обсуждался в §5). Однако для любой полной системы Φ эти понятия равносильны.

Будем говорить, что Φ – полная система в пространстве $L^p(I)$ ($1 \leq p < \infty$), если совокупность всех полиномов $\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$ со скалярными коэффициентами является всюду плотным множеством в $L^p(I)$.

ЛЕММА 7.6. Пусть X – банахово пространство и Φ – ортонормированная система на I , полная в пространстве $L^p(I)$ ($1 \leq p < \infty$). Тогда для любой функции $f \in L_X^p(I)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется полином $\psi = \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k$ ($x_k \in X$) такой, что $\|f - \psi\|_{L_X^p} < \varepsilon$.

Это утверждение очевидно, когда f – простая функция, $f = \sum_{j=1}^N c_j \chi_{E_j}$ ($c_j \in X$). Остается применить лемму 2.4.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.7. Пусть Φ – полная в $L^p(I)$ ($1 \leq p \leq 2$) равномерно ограниченная система. Если банахово пространство X имеет Φ -котип p' , то X имеет и сильный Φ -котип p' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f \in L_X^p(I)$. Для фиксированного натурального N обозначим

$$\sigma_N = \left(\sum_{k=1}^N \|c_k(f)\|^{p'} \right)^{1/p'}.$$

Пусть $\varepsilon > 0$. По лемме 7.6 существует полином $\psi = \sum_{k=1}^n x_k \varphi_k$ ($x_k \in X$) такой, что

$$\|f - \psi\| < \frac{\varepsilon}{MN^{1/p'}}$$

(M – постоянная в (7.1)). Тогда

$$\sigma_N \leq \left(\sum_{k=1}^N \|c_k(\psi)\|^{p'} \right)^{1/p'} + \varepsilon \leq \left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^{p'} \right)^{1/p'} + \varepsilon.$$

Поскольку X имеет Φ -котип p' , то

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C \|\psi\|_{L_X^p} \leq C(\|f\|_{L_X^p} + \varepsilon).$$

Таким образом, для любого $N \in \mathbb{N}$ и любого $\varepsilon > 0$

$$\sigma_N \leq C \|f\|_{L_X^p} + (C + 1)\varepsilon.$$

Отсюда следует (7.6). Предложение доказано.

7.3. В предложении 5.22 была установлена связь между понятиями типа и сильного котира Радемахера с точки зрения двойственности банаховых пространств. Аналогичное утверждение содержится в теореме 6.3 для локально компактных абелевых групп. Приведем теперь соответствующий результат для общих ортонормированных систем. Как и выше, Φ – ортонормированная система на I , удовлетворяющая условию (7.1).

ТЕОРЕМА 7.8. Пусть X – банахово пространство и $1 \leq p \leq 2$. Тогда:

- (i) X имеет Φ -тип p тогда и только тогда, когда X^* имеет сильный Φ -котип p' ;
- (ii) X^* имеет Φ -тип p тогда и только тогда, когда X имеет сильный Φ -котип p' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Предположим, что X имеет Φ -тип p . Пусть $g \in L_{X^*}^{p'}(I)$. Обозначим

$$\sigma_N = \left(\sum_{k=1}^N \|c_k(g)\|_{X^*}^{p'} \right)^{1/p'}.$$

В силу предложения 2.6 для любого $\varepsilon > 0$ найдутся векторы $x_1, \dots, x_N \in X$ такие, что $(\sum_{k=1}^N \|x_k\|^p)^{1/p} = 1$ и

$$\sigma_N < (1 + \varepsilon) \sum_{k=1}^N \langle x_k, c_k(g) \rangle.$$

Далее, в силу (2.13) и (7.3) имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^N \langle x_k, c_k(g) \rangle &= \sum_{k=1}^N \left\langle x_k, \int_I g(t) \overline{\varphi_k(t)} d\mu \right\rangle = \int_I \left\langle \sum_{k=1}^N x_k \varphi_k(t), g(t) \right\rangle d\mu \\ &\leq \int_I \left\| \sum_{k=1}^N x_k \varphi_k(t) \right\|_X \|g(t)\|_{X^*} d\mu \leq \left\| \sum_{k=1}^N x_k \varphi_k \right\|_{L_X^{p'}} \|g\|_{L_{X^*}^p} \leq C \|g\|_{L_{X^*}^p}. \end{aligned}$$

Из полученных оценок следует, что X имеет сильный Φ -тип p . Обратное утверждение в (i) доказывается аналогично. Точно так же получим утверждение (ii). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Пусть X – комплексное пространство. Если умножение на комплексные числа в X^* определить равенством

$$(\alpha g)(a) = \alpha g(a) \quad (g \in X^*, a \in X),$$

то Φ -тип p пространства X будет эквивалентен сильному $\bar{\Phi}$ -котипу p' пространства X^* , где $\bar{\Phi} = \{\bar{\varphi}_n\}$ – система комплексно сопряженных функций. Это ничего не меняет в случае, когда Φ – система всех характеров компактной абелевой группы G . То же самое будет и в случае, когда Φ – произвольная равномерно ограниченная ОНС, а X – пространство с инволюцией (см. [44, с. 475]). Заметим, что нам не известен пример системы Φ и пространства X таких, что X имеет Φ -тип p , но не имеет $\bar{\Phi}$ -тип p .

В связи с теоремой 7.8 подчеркнем еще, что, вообще говоря, Φ -котип p' пространства X^* не влечет Φ -тип p пространства X – например, в случае $\Phi = R$ (см. § 5).

7.4. Очевидно, что каждое банахово пространство имеет Φ -тип 1 и сильный Φ -котип ∞ для любой равномерно ограниченной ортонормированной системы Φ . С помощью интерполяции легко получаем, что свойства Φ -типа p и сильного Φ -котипа p' усиливаются с возрастанием p ($1 \leq p \leq 2$).

ТЕОРЕМА 7.9. Пусть $1 < p \leq 2$ и банахово пространство X имеет Φ -тип p . Тогда X имеет Φ -тип r для любого $1 \leq r < p$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пользуясь замечанием 7.2, зададим на l_X^p линейный оператор J ,

$$J: \{x_n\} \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n \quad (\text{сходимость в } L_X^{p'}).$$

В силу (7.4) оператор J ограниченно действует из l_X^p в $L_X^{p'}(I)$. Пусть $\mathring{L}_X^{\infty}(I)$ означает замыкание множества простых функций из $L_X^{\infty}(I)$ по норме этого пространства. Из (7.1) легко следует, что J ограниченно действует из l_X^1 в $\mathring{L}_X^{\infty}(I)$. В силу теоремы 3.5 имеем

$$[l_X^1, l_X^p]_{\theta} = l_X^r, \quad [L_X^{p'}, \mathring{L}_X^{\infty}]_{\theta} = L_X^{r'} \quad (\theta = p'/r').$$

Применяя теорему 3.4, получаем, что оператор J ограниченно действует из l_X^r в $L_X^{r'}(I)$. Следовательно, X имеет Φ -тип r . Теорема доказана.

Заметим, что в случае системы Радемахера теорема 7.9 мгновенно следует из неравенства Иенсена (см. предложение 5.7). Конечно, главную роль здесь играют неравенства Хинчина–Кахана – в общем случае применение неравенства Иенсена в правой части (7.3) ничего не дает.

Из теорем 7.8 и 7.9 следует

ТЕОРЕМА 7.10. Пусть $1 < p \leq 2$ и банахово пространство X имеет сильный Φ -котип p' . Тогда для любого $1 \leq r < p$ X имеет сильный Φ -котип r' .

Конечно, можно и непосредственно применить интерполяцию для доказательства этой теоремы. Пусть $\mathcal{F}$ – оператор, который каждой функции $f \in L_X^1(I)$ ставит в соответствие последовательность ее коэффициентов Фурье по системе Φ . Обозначим через $\mathring{l}_X^{\infty}$ множество всех последовательностей $\{x_n\} \in l_X^{\infty}$ с $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\| = 0$ (это –

замкнутое подпространство в l_X^∞). В силу теоремы Мерсера (см. п. 7.1) оператор $\mathcal{F}$ ограниченно действует из $L_X^1(I)$ в $\overset{\circ}{l}_X^\infty$. Кроме того, по условию, $\mathcal{F}$ – ограниченный оператор из $L_X^p(I)$ в $l_X^{p'}$. В силу теоремы 3.5 при $\theta = p'/r'$

$$[L_X^1, L_X^p]_\theta = L_X^r, \quad [l_X^{p'}, \overset{\circ}{l}_X^\infty]_\theta = l_X^{r'}.$$

Остается применить теорему 3.4.

Заметим, что для системы Радемахера справедливо и аналогичное утверждение для котира, причем оно непосредственно следует из неравенства Иенсена.

Теоремы 7.9 и 7.10 можно доказать также с помощью вещественной интерполяции. На этом пути получаются и более сильные результаты.

ТЕОРЕМА 7.11. *Пусть $1 < p \leq 2$ и X – банахово пространство. Тогда:*

- (1) *если X имеет Ψ -тип p , то для любых $1 < r < p$ и $1 \leq s < \infty$ существует постоянная K такая, что для каждой финитной последовательности $\{x_k\}$ ($x_k \in X$)*

$$(7.7) \quad \|f\|_{L_X^{r',s}} \leq K \|\{x_k\}\|_{l_X^{r,s}} \quad \left(f = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \varphi_k \right);$$

- (2) *если X имеет сильный Ψ -котип p' , то для любых $1 < r < p$ и $1 \leq s < \infty$ существует постоянная K такая, что для каждой функции $f \in L_X^{r,s}(I)$*

$$(7.8) \quad \|\{c_n(f)\}\|_{l_X^{r',s}} \leq K \|f\|_{L_X^{r,s}}.$$

Для доказательства достаточно рассуждать, как и выше, и применить следствие 3.13 (и замечание к нему), а затем теорему 3.11.

В силу неравенства (2.6) при $r = s$ теорема 7.11 содержит усиление теорем 7.9 и 7.10. Заметим, что в этом случае неравенства (7.7) и (7.8) принимают вид

$$(7.9) \quad \left(\int_0^1 \xi^{r-2} f^*(\xi)^r d\xi \right)^{1/r} \leq K \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^r \right)^{1/r}$$

и соответственно,

$$(7.10) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{r-2} c_n^*(f)^r \right)^{1/r} \leq K \left(\int_I \|f(t)\|^r d\mu(t) \right)^{1/r}.$$

Это – векторнозначные аналоги неравенств Пэли (см. [82, гл. 12]).

Теорему 7.11 нетрудно доказать и прямым путем с помощью соответствующих оценок для перестановок. Например, утверждение (1) этой теоремы мгновенно следует из неравенства

$$(7.11) \quad f^*\left(\frac{1}{n}\right) \leq M \sum_{k=1}^n x_k^* + C n^{1/p'} \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} (x_k^*)^p \right)^{1/p}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и леммы 2.3. Неравенство (7.11) в скалярном случае было доказано в работе [60]; для векторнозначного случая доказательство аналогично.

Наилучшим возможным показателем типа и котипа является показатель 2 (см. §5). Если H – гильбертово пространство, то для любой ортонормированной системы Φ H имеет Φ -тип 2 и Φ -котип 2. Действительно, в силу ортогональности функций φ_k имеем

$$\int_I \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) x_k \right\|_H^2 dt = \sum_{k=1}^n \|x_k\|_H^2.$$

В §5 мы приводили теорему С. Кwapеня [50], согласно которой банахово пространство X , имеющее R -тип 2 и R -котип 2, изоморфно некоторому гильбертову пространству. В §8 будет показано, что в этой теореме систему Радемахера можно заменить любой равномерно ограниченной системой Φ . В работе [50] аналогичное утверждение было доказано для полных систем. Именно, в [50] был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА 7.12. Пусть X – банахово пространство и $\{f_n\}$ – полная в L^2 ортонормированная система функций на $[0, 1]$. Пространство X изоморфно гильбертову пространству тогда и только тогда, когда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых векторов $x_1, \dots, x_n \in X$

$$C^{-1} \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2 \leq \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n f_k(t) x_k \right\|^2 dt \leq C \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2.$$

Для произвольной ортонормированной системы это утверждение теряет силу (достаточно взять любую последовательность $\{f_n\}$ функций на $[0, 1]$ с попарно непересекающимися носителями и $\|f_n\|_2 = 1$).

7.5. В случае системы Радемахера нет никакой связи между R -типом и R -котипом заданного пространства X (см. предложение 5.10). Однако, как уже отмечалось выше, для тригонометрической системы

$$T = \{e^{2\pi i n t}\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad t \in [0, 1],$$

справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 7.13. Банахово пространство X имеет T -тип p ($1 \leq p \leq 2$) тогда и только тогда, когда X имеет сильный T -котип p' .

Эта теорема следует из теоремы 6.6 (см. замечание 7.5). Конечно, можно дать и прямое доказательство теоремы 7.13, применяя схему доказательства теоремы 6.4.

Мы покажем, что аналогичное утверждение справедливо для системы функций Уолша $W = \{w_n\}_{n=0}^\infty$. Определение этой системы было дано в §6. Обозначим

$$\Delta_j^{(n)} = \left(\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right), \quad 0 \leq j \leq 2^n - 1, \quad n = 0, 1, \dots$$

Функция $w_k(t)$ при $0 \leq k < 2^n$ принимает постоянное значение, равное 1 или -1 , на каждом из интервалов $\Delta_j^{(n)}$, $0 \leq j < 2^n$; обозначим это значение через $\alpha_{kj}^{(n)}$. Матрица $(\alpha_{kj}^{(n)})$ порядка $2^n \times 2^n$ является симметричной и ее столбцы попарно ортогональны

(см. [32, гл. 1]). Таким образом, для всех $t \neq i2^{-n}$ ($i = 0, 1, \dots, 2^n$) выполняются равенства

$$(7.12) \quad w_k(t) = \sum_{j=0}^{2^n-1} \alpha_{kj}^{(n)} \chi_{\Delta_j^{(n)}}(t), \quad 0 \leq k < 2^n,$$

$$(7.13) \quad \chi_{\Delta_j^{(n)}}(t) = 2^{-n} \sum_{k=0}^{2^n-1} \alpha_{kj}^{(n)} w_k(t), \quad 0 \leq j < 2^n.$$

ТЕОРЕМА 7.14. *Банахово пространство X имеет W -тип p ($1 \leq p \leq 2$) тогда и только тогда, когда X имеет сильный W -котип p' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть векторы $x_j \in X$ ($j = 0, 1, \dots, 2^n - 1$). Для любого $1 < r < \infty$ имеем в силу (7.13)

$$(7.14) \quad \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \|x_j\|^{r'} \right)^{1/r'} = 2^{n/r'} \left\| \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j \chi_{\Delta_j^{(n)}} \right\|_{L_X^{r'}} = 2^{-n/r} \left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k w_k \right\|_{L_X^{r'}},$$

где $y_k = \sum_{j=0}^{2^n-1} \alpha_{kj}^{(n)} x_j$. Далее, учитывая симметричность матрицы $(\alpha_{kj}^{(n)})$ и равенство (7.12), получаем

$$(7.15) \quad \begin{aligned} \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \|y_k\|^r \right)^{1/r} &= 2^{n/r} \left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k \chi_{\Delta_k^{(n)}} \right\|_{L_X^r} \\ &= 2^{n/r} \left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} \sum_{j=0}^{2^n-1} \alpha_{kj}^{(n)} x_j \chi_{\Delta_k^{(n)}} \right\|_{L_X^r} = 2^{n/r} \left\| \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j w_j \right\|_{L_X^r}. \end{aligned}$$

Предположим, что X имеет W -тип p . Тогда

$$(7.16) \quad \left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k w_k \right\|_{L_X^{p'}} \leq C \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \|y_k\|^p \right)^{1/p}.$$

Полагая $r = p$, получим (см. (7.14)–(7.16))

$$\left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \|x_j\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C \left\| \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j w_j \right\|_{L_X^p}.$$

Стало быть, X имеет W -котип p' ; отсюда в силу предложения 7.7 следует, что X имеет сильный W -котип p' .

Предположим теперь, что X имеет W -котип p' . Тогда

$$(7.17) \quad \left(\sum_{k=0}^{2^n-1} \|y_k\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C' \left\| \sum_{k=0}^{2^n-1} y_k w_k \right\|_{L_X^p}.$$

Полагая $r = p'$, имеем в силу (7.14), (7.15) и (7.17)

$$\left\| \sum_{j=0}^{2^n-1} x_j w_j \right\|_{L_X^{p'}} \leq C' \left(\sum_{j=0}^{2^n-1} \|x_j\|^p \right)^{1/p}.$$

Следовательно, X имеет W -тип p . Теорема доказана.

Рассмотрим канторову группу $\mathbb{D}$. Ее двойственная группа $\mathbb{N}_0$ может быть отождествлена с системой функций Уолша W . Для любого банахова пространства X тип Фурье p относительно группы $\mathbb{N}_0$ совпадает с W -типом p , а тип Фурье p относительно $\mathbb{D}$ совпадает с сильным W -котипом p' (см. замечание 7.5). Поэтому мы получаем следующий результат (см. [29]).

ТЕОРЕМА 7.15. *Пусть $1 \leq p \leq 2$. Банахово пространство X имеет тип Фурье p относительно группы $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда X имеет тип Фурье p относительно двойственной группы $\mathbb{N}_0$.*

Нам представляется интересным получить описание полных равномерно ограниченных ОНС (компактных абелевых групп), для которых справедливы аналоги теорем 7.13–7.15.

7.6. Пусть $\{X_0, X_1\}$ – интерполяционная пара банаховых пространств. Я. Петре [62] показал, что если пространство X_0 имеет тип Фурье p_0 , а пространство X_1 – тип Фурье p_1 ($1 \leq p_0, p_1 \leq 2$), то для любого $0 < \theta < 1$ пространство $[X_0, X_1]_\theta$ имеет тип p , где $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$. Аналогичная теорема справедлива и для общих ортонормированных систем Φ , удовлетворяющих условию (7.1).

ТЕОРЕМА 7.16. *Пусть $\{X_0, X_1\}$ – интерполяционная пара банаховых пространств, $1 \leq p_0, p_1 \leq 2$, $0 < \theta < 1$, $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$ и $X = [X_0, X_1]_\theta$. Тогда:*

- (i) *если X_j имеет Φ -тип p_j ($j = 0, 1$), то X имеет Φ -тип p ;*
- (ii) *если X_j имеет сильный Φ -котип p'_j ($j = 0, 1$), то X имеет сильный Φ -котип p' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Пусть сначала $p_0, p_1 > 1$. Положим $A_j = l_{X_j}^{p_j}, B_j = L_{X_j}^{p'_j}(I)$ ($j = 0, 1$). Из замечания (7.2) следует, что для любой последовательности $\{x_n\} \in A_0 + A_1$ ряд

$$(7.18) \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n \varphi_n$$

сходится по норме пространства $B_0 + B_1$. Пусть J – оператор, который каждой последовательности $\{x_n\} \in A_0 + A_1$ ставит в соответствие сумму ряда (7.18). В силу (7.4) сужение J на A_j является ограниченным оператором из A_j в B_j . По теореме 3.4 оператор J ограниченно действует из $[A_0, A_1]_\theta$ в $[B_0, B_1]_\theta$. Но по теореме 3.5

$$[l_{X_0}^{p_0}, l_{X_1}^{p_1}]_\theta = l_X^p, \quad [L_{X_0}^{p'_0}, L_{X_1}^{p'_1}]_\theta = L_X^{p'}.$$

Этим доказано утверждение (i) (для случая $p_0, p_1 > 1$). Если, скажем, $p_1 = 1$, то полагаем $B_1 = \overset{\circ}{L}_X^\infty$ и учтем, что J ограничено действует из A_1 в B_1 , а $[L_{X_0}^{p'_0}, \overset{\circ}{L}_X^\infty] = L_X^{p'_1}$ (см. теорему 3.5).

Утверждение (ii) доказывается аналогично.

Ясно, что теоремы 7.9 и 7.10 содержатся в теореме 7.16 (в случае $X_0 = X_1$).

Рассмотрим теперь вещественную интерполяцию пространств с заданными типами (сильными котипами). Здесь положение несколько осложняется тем, что равенство

$$(L_{X_0}^{p_0}, L_{X_1}^{p_1})_{\theta, r} = L_{(X_0, X_1)_{\theta, r}}^p,$$

вообще говоря, имеет место только при $r = p$ (см. § 3). Однако справедлива следующая лемма [47] (в которой рассматриваются пространства векторнозначных функций, заданных на произвольном пространстве с мерой (S, ν)).

ЛЕММА 7.17. *Пусть $1 < p_0, p_1 \leq 2$, $0 < \theta < 1$, $1/p = (1-\theta)/p_0 + \theta/p_1$, $p \leq r \leq p'$ и $X = (X_0, X_1)_{\theta, r}$. Тогда для любой интерполяционной пары $\{X_0, X_1\}$ банаховых пространств имеют место непрерывные вложения*

$$(7.19) \quad L_X^p \hookrightarrow (L_{X_0}^{p_0}, L_{X_1}^{p_1})_{\theta, r},$$

$$(7.20) \quad (L_{X_0}^{p'_0}, L_{X_1}^{p'_1})_{\theta, r} \hookrightarrow L_X^{p'}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим вложение (7.19). Воспользуемся L -методом. Обозначим $\eta = \theta p/p_1$. Пусть $f \in L_X^p$. В силу теоремы 3.8 для любого $t \in S$ найдется такое представление элемента $f(t) \in X$

$$f(t) = f_\xi^0(t) + f_\xi^1(t), \quad 0 < \xi < \infty,$$

что

$$\|f(t)\|_X \geq C \left(\int_0^\infty [\xi^{-\eta} (\|f_\xi^0(t)\|_{X_0}^{p_0} + \xi \|f_\xi^1(t)\|_{X_1}^{p_1})]^{r/p} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{1/r},$$

где C – положительная постоянная. Отсюда в силу условия $p \leq r$ и неравенства Минковского имеем

$$\begin{aligned} \|f\|_{L_X^p}^p &\geq C^p \int_S \left(\int_0^\infty [\xi^{-\eta} (\|f_\xi^0(t)\|_{X_0}^{p_0} + \xi \|f_\xi^1(t)\|_{X_1}^{p_1})]^{r/p} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{p/r} d\nu(t) \\ &\geq C^p \left(\int_0^\infty \xi^{-\eta r/p} \left[\int_S (\|f_\xi^0(t)\|_{X_0}^{p_0} + \xi \|f_\xi^1(t)\|_{X_1}^{p_1}) d\nu(t) \right]^{r/p} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{p/r} \\ &= C^p \left(\int_0^\infty [\xi^{-\eta} (\|f_\xi^0\|_{L_{X_0}^{p_0}}^{p_0} + \xi \|f_\xi^1\|_{L_{X_1}^{p_1}}^{p_1})]^{r/p} \frac{d\xi}{\xi} \right)^{p/r}. \end{aligned}$$

Вновь применяя теорему 3.8, получаем

$$\|f\|_{L_X^p} \geq C' \|f\|_{(L_{X_0}^{p_0}, L_{X_1}^{p_1})_{\theta, r}} \quad (C' > 0).$$

Отсюда следует вложение (7.19). Аналогично получаем вложение (7.20). Лемма доказана.

В дискретном случае $S = \mathbb{N}$ вложения (7.19) и (7.20) принимают вид

$$(7.21) \quad l_X^p \hookrightarrow (l_{X_0}^{p_0}, l_{X_1}^{p_1})_{\theta, r},$$

$$(7.22) \quad (l_{X_0}^{p'_0}, l_{X_1}^{p'_1})_{\theta, r} \hookrightarrow l_X^{p'}.$$

ТЕОРЕМА 7.18. Пусть $\{X_0, X_1\}$ – интерполяционная пара банаховых пространств. Предположим, что $1 < p_0, p_1 \leq 2$, $1 < \theta < 1$, $1/p = (1 - \theta)/p_0 + \theta/p_1$, $p \leq r \leq p'$ и $X = (X_0, X_1)_{\theta, r}$. Тогда

- (i) если X_j имеет Φ -тип p_j ($j = 0, 1$), то X имеет Φ -тип p ;
- (ii) если X_j имеет сильный Φ -котип p'_j ($j = 0, 1$), то X имеет сильный Φ -котип p' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Как и в доказательстве теоремы 7.15, полагаем $A_j = l_{X_j}^{p_j}$, $B_j = L_{X_j}^{p'_j}(I)$ ($j = 0, 1$) и задаем оператор $J: A_0 + A_1 \rightarrow B_0 + B_1$, который каждой последовательности $\{x_n\} \in A_0 + A_1$ ставит в соответствие сумму ряда (7.18) (сходимость в $B_0 + B_1$). В силу (7.4) сужение J на A_j является ограниченным оператором из A_j в B_j ($j = 0, 1$). По теореме 3.11 оператор J ограниченно действует из $(A_0, A_1)_{\theta, r}$ в $(B_0, B_1)_{\theta, r}$. Но тогда в силу (7.20) и (7.21) J является ограниченным оператором из l_X^p в $L_X^{p'}(I)$, так что X имеет Φ -тип p .

Аналогично получаем утверждение (ii). Теорема доказана.

В случае тригонометрической системы T -тип p равносильен сильному T -котипу p' ; в свою очередь, эти свойства равносильны сильному типу Фурье p в смысле Петре (см. замечание 7.5). Для $\Phi = T$ теорема 7.18 была получена в работе [47] (в терминах типа Фурье).

7.7. Пусть (Ω, ν) – произвольное пространство с мерой. В §4 было показано (см. предложение 4.4), что пространство $L^p(\Omega, \nu)$ ($1 < p < \infty$) имеет тип Фурье $\min(p, p')$. В силу замечания 7.5 отсюда следует, что L^p имеет T -тип $\min(p, p')$ и сильный T -котип $\max(p, p')$. Аналогичный результат имеет место и для общих ортонормированных систем.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.19. Пространство $L^p(\Omega, \nu)$ ($1 < p < \infty$) имеет Φ -тип $\min(p, p')$ и сильный Φ -котип $\max(p, p')$ для любой равномерно ограниченной ортонормированной системы Φ .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как уже отмечалось в п. 7.4, пространство $L^2(\Omega, \nu)$ имеет Φ -тип 2. Кроме того, $L^1(\Omega, \nu)$ имеет Φ -тип 1. Пусть $1 < p < 2$. Применим интерполяцию, полагая $\theta = 2/p'$. В силу теоремы 3.5 $L^p = [L^1, L^2]_\theta$. По теореме 7.15 отсюда следует, что $L^p(\Omega, \nu)$ имеет Φ -тип p . Аналогично получим, что при $p > 2$ $L^p(\Omega, \nu)$ имеет Φ -тип p' . Утверждение о сильном Φ -котипе следует из утверждения о Φ -типе в силу двойственности и теоремы 7.8. Предложение доказано.

Заметим, что предложение 7.19 легко выводится также из теоремы 1.2 с помощью обобщенного неравенства Минковского (см. доказательство предложения 4.4).

В общем случае усилить предложение 7.19 нельзя. Именно, справедливо

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.20. *Предположим, что пространство Ω не является объединением конечного числа ν -атомов. Пусть Φ – равномерно ограниченная ортонормированная система на I и $1 \leq p < s \leq 2$. Тогда:*

- (1) *пространство $L^p(\Omega, \nu)$ не имеет Φ -тип s и не имеет T - и W -котип s' ;*
- (2) *пространство $L^{p'}(\Omega, \nu)$ не имеет T - и W -тип s и не имеет Φ -котип s' .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. То, что $L^p(\Omega, \nu)$ не имеет Φ -тип s , следует из предложения 5.10 и теоремы 8.2. Далее, если бы $L^p(\Omega, \nu)$ имело T -котип s' , или, соответственно, W -котип s' , то в силу предложения 7.7 и теорем 7.8, 7.13, 7.14 пространство $L^{p'}(\Omega, \nu)$ имело бы T -котип s' . Но тогда по теореме 8.2 $L^{p'}(\Omega, \nu)$ имело бы R -котип s' , что противоречит предложению 5.10 (см. также замечание 5.11). Мы получили утверждение (1). Утверждение (2) доказывается аналогично.

В предложении 7.20 нельзя заменить тригонометрическую систему T или систему Уолша W произвольной ОНС Φ (напомним, что в силу предложения 5.9 пространство $L^r(\Omega, \nu)$, $1 < r < \infty$, имеет R -котип $\max(r, 2)$ и R -тип $\min(r, 2)$).

В работах [47], [28], [29] было показано, что пространство $L^{p,r}(\Omega, \nu)$ ($1 < p, r < \infty$) имеет тип Фурье $\min(p, p', r, r')$. Аналогичный результат справедлив для общих равномерно ограниченных ОНС.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.21. *Пусть $1 < p, r < \infty$. Тогда пространство $L^{p,r}(\Omega)$ имеет Φ -тип $\min(p, p', r, r')$ и сильный Φ -котип $\max(p, p', r, r')$ для любой равномерно ограниченной ортонормированной системы Φ .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть, например, $1 < p \leq 2$. Сначала предположим, что $p \leq r \leq p'$. Если $p = 2$, то доказывать нечего; поэтому считаем, что $p < 2$. Возьмем $1 < p_0 < p$ и выберем θ из условия

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{2}.$$

В силу следствия 3.13 $(L^{p_0}, L^2)_{\theta, r} = L^{p,r}$. Далее, L^{p_0} имеет Φ -тип p_0 , а L^2 – Φ -тип 2. Поэтому в силу теоремы 7.18 $L^{p,r}$ имеет Φ -тип p . Аналогично получаем, что $L^{p,r}$ имеет сильный Φ -котип p' .

Пусть теперь $1 < r < p \leq 2$. Возьмем числа $r < p_0 < p$ и $2 < p_1 < r'$. Выберем θ из условия

$$\frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}.$$

Тогда $(L^{p_0}, L^{p_1})_{\theta, r} = L^{p,r}$ (см. следствие 3.13). При этом L^{p_0} имеет Φ -тип p_0 , а L^{p_1} – Φ -тип p'_1 . Поскольку $p_0, p'_1 \geq r$, то эти пространства оба имеют Φ -тип r . Применяя теорему 7.18, получаем, что $L^{p,r}$ имеет Φ -тип r . Аналогично, $L^{p,r}$ имеет сильный Φ -котип r' . Точно так же в случае $1 < p \leq 2$, $p' < r < \infty$ получим, что $L^{p,r}$ имеет Φ -тип r' и сильный Φ -котип r . Этим предложение 7.21 доказано для $1 < p \leq 2$.

В случае $2 < p < \infty$ доказательство аналогично.

Заметим, что указанные в предложении 7.21 значения типа и котипа для пространств Лоренца, вообще говоря, улучшить нельзя (см. [20], [28], [29], [47]).

**§ 8. Соотношения между типами (котипами)
по системе Радемахера и другим ортонормированным системам**

В вопросах, которым посвящена настоящая статья, системе Радемахера принадлежит исключительная роль. Частично это обусловлено ее экстремальными свойствами, которые мы сейчас рассмотрим.

Мы будем пользоваться следующей теоремой, называемой принципом сжатия [43, гл. 2].

ТЕОРЕМА 8.1. Пусть X – банахово пространство и $f = \sum_{k=1}^n x_k r_k$ ($x_k \in X$). Если $\lambda = \{\lambda_k\}_{k=1}^n$ – набор чисел с $|\lambda_k| \leq 1$ и $f_\lambda = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k r_k$, то для любого $1 \leq p < \infty$

$$\|f_\lambda\|_{L_X^p} \leq \|f\|_{L_X^p}.$$

8.1. Экстремальное свойство системы Радемахера. Пусть, как и выше, (I, μ) – пространство с мерой, $\mu(I) = 1$, и $\Phi = \{\varphi_n\}$ – ортонормированная система на I , удовлетворяющая условию (7.1).

ТЕОРЕМА 8.2. Пусть X – банахово пространство и $1 < p \leq 2$. Тогда

- (i) если X имеет Φ -тип p , то X имеет R -тип p ;
- (ii) если X имеет Φ -котип p' , то X имеет R -котип p' ;
- (iii) если X имеет сильный Φ -котип p' , то X имеет сильный R -котип p' .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (i) Покажем, что для любых $x_k \in X$ ($k = 1, \dots, n$) и любого $r > 0$ (см. (7.1))

$$(8.1) \quad \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) x_k \right\|^r d\xi \leq (2M)^r \int_0^1 d\xi \int_I \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) \varphi_k(t) x_k \right\|^r d\mu(t).$$

Легко видеть, что существует последовательность $\{\varepsilon_k(t)\}$ измеримых функций на I , принимающих значения ± 1 и таких, что

$$(8.2) \quad \left| \int_I \varepsilon_k(t) \varphi_k(t) d\mu(t) \right| \geq \frac{1}{2M} \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(напомним, что функции φ_k могут принимать комплексные значения). Из симметричности функций Радемахера следует, что для любого $t \in I$

$$(8.3) \quad \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) \varepsilon_k(t) \varphi_k(t) x_k \right\|^r d\xi = \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) \varphi_k(t) x_k \right\|^r d\xi.$$

Пусть $\lambda_k = \left(\int_I \varepsilon_k(t) \varphi_k(t) d\mu \right)^{-1}$; в силу (8.2) $|\lambda_k| \leq 2M$. Пользуясь принципом сжатия, получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n x_k r_k(\xi) \right\|^r d\xi &\leq (2M)^r \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n \frac{1}{\lambda_k} x_k r_k(\xi) \right\|^r d\xi \\ &\leq (2M)^r \int_0^1 d\xi \int_I \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) \varepsilon_k(t) \varphi_k(t) x_k \right\|^r d\mu(t). \end{aligned}$$

Применяя теорему Фубини и (8.3), получим (8.1). Из (8.1) следует утверждение (i).

(ii) Пусть $x_k \in X$ ($k = 1, \dots, n$). В силу (7.1) и принципа сжатия имеем для любого $t \in I$

$$(8.4) \quad \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) r_k(\xi) x_k \right\|^p d\xi \leq M^p \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) x_k \right\|^p d\xi.$$

С другой стороны, для любого двоично-иррационального $\xi \in [0, 1]$ в силу нашего условия (см. (7.5))

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^{p'} \right)^{p/p'} \leq C^p \int_I \left\| \sum_{k=1}^n \varphi_k(t) r_k(\xi) x_k \right\|^p d\mu(t).$$

Интегрируя это неравенство по ξ , а неравенство (8.4) по t и применяя теорему Фубини, получим

$$\left(\sum_{k=1}^n \|x_k\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C' \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) x_k \right\|^p d\xi \right)^{1/p}.$$

Этим доказано утверждение (ii).

(iii) Это утверждение следует из (i) в силу двойственности (см. теорему 7.8).

Теорема доказана.

Для тригонометрической системы ($\Phi = T$) теорема 8.2 была доказана в работах [50] (случай $p = 2$), [47], [28].

Как следствие мы получаем, что теорема Квапеня (теорема 5.6) допускает более общую формулировку.

ТЕОРЕМА 8.3. Пусть Φ – равномерно ограниченная ортонормированная система. Банахово пространство X изоморфно гильбертову пространству тогда и только тогда, когда X имеет Φ -тип 2 и Φ -котип 2.

8.2. Системы со свойством Сидона. Пизье [66] доказал, что в определениях типа и котипа (см. § 5) можно заменить функции Радемахера произвольной последовательностью характеров компактной абелевой группы, принадлежащих некоторому множеству Сидона. В частности, это справедливо для любой лакунарной подсистемы $\{e^{2\pi i n_k t}\}$ ($n_k \in \mathbb{N}$, $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$).

Аналогичное утверждение было впоследствии доказано А. Пелчинским [64] для топологических множеств Сидона.

Возрастающая последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ положительных действительных чисел называется топологическим множеством Сидона, если существуют компактное множество $K \subset \mathbb{R}$ и постоянная $C > 0$ такие, что для любых комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$\sum_{k=1}^n |\alpha_k| \leq C \sup_{t \in K} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{i\lambda_k t} \right|.$$

Важным примером топологического множества Сидона является любая положительная последовательность $\{\lambda_k\}$, удовлетворяющая условию Адамара

$$\lambda_{k+1}/\lambda_k \geq q > 1 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

(см. [57, с. 185]).

Следующая теорема была доказана А. Пелчинским [64].

ТЕОРЕМА 8.4. Пусть $\{\lambda_k\} \subset \mathbb{R}$ – топологическое множество Сидона и $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда существует постоянная $C > 0$, зависящая только от λ и $b - a$, такая, что для любого $1 \leq p < \infty$ и каждой последовательности $\{x_j\}_{j=1}^n$ элементов произвольного комплексного банахова пространства X

$$(8.5) \quad C^{-p} \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) x_k \right\|^p d\xi \leq \int_a^b \left\| \sum_{k=1}^n e^{i\lambda_k t} x_k \right\|^p dt \leq C^p \int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) x_k \right\|^p d\xi.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используем следующее утверждение о топологических множествах Сидона: для любого $\delta > 0$ существует постоянная A (зависящая только от λ и δ) такая, что для любых комплексных чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$(8.6) \quad \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \leq A \sup_{|t| \leq \delta} \left| \sum_{k=1}^n \alpha_k e^{i\lambda_k t} \right|$$

(см. [57, с. 194]). Положим $\delta = (b - a)/4$.

Ключевая идея состоит в следующем. Фиксируем $n \in \mathbb{N}$. Пусть $\xi \in [0, 1]$ – двоично-иррациональная точка. Рассмотрим линейный функционал, определенный на линейной оболочке системы функций $\{e^{i\lambda_k t}\}_{k=1}^n$, который принимает значение $r_k(\xi)$ на элементе $e^{i\lambda_k t}$ ($k = 1, \dots, n$). В силу (8.6) и теоремы Хана–Банаха этот функционал может быть продолжен до ограниченного линейного функционала на $C[-\delta, \delta]$ с нормой, не превосходящей A . Следовательно, по теореме Ф. Рисса существует комплексная борелевская мера μ_ξ на $[-\delta, \delta]$ такая, что $\|\mu_\xi\| \leq A$ и

$$(8.7) \quad \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\lambda_k s} d\mu_\xi(s) = r_k(\xi) \quad (k = 1, \dots, n).$$

Теперь фиксируем последовательность $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ и обозначим

$$f(t) = \sum_{k=1}^n e^{i\lambda_k t} x_k, \quad f_\xi(t) = \sum_{k=1}^n r_k(\xi) e^{i\lambda_k t} x_k \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Тогда в силу (8.7)

$$f(t) = \sum_{k=1}^n r_k(\xi) e^{i\lambda_k t} x_k \int_{-\delta}^{\delta} e^{i\lambda_k s} d\mu_\xi(s) = \int_{-\delta}^{\delta} f_\xi(t+s) d\mu_\xi(s).$$

Пользуясь неравенством Гёльдера и оценкой $\|\mu_\xi\| \leq A$, получаем

$$\|f(t)\|^p \leq A^{p-1} \int_{-\delta}^{\delta} \|f_\xi(t+s)\|^p d\nu_\xi(s),$$

где ν_ξ – вариация меры μ_ξ . Интегрируя по t и применяя теорему Фубини, имеем

$$(8.8) \quad \int_a^b \|f(t)\|^p dt \leq A^p \int_{a-\delta}^{b+\delta} \|f_\xi(u)\|^p du.$$

Наконец, интегрируя по ξ и используя принцип сжатия, мы получим второе неравенство в (8.5).

Чтобы доказать первое неравенство в (8.5), мы заменим $[a, b]$ на $[a + \delta, b - \delta]$ и f на f_ξ . Получим, как и выше (см. (8.8)),

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} \|f_\xi(t)\|^p dt \leq A^p \int_a^b \|f(u)\|^p du.$$

Остается применить неравенство

$$\int_0^1 \left\| \sum_{k=1}^n r_k(\xi) x_k \right\|^p d\xi \leq \left(\frac{2}{|J|} \right)^p \int_J \|f_\xi(t)\|^p dt$$

($J = [a + \delta, b - \delta]$), которое мы получим в точности, как (8.1). Теорема доказана.

СЛЕДСТВИЕ 8.5. Пусть $\{n_k\}$ – последовательность натуральных чисел, удовлетворяющая условию

$$(8.9) \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda > 1 \quad (k = 1, 2, \dots).$$

Далее, пусть $\Phi = \{e^{2\pi i n_k t}\}$, $t \in [0, 1]$, X – банахово пространство и $1 < p \leq 2$. Тогда:

- (i) X имеет R -тип p тогда и только тогда, когда X имеет Φ -тип p ;
- (ii) X имеет R -котип p' тогда и только тогда, когда X имеет Φ -котип p' ;
- (iii) X имеет сильный R -котип p' тогда и только тогда, когда X имеет сильный Φ -котип p' .

Заметим, что (iii) следует из (i) и теоремы 7.8.

Следствие 8.5 является частным случаем теоремы Пизье [66]. Предположим, что G – компактная абелева группа с двойственной группой Γ и μ – мера Хаара на G .

Подмножество $E \subset \Gamma$ называется множеством Сидона, если существует постоянная C , зависящая только от E , такая, что для любой непрерывной комплекснозначной функции f на G , для которой $\hat{f}(\gamma) = 0$ при всех $\gamma \in \Gamma \setminus E$, выполняется неравенство

$$(8.10) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} |\hat{f}(\gamma)| \leq C \|f\|_\infty.$$

Наименьшая постоянная в (8.10) называется постоянной Сидона множества E .

Следующая теорема была доказана Пизье [66].

ТЕОРЕМА 8.6. Предположим, что $E = \{\gamma_n\} \subset \Gamma$ – множество Сидона. Тогда существует постоянная C_0 , зависящая только от постоянной Сидона $S(E)$, такая, что для любого банахова пространства X , любых элементов $x_1, \dots, x_N \in X$ и любого $p \in [1, \infty)$

$$\begin{aligned} C_0^{-1} \left(\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^N x_n r_n(\xi) \right\|^p d\xi \right)^{1/p} &\leq \left(\int_G \left\| \sum_{n=1}^N x_n \gamma_n \right\|^p d\mu \right)^{1/p} \\ &\leq C_0 \left(\int_0^1 \left\| \sum_{n=1}^N x_n r_n(\xi) \right\|^p d\xi \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

В статье [2] было доказано более общее утверждение: существует постоянная C (зависящая только от $S(E)$) такая, что для всех $\alpha > 0$

$$\begin{aligned} C^{-1} \left| \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N x_n r_n \right\| \geq C\alpha \right\} \right| &\leq \mu \left(\left\{ \left\| \sum_{n=1}^N x_n \gamma_n \right\| \geq \alpha \right\} \right) \\ &\leq C \left| \left\{ \left\| \sum_{n=1}^N x_n r_n \right\| \geq C^{-1}\alpha \right\} \right|. \end{aligned}$$

В другом направлении теорема Пизье была обобщена А. Пелчинским [64]. В [64] было доказано, что если $\{\gamma_j\}$ и $\{\sigma_j\}$ – последовательности характеров компактных абелевых групп G и S соответственно, такие, что для каждой последовательности скаляров $\{a_j\}$

$$\left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \gamma_j \right\|_{\infty} \asymp \left\| \sum_{j=1}^{\infty} a_j \sigma_j \right\|_{\infty},$$

то для любого $1 \leq p < \infty$ и любой последовательности $\{x_j\}$ элементов произвольного банахова пространства X

$$\int_G \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \gamma_j \right\|^p d\mu \asymp \int_S \left\| \sum_{j=1}^{\infty} x_j \sigma_j \right\|^p d\nu.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8.7. В приведенных выше результатах рассматривались последовательности характеров, являющиеся множествами Сидона. Эти специальные множества нельзя заменить произвольной ортонормированной системой Сидона.

Ортонормированная равномерно ограниченная на $[0, 1]$ система функций $\Phi = \{\varphi_n\}$ называется системой Сидона, если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любых скаляров $\alpha_1, \dots, \alpha_n$

$$(8.11) \quad \sum_{k=1}^n |\alpha_k| \leq C \left\| \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\|_{\infty}$$

(см. [45, с. 327]).

Важными примерами систем Сидона являются система Радемахера и система $\{e^{2\pi i n_k t}\}$ ($n_k \in \mathbb{N}$, $n_{k+1}/n_k \geq q > 1$).

Из того, что банахово пространство X имеет R -тип p , вообще говоря, не следует, что X имеет Φ -тип p для любой системы Сидона Φ . То же самое верно и относительно котида.

Действительно, пусть $\Psi = \{\psi_n\}$ – равномерно ограниченная ОНС на $[0, 1]$. Положим

$$\varphi_n(t) = \begin{cases} \psi_n(2t), & 0 \leq t < 1/2, \\ r_n(2t - 1), & 1/2 \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\Phi = \{\varphi_n\}$ – равномерно ограниченная ОНС на $[0, 1]$. Поскольку система Радемахера является системой Сидона, то и Φ – система Сидона (см. (8.11)). В то же время, легко видеть (учитывая теорему 8.2), что для любого пространства X Φ -тип

и Ψ -тип совпадают. Если возьмем, например, $X = L^q[0, 1]$ ($2 < q < \infty$) и $\Psi = T$, то в силу предложения 5.9 R -тип X будет равен 2, а Φ -тип есть в точности q' , и не лучше (см. п. 7.7).

8.3. Теорема Бургейна. В §6 мы уже приводили теорему Бургейна [12] для характеров компактных абелевых групп. Впоследствии в работе [13] Бургейн получил более сильные результаты для канторовой группы и окружности – полные аналоги неравенств Хаусдорфа–Юнга.

Как и выше, через T и W обозначим тригонометрическую систему и систему Уолша соответственно.

Бургейн [13] доказал следующую теорему.⁵

ТЕОРЕМА 8.8. *Пусть банахово пространство X имеет нетривиальный R -тип. Тогда X имеет нетривиальный T -тип и нетривиальный W -тип.*

Эта теорема показывает, что для $\Phi = T$ и $\Phi = W$ справедливо частичное обращение теоремы 8.3. Неизвестно, верно ли аналогичное утверждение для произвольной полной равномерно ограниченной ортонормированной системы (или для абстрактной компактной абелевой группы).

Из теорем 8.1 и 8.8 (см. также замечание 7.5) вытекает

СЛЕДСТВИЕ 8.9. *Банахово пространство X имеет нетривиальный тип Радемахера тогда и только тогда, когда X имеет нетривиальный тип Фурье.*

Доказательство теоремы 8.8 основывается на теореме 6.16 и в полном объеме является длинным и сложным. Однако мы воспроизведем здесь (с некоторыми упрощениями) полное доказательство этой теоремы для системы Уолша.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 8.8 (для системы Уолша). В силу следствия 5.23, если X имеет нетривиальный R -тип, то X имеет сильный R -котип p' для некоторого $1 < p \leq 2$. Это означает, что существует постоянная C_0 такая, что для любой функции $f \in L^2_X[0, 1]$ ее коэффициенты Фурье по системе Радемахера удовлетворяют неравенству

$$(8.12) \quad \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|c_n(f)\|^{p'} \right)^{1/p'} \leq C_0 \|f\|_{L^2_X}$$

(см. определение 5.20 и замечание 5.21).

Обозначим

$$\varphi(n) = \sup \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k \in \Lambda} x_k w_k(u) \right\|^2 du \right)^{1/2},$$

где верхняя грань берется по всем подмножествам $\Lambda \subset \mathbb{N}$ с числом элементов $\Lambda^\# = n$ и всем $x_k \in X$ с $\|x_k\| \leq 1$.

Докажем, что для любого $d \in \mathbb{N}$

$$(8.13) \quad \varphi(n) \leq C_0 d^{-1/p'} 2^d \varphi(2^{-d+1}n) + \frac{2^d}{\sqrt{n}} \varphi(n).$$

⁵Будем говорить, что банахово пространство X имеет нетривиальный Φ -тип, если существует такое $1 < p \leq 2$, что X имеет Φ -тип p .

Используя групповое свойство системы Уолша, имеем:

$$\begin{aligned} J &\equiv \left(\int_0^1 \left\| \sum_{k \in \Lambda} x_k w_k(u) \right\|^2 du \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^1 \cdots \int_0^1 \left(\frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \int_0^1 \left\| \sum_{k \in \Lambda} w_k(t_i) w_k(u) x_k \right\|^2 du \right) dt_1 \cdots dt_d \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Для каждой точки $t \in I^d$ ($I \equiv [0, 1]$) и любого $k \in \Lambda$ существует точка $\xi_{t,k} \in [0, 1]$ такая, что

$$(8.14) \quad w_k(t_i) = r_i(\xi_{t,k}), \quad i = 1, \dots, d.$$

Обозначим через $\Lambda_\nu(t)$ ($t \in I^d, \nu = 0, 1, \dots, 2^d - 1$) множество всех $k \in \Lambda$, для которых $\xi_{t,k} \in \Delta_\nu^{(d)} \equiv (\nu 2^{-d}, (\nu + 1) 2^{-d})$. Тогда для $i = 1, \dots, d$ (см. (8.14))

$$(8.15) \quad \sum_{k \in \Lambda} w_k(t_i) w_k(u) x_k = 2^d \sum_{\nu=0}^{2^d-1} \int_{\Delta_\nu^{(d)}} r_i(\xi) d\xi \sum_{k \in \Lambda_\nu(t)} x_k w_k(u).$$

Пусть $f(\xi) = \sum_{k \in \Lambda_\nu(t)} x_k w_k(u)$ для $\xi \in \Delta_\nu^{(d)}$ (u и t фиксированы). Тогда f – ступенчатая функция со значениями в X . При этом правая часть (8.15) равна⁶

$$2^d \int_0^1 f(\xi) r_i(\xi) d\xi,$$

где интеграл понимается в смысле Бохнера. Поэтому в силу (8.12)

$$(8.16) \quad \left(\sum_{i=1}^d \left\| \sum_{k \in \Lambda} w_k(t_i) w_k(u) x_k \right\|^{p'} \right)^{2/p'} \leq C_0^2 2^d \sum_{\nu=0}^{2^d-1} \left\| \sum_{k \in \Lambda_\nu(t)} x_k w_k(u) \right\|^2.$$

Пользуясь неравенством Гёльдера и интегрируя по u , получаем

$$\begin{aligned} (8.17) \quad J_d(t) &\equiv \frac{1}{d} \sum_{i=1}^d \int_0^1 \left\| \sum_{k \in \Lambda} w_k(t_i) w_k(u) x_k \right\|^2 du \\ &\leq C_0^2 d^{-2/p'} 2^d \sum_{\nu=0}^{2^d-1} \int_0^1 \left\| \sum_{k \in \Lambda_\nu(t)} w_k(u) x_k \right\|^2 du \\ &\leq C_0^2 d^{-2/p'} 2^{2d} \max_\nu (\varphi(\Lambda_\nu(t)^\#))^2. \end{aligned}$$

Положим

$$\Omega_\nu = \{t \in I^d : \Lambda_\nu(t)^\# > 2^{-d+1} n\}, \quad \Omega = \bigcup_{\nu=0}^{2^d-1} \Omega_\nu.$$

⁶Это представление является одним из ключевых моментов доказательства.

Интегрируя неравенство (8.16) по t и используя для $t \in I^d \setminus \Omega$ оценку (8.17), получим

$$(8.18) \quad J \leq C_0 d^{-1/p'} 2^d \varphi(2^{-d+1}n) + \sqrt{\text{mes}_d \Omega} \varphi(n).$$

Осталось оценить $\text{mes}_d \Omega$. Заметим, что в силу (8.14) для любого фиксированного $\nu = 0, 1, \dots, 2^d - 1$

$$2^d \Lambda_\nu(t)^\# = \sum_{k \in \Lambda} \prod_{i=1}^d (1 + \varepsilon_i w_k(t_i)) \equiv f_d(t_1, \dots, t_d),$$

где ε_i — значение функции r_i в интервале $\Delta_\nu^{(d)}$. Оценку $\text{mes}_d \Omega$ мы получим, пользуясь неравенством

$$(8.19) \quad \|f_d - n\|_{L^2(I^d)} \leq \sqrt{2^d n}.$$

Действительно, из (8.19) и неравенства Чебышёва сразу следует, что

$$\text{mes}_d \Omega_\nu \leq \text{mes}_d \{t \in I^d : |2^d \Lambda_\nu(t)^\# - n| \geq n\} \leq \frac{2^d}{n},$$

и поэтому $\text{mes}_d \Omega \leq 2^{2d}/n$. В силу (8.18) отсюда следует (8.13). Чтобы доказать неравенство (8.19), достаточно воспользоваться равенством Парсеваля и известным свойством биномиальных коэффициентов; легко получим, что

$$\|f_d - n\|_{L^2(I^d)}^2 = (2^d - 1)n.$$

Теперь выведем из (8.13) существование постоянной K такой, что

$$(8.20) \quad \varphi(n) \leq K n^{1-\varepsilon} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}, \varepsilon = (8C_0)^{-p'}.$$

Положим $d = [(8C_0)^{p'}] + 1$ и выберем K так, чтобы выполнялось неравенство

$$\varphi(n) \leq K n^{1-\varepsilon} \text{ для } n \leq 4^{d+1}.$$

Пусть $n > 4^{d+1}$. Предположим, что (8.20) выполняется для всех номеров, меньших n . Тогда в силу (8.13)

$$\varphi(n) \leq C_0 d^{-1/p'} 2^d K (2^{-d+1}n)^{1-\varepsilon} + \frac{1}{2} \varphi(n)$$

и $\varphi(n) \leq K n^{1-\varepsilon}$ согласно выбору d .

Возьмем теперь $1 < s < \frac{1}{1-\varepsilon}$. Тогда существует постоянная $A \equiv A_s$ такая, что для любой финитной последовательности $\{x_k\} \subset X$

$$(8.21) \quad \left\| \sum_k x_k w_k \right\|_{L_X^2} \leq A \left(\sum_k \|x_k\|^s \right)^{1/s}.$$

Действительно, не уменьшая общности, можем считать, что сумма в правой части (8.21) равна 1. Пусть $D_j = \{k : 2^{-j-1} < \|x_k\| \leq 2^{-j}\}$; тогда $D_j^\# \leq 2^{(j+1)s}$. Следовательно, в силу (8.20)

$$\left\| \sum_k x_k w_k \right\|_{L_X^2} \leq \sum_{j=0}^{\infty} \left\| \sum_{k \in D_j} x_k w_k \right\|_{L_X^2} \leq A.$$

Точно так же, как в теореме 7.14, из (8.21) следует, что для любой последовательности $\{y_k\}_{k=0}^N \subset X$

$$(8.22) \quad \left(\sum_{k=0}^N \|y_k\|^q \right)^{1/q} \leq A \left\| \sum_{k=0}^N y_k w_k \right\|_{L_X^2} \quad (q = s').$$

Теперь мы перейдем ко второй части доказательства. Покажем сначала, что для любого конечного множества Λ неотрицательных целых чисел и любого множества векторов $\{x_n\}_{n \in \Lambda} \subset X$ с $\|x_n\| \leq 1$

$$(8.23) \quad Q \equiv \left(\int_0^1 \left\| \sum_{n \in \Lambda} x_n w_n(t) \right\|^q dt \right)^{1/q} \leq C(\Lambda^\#)^{1/q'}.$$

Мы можем предположить, что $0 \notin \Lambda$ и $\Lambda^\# = 2^k$ ($k \geq 2$). Исходя из равенства (6.3), для каждого $j = 1, \dots, 2^k - 1$ обозначим через P_j множество таких ν , $1 \leq \nu \leq k$, что

$$(8.24) \quad w_j(t) = \prod_{\nu \in P_j} r_\nu(t), \quad t \in [0, 1].$$

Положим также $P_0 = \emptyset$. Используя групповую структуру функций Уолша (см. §6), мы для любого фиксированного вектора $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k) \in I^k$ произведем 2^k сдвигов в интеграле (8.23) с шагами $t_j = \sum_{\nu \in P_j} \xi_\nu$ ($j = 0, 1, \dots, 2^k - 1$). Получим⁷

$$\begin{aligned} Q &= 2^{-k/q} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \int_0^1 \left\| \sum_{n \in \Lambda} x_n w_n \left(t + \sum_{\nu \in P_j} \xi_\nu \right) \right\|^q dt \right)^{1/q} \\ &\leq 2^{-k/q} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \left\| \sum_{n \in \Lambda} \tilde{x}_n \prod_{\nu \in P_j} w_n(\xi_\nu) \right\|^q \right)^{1/q}, \end{aligned}$$

где $\tilde{x}_n \equiv \tilde{x}_n(\xi) = x_n w_n(t_0(\xi))$ ($t_0(\xi)$ — некоторая точка отрезка $[0, 1]$).

Рассмотрим полином по системе Уолша

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} y_j w_j(t) \equiv \sum_{j=0}^{2^k-1} \sum_{n \in \Lambda} \tilde{x}_n \prod_{\nu \in P_j} w_n(\xi_\nu) r_\nu(t).$$

⁷Поясним, что с учетом взаимнооднозначного соответствия между канторовой группой $\mathbb{D}$ и отрезком $[0, 1]$ сложение здесь понимается как сложение элементов группы $\mathbb{D}$.

Используя (8.22) и (8.24), имеем

$$Q \leq 2^{-k/q} \left(\sum_{j=0}^{2^k-1} \|y_j\|^q \right)^{1/q} \leq A 2^{-k/q} \left(\int_0^1 \left(\sum_{n \in \Lambda} \left| \sum_{j=1}^{2^k-1} \prod_{\nu \in P_j} r_\nu(t) w_n(\xi_\nu) \right| \right)^2 dt \right)^{1/2}.$$

По индукции легко доказать, что

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} \prod_{\nu \in P_j} a_\nu = \prod_{\nu=1}^k (1 + a_\nu) \quad (a_\nu \in \mathbb{R}).$$

Следовательно,

$$Q \leq A 2^{-k/q} \left(\int_0^1 \left(\sum_{n \in \Lambda} \left| \prod_{\nu \in P_j} (1 + r_\nu(t) w_n(\xi_\nu)) \right| \right)^2 dt \right)^{1/2}.$$

Возведя обе части неравенства в квадрат и проинтегрировав по ξ в I^k , получим, пользуясь ортогональностью функций w_n :

$$Q^2 \leq A^2 2^{-2k/q} 2^{2k} = A^2 2^{2k/q'}.$$

Неравенство (8.23) доказано.

На последнем шаге используем хорошо известную технику. Пусть $f = \sum_{k=0}^{\infty} x_k w_k$, где $\{x_k\} \subset X$ — финитная последовательность. Положим

$$B_j = \{k : x_{2^{j+1}}^* < \|x_k\| \leq x_{2^j}^*\}, \quad j = 0, 1, \dots$$

Тогда $B_j^\# \leq 2^{j-1}$. Пусть $f_j(t) = \sum_{k \in B_j} x_k w_k(t)$. В силу (8.23)

$$\|f_j\|_{L_X^q} \leq C 2^{j/q'} x_{2^j}^*.$$

Следовательно, для любого $n \in \mathbb{N}$ имеем

$$f^*(2^{-n}) \leq \left(2^n \int_0^{2^{-n}} f^*(u)^q du \right)^{1/q} \leq C \left(\sum_{j=0}^n 2^j x_{2^j}^* + 2^{n/q} \sum_{j=n}^{\infty} 2^{j/q'} x_{2^j}^* \right).$$

Из этой оценки легко следует, что для любого $1 < r < q'$

$$(8.25) \quad \|f\|_{L_X^{r',r}} \leq C_r \|\{x_k\}\|_{l_X^r}.$$

В силу (2.6) отсюда следует, что пространство X имеет W -тип r . Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.10. Ключевую роль в доказательстве играло неравенство (8.21), полученное на его первом этапе. Заметим, что тем же методом доказывается аналогичное неравенство с заменой показателя 2 в левой части (8.21) любым показателем $\alpha > 2$ (см. [12]). Вообще говоря, это ведет к уменьшению показателя s в правой части. При этом указанный метод не позволяет взять $s = \alpha'$ и этим исчерпать доказательство теоремы 8.8 (для системы Уолша).

В неравенстве (8.22) содержится частный случай теоремы 6.16 (для группы $\mathbb{D}$). Для произвольной компактной абелевой группы Бургейн дополнительно использует теорему Эдгара [25]. В остальном доказательство почти такое же, как и в случае системы Уолша.

ЗАМЕЧАНИЕ 8.11. Число r в неравенстве (8.25) (W -тип пространства X) определялось условием

$$1 < r < \frac{1}{1 - \varepsilon}, \quad \varepsilon = (8C_0)^{-p'}.$$

Здесь p' есть сильный R -котип X и C_0 – соответствующая постоянная в (8.12). Напомним, что если X имеет нетривиальный тип и котип $q \geq 2$, то X имеет сильный котип q (см. §5). Здесь мы хотели бы отметить, что W -тип пространства X не определяется однозначно его типом и котипом Радемахера. Действительно, рассмотрим следующий пример (основанный на схеме Бургейна [13]).

Пусть $1 < p < 2$. Будем говорить, что последовательность действительных чисел $b = \{b_k\}_{k=0}^\infty$ принадлежит пространству $\mathcal{F}(L^p)$, если существует функция $f \in L^p[0, 1]$ такая, что $\{b_k\}$ является последовательностью ее коэффициентов Фурье по системе Уолша. Положим $\|b\|_{\mathcal{F}(L^p)} = \|f\|_{L^p}$. По теореме Хаусдорфа–Юнга $\|b\|_{lp'} \leq \|b\|_{\mathcal{F}(L^p)}$. Далее, для любого $\theta \in (0, 1)$ обозначим

$$X_\theta = [l^{p'}, \mathcal{F}(L^p)]_\theta.$$

В §9 мы покажем, что пространства $l^{p'}$ и L^p имеют W -тип p . Поскольку пространство $\mathcal{F}(L^p)$ изоморфно L^p , то оно также имеет W -тип p . Следовательно, в силу теоремы 7.16 пространство X_θ имеет W -тип p . Покажем, что X_θ не имеет W -тип r при $r > p$. Предположим противное. При каждом $n = 0, 1, \dots$ обозначим через $b^{(n)}$ последовательность, имеющую только один ненулевой член $b_n^{(n)} = 1$. Пусть $f_N = \sum_{n=0}^{2^N-1} b^{(n)} w_n$, так что $f_N(t) = \{w_n(t)\}_{n=0}^{2^N-1}$. Используя неравенство (см. [79, 1.9.3])

$$\|f_N(t)\|_{X_\theta} \leq C_\theta \|f_N(t)\|_{l^{p'}}^{1-\theta} \|f_N(t)\|_{\mathcal{F}(L^p)}^\theta$$

и применяя неравенство Гёльдера, легко получим, что

$$\|f_N\|_{L_{X_\theta}^r} \leq C 2^{N/p'}.$$

С другой стороны, $\|b^{(n)}\|_{X_\theta} = 1$. Используя наше предположение, согласно которому X_θ имеет W -котип r' и

$$\left(\sum_{n=0}^{2^N-1} \|b^{(n)}\|_{X_\theta}^{r'} \right)^{1/r'} \leq C \|f_N\|_{L_{X_\theta}^r},$$

получаем $2^{N/r'} \leq C 2^{N/p'}$. Отсюда следует, что $r \leq p$.

Далее, используя интерполяцию и рассуждения, аналогичные приведенным выше, можно получить, что

$$p_{X_\theta} = \left(\frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p} \right)^{-1}, \quad q_{X_\theta} = \left(\frac{1-\theta}{p'} + \frac{\theta}{2} \right)^{-1}.$$

При изменении θ от 0 до 1 R -тип X_θ пробегает все значения от 2 до p , а R -котип – все значения от p' до 2. В то же время W -тип X_θ равен p при любом θ . При $\theta = 1/2$ получаем оптимальные значения R -типа $4p/(p+2)$ и R -котипа $4p'/(p'+2)$; они являются взаимно сопряженными числами.

Заметим, что аналогичный пример для тригонометрической системы был рассмотрен в [28].

§ 9. Теоремы Харди и Пэли для векторнозначных функций

Пусть $H^{1,at}$ – атомическое пространство Харди 2π -периодических функций на $\mathbb{R}$. Имеют место следующие классические неравенства: если $f \in H^{1,at}$, то

$$(9.1) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{|n|+1} \leq c \|f\|_{1,at} \quad (\text{неравенство Харди}),$$

$$(9.2) \quad \left(\sum_{k=0}^{\infty} |\widehat{f}(\pm 2^k)|^2 \right)^{1/2} \leq c \|f\|_{1,at} \quad (\text{неравенство Пэли}),$$

где $\widehat{f}(n)$ – коэффициенты Фурье функции f .

Мы рассмотрим условия на банахово пространство X , при которых эти неравенства сохраняют силу для X -значных функций.

Пусть X – комплексное банахово пространство. Коэффициенты Фурье 2π -периодической функции $f \in L_X^1(-\pi, \pi)$ определяются равенством

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Пусть $\Delta \subset \mathbb{R}$ – интервал с длиной $|\Delta| \leq 2\pi$. Будем называть X -атомом, сосредоточенным в Δ , каждую 2π -периодическую функцию $a \in L_X^\infty(\mathbb{R})$ со значениями в X такую, что

- (1) $a(t) = 0$ для всех $t \notin \Delta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$);
- (2) $\|a\|_{L_X^\infty} \leq |\Delta|^{-1}$;
- (3) $\int_{-\pi}^{\pi} a(t) dt = 0$.

Будем также называть X -атомом каждую постоянную функцию $a(t) \equiv x_0$, где $x_0 \in X$ и $\|x_0\| \leq (2\pi)^{-1}$.

Очевидно, что для любого X -атома a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \|a(t)\| dt \leq 1.$$

Если $a - X$ -атом, сосредоточенный в интервале Δ , то, как легко видеть,

$$(9.3) \quad \|\hat{a}(n)\| \leq \frac{1}{8\pi} |n| |\Delta| \quad (n \in \mathbb{Z}).$$

Будем говорить, что 2π -периодическая функция $f \in L_X^1(-\pi, \pi)$ принадлежит атомическому пространству Харди $H_X^{1,at}$, если существуют X -атомы a_k и коэффициенты $\lambda_k \in \mathbb{C}$ ($k = 1, 2, \dots$), такие, что

$$(9.4) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| f(t) - \sum_{k=1}^n \lambda_k a_k(t) \right\| = 0 \text{ для п.в. } t \in \mathbb{R} \text{ и } \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k| < \infty.$$

Норма в пространстве $H_X^{1,at}$ определяется равенством

$$\|f\|_{H_X^{1,at}} \equiv \|f\|_{1,at} = \inf \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_k|,$$

где нижняя грань берется по всем таким представлениям f . Ясно, что

$$(9.5) \quad \|f\|_{L_X^1} \leq \|f\|_{H_X^{1,at}} \text{ для всех } f \in H_X^{1,at}.$$

С другой стороны, если $f \in L_X^p(-\pi, \pi)$ ($1 < p < \infty$), то $f \in H_X^{1,at}$ и

$$(9.6) \quad \|f\|_{H_X^{1,at}} \leq C_p \|f\|_{L_X^p}$$

(это следует из ограниченности максимального оператора Харди–Литтлвуда для векторнозначных функций (см. [70]).

Ч. Фефферман доказал следующую теорему, дающую описание $(H^{1,at} - l^1)$ -мультипликаторов (см. [73]).

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть $m = \{m_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных чисел и

$$(9.7) \quad \mu(m) \equiv \sup \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} |m_j \hat{f}(j)| : \|f\|_{1,at} \leq 1 \right\}$$

(где верхняя грань берется по всем функциям $f \in H^{1,at}$ с $\|f\|_{1,at} \leq 1$). Тогда $\mu(m) < \infty$ в том и только том случае, если

$$(9.8) \quad \sigma(m) \equiv |m_0| + \sup_{N \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|j|=kN}^{(k+1)N-1} |m_j| \right)^2 \right)^{1/2} < \infty.$$

Более того, существует постоянная $C > 0$ такая, что

$$C^{-1} \sigma(m) \leq \mu(m) \leq C \sigma(m).$$

Заметим, что из этой теоремы следуют неравенства (9.1) и (9.2).

Ясно, что каждая последовательность, удовлетворяющая (9.8), принадлежит l^2 . Используя теорему Феффермана о двойственности [26], получаем

СЛЕДСТВИЕ 9.2. Пусть $\{m_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ – последовательность комплексных чисел, удовлетворяющая условию (9.8). Тогда функция

$$(9.9) \quad f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} m_j e^{ijt}$$

принадлежит пространству ВМО.

Далее, используя другую характеристику $(H^1 - l^1)$ -мультипликаторов [24, с. 105], мы получаем, что если $m_j \geq 0$ ($j \in \mathbb{Z}$), то условие (9.8) является и необходимым для того, чтобы функция (9.9) принадлежала ВМО.

Пусть теперь $1 \leq p \leq 2$. Следуя работе [9], обозначим через FM_p пространство всех последовательностей комплексных чисел $m = \{m_j\}_{j=-\infty}^{+\infty}$ таких, что

$$(9.10) \quad \sigma_p(m) \equiv |m_0| + \sup_{N \geq 1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{|j|=kN}^{(k+1)N-1} |m_j| \right)^p \right)^{1/p} < \infty.$$

Ясно, что $FM_1 = l^1$ и

$$(9.11) \quad FM_p \subset FM_r \quad \text{при} \quad 1 \leq p < r \leq 2.$$

Следующая теорема была доказана в работе [9].

ТЕОРЕМА 9.3. Пусть банахово пространство X имеет тип Фурье $p \in [1, 2]$. Тогда существует постоянная $C > 0$ такая, что для любой последовательности $m = \{m_j\} \in FM_p$ и любой функции $f \in H_X^{1,at}$

$$(9.12) \quad \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |m_j| \|\hat{f}(j)\| \leq C \sigma_p(m) \|f\|_{H_X^{1,at}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно доказать (9.12) в случае, когда f является X -атомом a , сосредоточенным в интервале $(-\delta, \delta)$ ($0 < \delta < \pi$). Мы можем рассматривать $\hat{a}(j)$ только для положительных j (поскольку $a(-t)$ также есть X -атом). Таким образом, мы должны доказать, что

$$(9.13) \quad \sum_{j=1}^{\infty} |m_j| \|\hat{a}(j)\| \leq C \sigma_p(m).$$

Выберем целое $s \geq 0$ из условия $\pi 2^{-s-1} \leq \delta < \pi 2^{-s}$. Пусть $N = 2^s$. Тогда

$$\sum_{j=1}^N j |m_j| \leq \sum_{k=0}^{s-1} 2^{k+1} \sum_{j=2^k}^{2^{k+1}-1} |m_j| \leq 2N \sigma_p(m).$$

Следовательно, в силу (9.3)

$$\sum_{j=1}^{N-1} |m_j| \|\hat{a}(j)\| \leq \frac{1}{2} \sigma_p(m).$$

Далее, для любого $kN \leq j < (k+1)N$ ($k \in \mathbb{N}$) имеем

$$\begin{aligned} \|\hat{a}(j)\| &\leq \frac{1}{N} \sum_{\nu=kN}^{(k+1)N-1} \|\hat{a}(\nu)\| + \sum_{\nu=kN}^{(k+1)N-1} \|\hat{a}(\nu) - \hat{a}(\nu+1)\| \\ &\leq N^{1/p-1} \left(\sum_{\nu=kN}^{(k+1)N-1} \|\hat{a}(\nu)\|^{p'} \right)^{1/p'} + N^{1/p} \left(\sum_{\nu=kN}^{(k+1)N-1} \|\hat{b}(\nu)\|^{p'} \right)^{1/p'}, \end{aligned}$$

где $b(t) = a(t)(1 - e^{-it})$. Используя неравенство Гёльдера и наше предположение о том, что X имеет тип Фурье⁸ p , мы легко получаем, что

$$\sum_{j=N}^{\infty} |m_j| \|\hat{a}(j)\| \leq CN^{1/p} \left(\frac{1}{N} \|a\|_p + \|b\|_p \right) \leq C' \sigma_p(m).$$

Этим завершается доказательство (9.13).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.4. Будем говорить, что банахово пространство X обладает свойством Харди, если существует постоянная $C > 0$, такая, что для любой функции $f \in H_X^{1,at}$

$$(9.14) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{|\widehat{f}(n)|}{|n|+1} \leq C \|f\|_{H_X^{1,at}}.$$

Справедлива следующая

ТЕОРЕМА 9.5. *Для того чтобы банахово пространство X обладало свойством Харди, необходимо и достаточно, чтобы X имело нетривиальный тип Радемахера.*

Напомним, что в силу следствия 8.9 пространство X имеет нетривиальный тип Радемахера тогда и только тогда, когда X имеет нетривиальный тип Фурье. Достаточность в теореме 9.5 (принадлежащая Ж. Бургейну [13]) сразу следует из теоремы 9.3. Доказательство необходимости сводится к тому факту, что пространство $L^1(\mathbb{T})$ не обладает свойством Харди (см. [9, предложение 2.6]).

⁸Напомним, что тип Фурье p равносильен T -типу p (см. §7).

ЗАМЕЧАНИЕ 9.6. Пусть $1 < p \leq 2$. Будем говорить, что банахово пространство X обладает свойством $(\mathcal{F}_p)$, если для любой последовательности $m \in FM_p$ и любой функции $f \in H_X^{1,at}$ $\{m_j \|f(j)\|\} \in l^1$. Было бы интересно дать полное описание банаховых пространств, обладающих этим свойством. В силу теоремы 9.3, если X имеет тип Фурье p , то X имеет и свойство $(\mathcal{F}_p)$. С другой стороны, в работе [9] было доказано, что если X обладает свойством $(\mathcal{F}_p)$, то X^* имеет тип Радемахера p ; в силу предложения 5.22 это равносильно тому, что X имеет сильный R -котип p' . В то же время, тип Фурье p равносильно сильному T -котипу p' (см. §7). Таким образом, здесь имеется разрыв между необходимым и достаточным условиями.

Напомним теперь определение пространства $ВМО_X$. Пусть $f \in L_X^1(-\pi, \pi) - 2\pi$ -периодическая функция. Положим

$$\|f\|_* = \sup \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \|f(t) - f_{\Delta}\| dt,$$

где $f_{\Delta} = \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} f(u) du$ и верхняя грань берется по всем интервалам $\Delta \subset \mathbb{R}$ с $|\Delta| \leq 2\pi$. Пространство $ВМО_X$ состоит из всех функций $f \in L_X^1$, для которых $\|f\|_* < \infty$.

Теорема Фейффермана о двойственности между H^1 и $ВМО$ лишь частично сохраняется для векторнозначных функций. Именно, пространство $ВМО_{X^*}$ изоморфно подпространству пространства $(H_X^{1,at})^*$ (см. [9]).

Тем не менее, с помощью теоремы 9.3 мы легко получаем аналог следствия 9.2.

ТЕОРЕМА 9.7. Пусть банахово пространство X имеет тип Фурье $p \in (1, 2]$. Предположим, что последовательность $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}} \subset X$ такова, что $\{\|x_n\|\} \in FM_p$. Тогда ряд

$$(9.15) \quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n e^{int}$$

сходится в $L_X^{p'}(-\pi, \pi)$ и его сумма принадлежит $ВМО_X$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое утверждение следует из того, что $FM_p \subset l^p$ и X имеет тип Фурье p .

Далее, фиксируем интервал Δ с $|\Delta| \leq 2\pi$; предположим, что $f_{\Delta} = 0$. Используя теорему Хана–Банаха, легко видеть, что найдется сильно измеримая функция $g: [-\pi, \pi] \rightarrow X^*$ такая, что для любого $t \in [-\pi, \pi]$

$$\langle f(t), g(t) \rangle = \|f(t)\|_X \quad \text{и} \quad \|g(t)\|_{X^*} = 1.$$

Положим

$$a(t) = \frac{1}{|\Delta|} \chi_{\Delta}(t) [g(t) - g_{\Delta}].$$

Тогда a есть X^* -атом. При этом (см. (2.13))

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \|f(t)\| dt &= \frac{1}{|\Delta|} \int_{\Delta} \langle f(t), g(t) - g_{\Delta} \rangle dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(t), a(t) \rangle dt = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \langle x_n, \hat{a}(n) \rangle \\ &\leq 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \|x_n\|_X \|\hat{a}(n)\|_{X^*}. \end{aligned}$$

Поскольку X имеет тип Фурье p , то в силу теоремы 6.3 пространство X^* также имеет тип Фурье p . Поэтому, применяя неравенство (9.12), мы завершаем доказательство теоремы.

СЛЕДСТВИЕ 9.8. Пусть X имеет нетривиальный тип Фурье. Если $x_n \in X$ ($n \in \mathbb{Z}$) и

$$(9.16) \quad \|x_n\| = O\left(\frac{1}{|n|+1}\right),$$

то сумма ряда (9.15) принадлежит ВМО_X .

Действительно, из (9.16) следует, что $\{\|x_n\|\} \in FM_p$ при любом $p \in (1, 2]$.

Далее мы рассмотрим классы банаховых пространств, для которых выполняются неравенства типа Пэли (см. (9.2)).

Заметим, что в неравенствах вида (9.1) или (9.2) достаточно брать только коэффициенты $\hat{f}(n)$ для $n \geq 0$ (поскольку, если функция $f \in H^{1,at}$, то и $f(-t) \in H^{1,at}$, и $H^{1,at}$ -нормы этих функций равны).

Напомним, что последовательность натуральных чисел $\{n_k\}_{k \geq 1}$ называется λ -лакунарной по Адамару ($\lambda > 1$), если

$$(9.17) \quad n_1 = 1, \quad \frac{n_{k+1}}{n_k} \geq \lambda \quad (k = 1, 2, \dots).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.9. Будем говорить, что банахово пространство X обладает $\mathcal{P}_q$ -свойством ($2 \leq q < \infty$), если для любого $\lambda > 1$ существует постоянная $C > 0$ такая, что для каждой λ -лакунарной последовательности $\{n_k\}$ и каждой функции $f \in H_X^{1,at}$

$$(9.18) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\hat{f}(n_k)\|^q \right)^{1/q} \leq C \|f\|_{H_X^{1,at}}.$$

Это понятие для $q = 2$ изучалось в работе [9]. В частности, следующая теорема была доказана в [9] для $q = 2$; в общем случае $q \geq 2$ доказательство аналогично.

ТЕОРЕМА 9.10. Банахово пространство X обладает $\mathcal{P}_q$ -свойством ($2 \leq q < \infty$) тогда и только тогда, когда X имеет сильный R -тип q .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим сначала, что X имеет сильный R -котип q . В силу предложения 5.22 отсюда следует, что X^* имеет R -тип $p = q'$.

Пусть $\lambda > 1$. Достаточно доказать существование постоянной C_λ такой, что для любой λ -лакунарной последовательности $\{n_k\}$ и любого атома a , сосредоточенного в интервале $(-\delta, \delta)$ ($0 < \delta \leq \pi$), выполняется неравенство

$$(9.19) \quad \left(\sum_{k=1}^{\infty} \|\hat{a}(n_k)\|^q \right)^{1/q} \leq C_\lambda.$$

Пусть $\pi/n_{\nu+1} < \delta \leq \pi/n_\nu$. Тогда в силу (9.3) и (9.17)

$$(9.20) \quad \left(\sum_{k=1}^{\nu} \|\hat{a}(n_k)\|^q \right)^{1/q} \leq \frac{1}{4n_\nu} \sum_{k=1}^{\nu} n_k \leq \frac{\lambda}{4(\lambda-1)}.$$

Далее, фиксируем натуральное $N > \nu$ и выберем векторы $x_k^* \in X^*$ ($\nu < k \leq N$) так, чтобы выполнялись соотношения $\langle \hat{a}(n_k), x_k^* \rangle \geq 0$,

$$(9.21) \quad \sum_{k=\nu+1}^N \|x_k^*\|^p = 1 \quad \text{и} \quad \left(\sum_{k=\nu+1}^N \|\hat{a}(n_k)\|^q \right)^{1/q} = \sum_{k=\nu+1}^N \langle \hat{a}(n_k), x_k^* \rangle.$$

Полагая $g(t) = \sum_{k=\nu+1}^N x_k^* e^{in_k t}$, имеем

$$\begin{aligned} \sum_{k=\nu+1}^N \langle \hat{a}(n_k), x_k^* \rangle &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \langle a(t), g(t) \rangle dt \\ &\leq \frac{1}{4\pi\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \|g(t)\|_{X^*} dt = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|g(\delta s)\|_{X^*} ds. \end{aligned}$$

По теореме 8.4 существует постоянная C такая, что последний интеграл не превосходит

$$C \int_0^1 \left\| \sum_{j=1}^{N-\nu+1} x_{\nu+j}^* r_j(\tau) \right\|_{X^*} d\tau.$$

Поскольку X^* имеет R -тип p , то, используя (9.21), имеем:

$$\left(\sum_{k=\nu+1}^N \|\hat{a}(n_k)\|^q \right)^{1/q} \leq C'.$$

Объединяя это неравенство с (9.20), получаем (9.19).

Предположим теперь, что X обладает $\mathcal{P}_q$ -свойством. Пусть

$$g(t) = \sum_{k=1}^N x_k^* e^{i2^k t}, \quad x_k^* \in X^*.$$

В силу предложения 2.6

$$\|g\|_{L_{X^*}^2} = \sup \left| \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(t), g(t) \rangle dt \right|,$$

где верхняя грань берется по всем функциям $f \in L_X^2$ с единичной нормой. Для любой такой функции f в силу (9.18) и (9.6) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \langle f(t), g(t) \rangle dt \right| &= \left| \sum_{k=1}^N \langle \widehat{f}(2^k), x_k^* \rangle \right| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^N \|\widehat{f}(2^k)\|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{k=1}^N \|x_k^*\|^p \right)^{1/p} \leq C \left(\sum_{k=1}^N \|x_k^*\|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что X^* имеет R -тип p и, стало быть, X имеет сильный R -котип q (см. предложение 5.22). Теорема доказана.

В частности, теорема 9.10 содержит описание банаховых пространств X , для которых выполняется неравенство Пэли:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} \|\widehat{f}(2^k)\|^2 \right)^{1/2} \leq C \|f\|_{1,at}, \quad f \in H_X^{1,at},$$

– это те и только те пространства, которые имеют сильный R -котип 2.

В связи с неравенствами Пэли (9.2) Харди и Литтлвуд рассмотрели более общий вопрос об описании $(H^1 - l^q)$ -мультипликаторов ($2 \leq q < \infty$). Ими была доказана следующая теорема (см. [24, с. 103]).

ТЕОРЕМА 9.11. Пусть $m = \{m_j\}_{j \geq 0}$ – последовательность комплексных чисел и $2 \leq q < \infty$. Для того чтобы для каждой функции $f \in H^1$ последовательность $\{m_j \widehat{f}(j)\}$ принадлежала l^q , необходимо и достаточно, чтобы

$$(9.22) \quad \sum_{k=1}^N k^q |m_k|^q = O(N^q).$$

Заметим, что $\mathcal{P}_q$ -свойство допускает эквивалентное описание в терминах мультипликаторов. Именно, легко видеть, что справедливо следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.12. Пусть X – банахово пространство и $2 \leq q < \infty$. Тогда следующие условия равносильны:

- (i) X обладает $\mathcal{P}_q$ -свойством;
- (ii) для любой функции $f \in H_X^{1,at}$ и любой последовательности $\{m_j\}_{j \geq 0}$, удовлетворяющей (9.22), последовательность $\{m_j \widehat{f}(j)\}$ принадлежит l^q .

§ 10. Оценки преобразований Фурье гладких функций

Хорошо известно, что дополнительные условия на гладкость периодической функции (в интегральной или равномерной метрике) обеспечивают определенную скорость стремления к нулю ее коэффициентов Фурье. Классическим результатом здесь является теорема Бернштейна (см. [4, с. 608]):

если $f \in \text{Lip } \alpha$ ($\alpha > \frac{1}{2}$), то ряд Фурье функции f сходится абсолютно.

В этом параграфе будут рассмотрены аналогичные результаты для векторнозначных функций. Эти результаты приводятся в терминах преобразований Фурье; ясно, что соответствующие утверждения справедливы и для коэффициентов Фурье периодических функций.

Для векторнозначных функций на $\mathbb{R}^n$ понятия модуля непрерывности, обобщенной производной, пространств Соболева и Бесова определяются так же, как в скалярном случае (см. § 4).

Преобразование Фурье функции f обозначаем через $\mathcal{F}(f)$.

Начнем с оценки перестановки преобразования Фурье.

ЛЕММА 10.1. *Пусть банахово пространство X имеет тип Фурье $p \in [1, 2]$. Тогда для любой функции $f \in L_X^p(\mathbb{R}^n)$ и любого $r \in \mathbb{N}$*

$$(10.1) \quad \mathcal{F}(f)^*(t) \leq C t^{1/p-1} \omega_r(f; t^{-1/n})_p \quad (t > 0).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим

$$\varphi_h^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^r (-1)^{r-j} \binom{r}{j} f(x + j h e_k) \quad (h > 0; k = 1, \dots, n)$$

(где e_k – единичные координатные векторы в $\mathbb{R}^n$). Пусть $E \subset \mathbb{R}^n$ – множество меры t такое, что

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \geq \mathcal{F}(f)^*(t) \quad \text{для любого } \xi \in E.$$

Найдутся подмножество $Q \subset E$ с $|Q| \geq t/(2n)$ и индекс $k = k(t)$, $1 \leq k \leq n$, такие, что $|\xi_k| \geq t^{1/n}/2$ для всех $\xi \in Q$. Имеем

$$\mathcal{F}(\varphi_h^{(k)})(\xi) = \mathcal{F}(f)(\xi) \sigma(h \xi_k), \quad \text{где } \sigma(u) = (e^{2\pi i u} - 1)^r.$$

Обозначим $\delta = r t^{-1/n}$. Легко видеть, что

$$\frac{1}{\delta} \int_0^\delta |\sigma(h \xi_k)| dh > \frac{1}{2} \quad (\xi \in Q)$$

и

$$(10.2) \quad \mathcal{F}(f)^*(t) \leq \frac{4n}{t} \frac{1}{\delta} \int_0^\delta dh \int_Q |\mathcal{F}(\varphi_h^{(k)})(\xi)| d\xi.$$

Поскольку X имеет тип Фурье p , то мы получаем

$$\begin{aligned} \int_Q |\mathcal{F}(\varphi_h^{(k)})(\xi)| d\xi &\leq |Q|^{1/p} \left(\int_Q |\mathcal{F}(\varphi_h^{(k)})(\xi)|^{p'} d\xi \right)^{1/p'} \\ &\leq C|Q|^{1/p} \|\varphi_h^{(k)}\|_p \leq Ct^{1/p} \|\varphi_h^{(k)}\|_p. \end{aligned}$$

В силу (10.2) отсюда следует (10.1). При $p = 1$ оценка (10.1) следует прямо из (10.2). Лемма доказана.

Пользуясь леммой 10.1, получаем новое доказательство следующего результата [28], [47].

ТЕОРЕМА 10.2. *Предположим, что банахово пространство X имеет тип Фурье $p \in [1, 2]$. Пусть $\alpha > 0$, $1 \leq \theta < \infty$ и $1/q = 1/p' + \alpha/n$. Тогда для любой функции $f \in B_{p,\theta}^\alpha(\mathbb{R}^n, X)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}(f) \in L_X^{q,\theta}(\mathbb{R}^n)$, причем*

$$(10.3) \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{L_X^{q,\theta}} \leq C \left(\int_0^\infty [t^{-\alpha} \omega_r(f; t)_p]^\theta \frac{dt}{t} \right)^{1/\theta} \quad (r > \alpha, \ r \in \mathbb{N}).$$

В частности, имеет место аналог теоремы Бернштейна–Саса [75].

СЛЕДСТВИЕ 10.3. *Если X имеет тип Фурье $p \in [1, 2]$, то для любой функции $f \in B_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}^n, X)$*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\xi)| d\xi < \infty.$$

В статье Г. Кёнига [47] для периодического случая были приведены примеры, показывающие, что теорема 10.2 не может быть улучшена. В частности, даже в случае $X = \mathbb{C}$ утверждение этой теоремы является оптимальным в шкале пространств Лоренца. С другой стороны, нельзя ослабить и условие на модуль непрерывности. Это справедливо уже в отношении следствия 10.3: как было показано при $n = 1$ П. Л. Ульяновым [80], для любого модуля непрерывности $\omega(\delta)$ такого, что

$$\int_0^1 \frac{\omega(\delta)}{\delta^{1+1/p}} d\delta = \infty \quad (1 < p < \infty),$$

найдется существенно неограниченная функция $f \in L^p$ с $\omega_p(f; \delta) = O(\omega(\delta))$.

Далее, приведем следующий пример.

ПРИМЕР 10.4. Пусть $1 < p \leq 2$ и $1 < r < p$. Тогда существует банахово пространство X такое, что X имеет тип Фурье r и найдется функция $f \in B_{p,1}^{n/p}(\mathbb{R}^n, X)$, для которой

$$(10.4) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\xi)| d\xi = \infty.$$

Действительно, возьмем для простоты $n = 1$ и положим $X = L^{r'}(\mathbb{R})$. Тогда X имеет тип Фурье r (см. предложение 4.4). Определим функцию $f: \mathbb{R} \rightarrow X$ равенством

$$f(t)(y) = \frac{1}{1+|y|} e^{2\pi i t y} \varphi(t),$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\varphi \geq 0$ и $\int_0^1 |\mathcal{F}(\varphi)(\xi)|^{r'} d\xi = 1$. Легко видеть, что для любых $t \in \mathbb{R}$ и $h \in (0, 1]$

$$\|f(t) - f(t+h)\|_X \leq Ch^{1-1/r'} \varphi(t) + |\varphi(t) - \varphi(t+h)|.$$

Следовательно, $f \in B_{p,1}^{1/p}(\mathbb{R}, X)$. С другой стороны,

$$\mathcal{F}(f)(\xi)(y) = \frac{1}{1+|y|} \mathcal{F}(\varphi)(\xi - y).$$

Отсюда

$$\|\mathcal{F}(f)(\xi)\|_X \geq \frac{1}{\xi} \quad \text{для } \xi \geq 1$$

и мы получаем (10.4).

Далее, приведем еще одну полезную оценку перестановки преобразования Фурье.

ЛЕММА 10.5. *Пусть банахово пространство X имеет тип Фурье $1 < p \leq 2$. Тогда для любой функции $f \in L_X^1(\mathbb{R}^n)$*

$$(10.5) \quad \left(\int_0^t (\mathcal{F}(f)^*(u))^{p'} du \right)^{1/p'} \leq t^{1/p'} \int_0^\tau f^*(s) ds + C \left(\int_\tau^\infty f^*(x)^p ds \right)^{1/p}$$

при любых $t, \tau > 0$.

В скалярном случае ($p = 2$) эта лемма была доказана в работах [42], [60]. Доказательство сохраняется и в векторном случае. Именно, выбираем множество $Q \subset \mathbb{R}^n$ меры τ такое, что

$$\{t : \|f(t)\| > f^*(\tau)\} \subset Q \subset \{t : \|f(t)\| \geq f^*(\tau)\}.$$

Пусть $g = f\chi_Q$, $h = f - g$. Тогда

$$\|g\|_1 = \int_0^\tau f^*(s) ds, \quad \|h\|_p = \left(\int_\tau^\infty f^*(s)^p ds \right)^{1/p}.$$

Имеем:

$$\mathcal{F}(f)^*(u) \leq \int_0^\tau f^*(s) ds + \mathcal{F}(h)^*(u) \quad (u > 0).$$

Поскольку X имеет тип Фурье p , то отсюда следует (10.5).

С помощью леммы 10.5 легко получаем следующую теорему, доказанную другим методом в работе [47].

ТЕОРЕМА 10.6. *Предположим, что банахово пространство X имеет тип Фурье $p_0 \in (1, 2]$. Пусть $r \in \mathbb{N}$, $1 < p < p_0$ и $1/q = 1/p' + r/n$. Тогда для любой функции $f \in W_p^r(\mathbb{R}^n, X)$ преобразование Фурье $\mathcal{F}(f) \in L_X^{q,p}(\mathbb{R}^n)$, причем*

$$(10.6) \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{L_X^{q,p}} \leq c \sum_{j=1}^n \|D_j^r f\|_{L_X^p}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| = (2\pi)^{-r} |\xi|^{-r} \left(\sum_{j=1}^n |\mathcal{F}(g_j)(\xi)|^{2/r} \right)^{r/2},$$

где $g_j(x) = D_j^r f(x)$. Пользуясь неравенствами (2.2) и (2.3), получаем

$$\mathcal{F}(f)^*(t) \leq C t^{-r/n} \sum_{j=1}^n \mathcal{F}(g_j)^* \left(\frac{t}{2n} \right).$$

Применяя лемму 10.5 к функциям g_j , получим, что для любых $t, \tau > 0$

$$(10.7) \quad \left(\int_0^t [\mathcal{F}(f)^*(u) u^{r/n}]^{p'_0} du \right)^{1/p'} \leq C \sum_{j=1}^n \left(t^{1/p'_0} \int_0^\tau g_j^*(u) du + \left(\int_\tau^\infty g_j^{*p_0}(u) du \right)^{1/p_0} \right).$$

Пользуясь этой оценкой (с $\tau = 1/t$) и леммой 2.2, получаем неравенство (10.6). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ 10.7. При $p = p_0$ неравенство (10.6) теряет силу (см. [47]). В этом случае справедлива оценка

$$(10.8) \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{L_X^{q,p'}} \leq C \sum_{j=1}^n \|D_j^r f\|_{L_X^p}$$

(она мгновенно следует из (10.7) при $\tau = 0$). Эту оценку нельзя улучшить, заменяя индекс p' в левой части меньшим числом [47].

Рассмотрим теперь случай $p = 1$ в теореме 10.6, который представляет особый интерес хотя бы потому, что связан с условиями суммируемости преобразования Фурье на $\mathbb{R}^n$. Заметим, что этот случай включен в формулировку соответствующей теоремы в [47] (теорема 4, с. 223), однако приведенное в [47] доказательство теряет силу при $p = 1$. Более того, теорема 10.6 неверна при $p = n = 1$. Например, хорошо известно, что ряд Фурье абсолютно непрерывной функции не обязан абсолютно сходиться – примером тому может служить функция

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sin nx}{n \ln n}.$$

Тем не менее при $p = 1, n \geq 2$ теорема 10.6 справедлива; однако даже для скалярных функций этот случай является значительно более сложным (в частности, он не может быть исчерпан применением леммы 10.5).

Для скалярных функций имеет место следующая теорема (аналог неравенства Харди), доказанная в периодическом случае Бургейном [14], а для преобразования Фурье – Пелчинским и Войцеховским [65].

ТЕОРЕМА 10.8. Пусть $f \in W_1^r(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 2$, $r \in \mathbb{N}$). Тогда

$$(10.9) \quad \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}(f)(\xi)| |\xi|^{r-n} d\xi \leq C \sum_{|s|=r} \|D^s f\|_1.$$

В работе [46] было доказано, что справедливо более точное неравенство⁹

$$(10.10) \quad \|\mathcal{F}(f)\|_{n/r,1} \leq C \sum_{j=1}^n \|D_j^r f\|_1 \quad (1 \leq r \leq n, n \geq 2)$$

(так что (10.6) имеет место и при $p = 1$, $X = \mathbb{C}$). В [46] отмечено, что неравенство (10.10) сохраняется и для функций, принимающих значения в банаховом пространстве X , если X имеет нетривиальный тип Фурье $1 < p \leq 2$. Заметим, что без дополнительных условий на X это неверно, как показывает следующий пример.

ПРИМЕР 10.9. Пусть $X = L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi \geq 0$ и $\mathcal{F}(\varphi)(0) = 1$. Положим

$$f(t)(y) = \frac{1}{1 + |y|^n} e^{2\pi i t \cdot y} \varphi(t), \quad f: \mathbb{R}^n \rightarrow X.$$

Легко видеть, что $f \in W_1^n(\mathbb{R}^n; X)$. Далее,

$$\mathcal{F}(f)(\xi)(y) = \frac{\mathcal{F}(\varphi)(\xi - y)}{1 + |y|^n}.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{F}(f)(\xi)\|_X \geq \frac{\mathcal{F}(\varphi)(0)}{1 + |\xi|^n} = \frac{1}{1 + |\xi|^n}$$

и $\mathcal{F}(f) \notin L^1(\mathbb{R}^n)$.

Заметим теперь, что аналог теоремы 10.6 имеет место и для дробных пространств Соболева–Лиувилля. Пространство $\mathcal{L}_p^\alpha(\mathbb{R}^n, X)$ определяется как множество всех функций $f: \mathbb{R}^n \rightarrow X$, представимых в виде свертки

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} G_\alpha(x - y) g(y) dy,$$

где $g \in L_X^p(\mathbb{R}^n)$, а G_α – ядро Бесселя (см. [74, гл. 5]). При этом по определению

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p^\alpha(\mathbb{R}^n, X)} = \|g\|_{L_X^p}.$$

Учитывая, что

$$\mathcal{F}(G_\alpha)(\xi) = (1 + 4\pi^2 |\xi|^2)^{-\alpha/2},$$

мы с помощью леммы 10.5 мгновенно получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 10.10. Предположим, что банахово пространство X имеет тип Фурье $p_0 \in (1, 2]$. Пусть $\alpha > 0$, $1 < p < p_0$ и $1/q = 1/p' + \alpha/n$. Тогда для любой функции $f \in \mathcal{L}_p^\alpha(\mathbb{R}^n, X)$ имеем $\mathcal{F}(f) \in L_X^{q,p}(\mathbb{R}^n)$, причем

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L_X^{q,p}} \leq C \|f\|_{\mathcal{L}_p^\alpha(\mathbb{R}^n, X)}.$$

⁹По сравнению с (10.9) в правой части (10.10) присутствуют только несмешанные производные.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Andersson M. E. The Hausdorff–Young Inequality and Fourier Type // Doctoral dissertation. Uppsala, 1994.
- [2] Asmar N. H., Montgomery-Smith S. On the distribution of Sidon series // Ark. Mat. 1993. V. 31. № 1. P. 13–26.
- [3] Бабенко К. И. Об одном неравенстве в теории интегралов Фурье // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. С. 531–542.
- [4] Бари Н. К. Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.
- [5] Beckner W. Inequalities in Fourier analysis // Ann. of Math. 1975. V. 102. P. 159–182.
- [6] Benedek A., Calderon A. P., Panzone R. Convolution operators on Banach space valued functions // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1962. V. 48. P. 356–365.
- [7] Bennett C., Sharpley R. Interpolation of Operators. Boston: Academic Press, 1988.
- [8] Берг Й., Лёфстрём Й. Интерполяционные пространства. Введение. М.: Мир, 1980.
- [9] Blasco O., Pelczynski A. Theorem of Hardy and Paley for vectorvalued analytic functions and related classes of Banach spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1991. V. 323. № 1. P. 335–369.
- [10] Boas R. P., Bochner S. On a theorem of M. Riesz on Fourier series // J. London Math. Soc. 1939. V. 14. P. 62–73.
- [11] Bochner S. Integration von Funktionen, deren Werte die Elemente eines Vektorraumes sind // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 262–276.
- [12] Bourgain J. A Hausdorff–Young inequality for B -convex Banach spaces // Pacific J. Math. 1982. V. 101. P. 255–262.
- [13] Bourgain J. Vector-valued Hausdorff–Young inequality and applications // Lecture Notes in Math. 1988. V. 1317. P. 239–249.
- [14] Bourgain J. A Hardy Inequality in Sobolev Spaces // Preprint. Brussels: Vrije University, 1981.
- [15] Boyd D. W. Indices of function spaces and their relationship to interpolation // Canad. J. Math. 1969. V. 21. P. 1245–1254.
- [16] Calderón A. P. Intermediate spaces and interpolation, the complex method // Stud. Math. 1964. V. 24. P. 113–190.
- [17] Calderón A. P., Zygmund A. On the existence of certain singular integrals // Acta Math. 1952. V. 88. P. 85–139.
- [18] Calderón A. P., Zygmund A. On singular integrals // Amer. J. Math. 1956. V. 78. P. 289–309.
- [19] Coifman R. R., Meyer Y. Au delà des opérateurs pseudo-différentiels // Astérisque. 1978. V. 57. P. 1–187.
- [20] Creekmore J. Type and cotype in Lorentz L_{pq} spaces // Indag. Math. 1981. V. 43. P. 145–152.
- [21] Cwikel M. On $(L^{p_0}(A_0), L^{p_1}(A_1))_{\theta, q}$ // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 44. P. 286–292.
- [22] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [23] Diestel J., Uhl J. J., Jr. Vector Measures. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1977 (Math. Surveys. V. 15).
- [24] Duren P. L. Theory of H^p Spaces. New York: Academic Press, 1970.
- [25] Edgar G. A. Extremal integral representations // J. Funct. Anal. 1976. V. 23. № 2. P. 145–161.
- [26] Fefferman C. Characterizations of bounded mean oscillation // Bull. Amer. Math. Soc. 1971. V. 77. P. 587–588.
- [27] Garcia-Cuerva J., Rubio de Francia J. L. Weighted Norm Inequalities and Related Topics. Amsterdam: North-Holland, 1985.
- [28] Garcia-Cuerva J., Kazarian K. S., Torrea J. L. Hausdorff–Young Type Theorems for Vector-Valued Fourier Transforms and Applications // Preprint. Madrid: Univ. Autonoma de Madrid, 1994.

- [29] Garcia-Cuerva J., Kazarian K. S., Torrea J. L. On the Fourier type of Banach lattices // Proceedings of Missouri Conference “Interactions Between Functional Analysis, Harmonic Analysis and Probability” / ed. N. Kalton, E. Saab, 1995. P. 169–179.
- [30] Giesy D. P. On a convexity condition in normed linear spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1966. V. 125. P. 114–146.
- [31] Giesy D. P., James R. C. Uniformly non- l^1 and B -convex Banach spaces // Studia Math. 1973. V. 48. P. 61–69.
- [32] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. М.: Наука, 1987.
- [33] Gustavsson J., Peetre J. Interpolation of Orlicz spaces // Studia Math. 1977. V. 60. P. 33–59.
- [34] Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1953.
- [35] Харди Г. Г., Литтлвуд Дж. Е., Полиа Г. Неравенства. М.: ИЛ, 1948.
- [36] Хьюитт Э., Росс К. Абстрактный гармонический анализ. Т. 1, 2. М.: Наука, 1975.
- [37] Hewitt E., Stromberg K. R. Real and Abstract Analysis. A Modern Treatment of the Theory of Functions of a Real Variable. Berlin: Springer-Verlag, 1969.
- [38] Hoffman-Jorgensen J. Sums of independent Banach space valued random variables // Studia Math. 1974. V. 52. P. 159–186.
- [39] Hoffman-Jorgensen J. Probability in Banach spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1977.
- [40] Иосида К. Функциональный анализ. М.: Мир, 1967.
- [41] Journé J.-L. Calderón-Zygmund operators, pseudo-differential operators and the Cauchy integral of Calderón // Lecture Notes in Math. 1983. V. 994. P. 1–128.
- [42] Jurkat W. B., Sampson G. On maximal rearrangement inequalities for Fourier transform // Trans. Amer. Math. Soc. 1984. V. 282. № 2. P. 625–643.
- [43] Кахан Ж.-П. Случайные функциональные ряды. М.: Мир, 1973.
- [44] Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М.: Наука, 1977.
- [45] Кашин Б. С., Саакян А. А. Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
- [46] Kolyada V. I. Estimates of Fourier transforms in Sobolev spaces // Stud. Math. 1997. V. 125. № 1. P. 67–74.
- [47] König H. On Fourier coefficients of vector-valued functions // Math. Nachr. 1991. V. 152. P. 215–227.
- [48] Красносельский М. А., Рутцкий Я. Б. Выпуклые функции и пространства Орлича. М.: Физматгиз, 1958.
- [49] Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
- [50] Kwapién S. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector-valued coefficients // Studia Math. 1972. V. 44. P. 583–595.
- [51] Lindenstrauss J., Tzafriri L. Classical Banach Spaces II. Function Spaces. Berlin: Springer-Verlag, 1979.
- [52] Lions J. L. Une construction d'espaces d'interpolation // C. R. Acad. Sci. Paris. 1960. V. 251. P. 1853–1856.
- [53] Lions J. L., Peetre J. Sur une classe d'espaces d'interpolation // Inst. Hautes Étud. Sci. Publ. Math. 1964. V. 19. P. 5–68.
- [54] Marcinkiewicz J. Sur quelques intégrales du type de Dini // Ann. Soc. Polon. Math. 1938. V. 17. P. 42–50.
- [55] Maurey B. Type et cotype dans les espaces munis de structures locales inconditionnelles // Sem. Maurey-Schwartz (1973–74). Exposés 24–25.
- [56] Maurey B., Pisier G. Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach // Stud. Math. 1976. V. 58. P. 45–90.
- [57] Meyer Y. Algebraic Numbers and Harmonic Analysis. Amsterdam: North-Holland, 1972.
- [58] Milman M. Fourier type and complex interpolation // Proc. Amer. Math. Soc. 1983. V. 89. P. 246–248.
- [59] Milman M. Complex interpolation and geometry of Banach spaces // Ann. Mat. Pura Appl. 1984. V. 136. P. 317–328.

- [60] Montgomery H. L. A note on rearrangements of Fourier coefficients // *Ann. Inst. Fourier*. 1976. V. 26. №2. P. 29–34.
- [61] Paley R. E. A. C., Zygmund A. On some series of functions // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1930. V. 26. P. 337–357; 458–474.
- [62] Peetre J. Sur la transformation de Fourier des fonctions à valeurs vectorielles // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. 1969. V. 42. P. 15–26.
- [63] Peetre J. Sur l'utilisation des suites inconditionnellement sommables dans la théorie des espaces d'interpolation // *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. 1971–72. V. 46. P. 173–190.
- [64] Pełczyński A. Commensurate sequences of characters // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1988. V. 104. №2. P. 525–531.
- [65] Pełczyński A., Wojciechowski M. Molecular decompositions and embedding theorems for vector-valued Sobolev spaces with gradient norm // *Stud. Math.* 1993. V. 107. P. 61–100.
- [66] Pisier G. Les inégalités de Khinchine–Kahane d'après C. Borell // *Sémin. géom. des espaces de Banach, 1977–1978, Exposé VII: Ecole Polytechnique, Cent. Math.*, 1978. P. 1–14.
- [67] Pisier G. Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces // *Ann. of Math.* 1982. V. 115. P. 375–392.
- [68] Pisier G. Factorization of Linear Operators and the Geometry of Banach Spaces. Providence, RI: Amer. Math. Soc. CBMC Reg. Conf. Ser. Math., 1986.
- [69] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М.: Наука, 1984.
- [70] Rubio de Francia J. L. Martingale and integral transforms of Banach space valued functions // *Lecture Notes in Math.* 1982. V. 1221. P. 195–222.
- [71] Rubio de Francia J. L., Ruiz F. J., Torrea J. L. Calderón–Zygmund theory for operator-valued kernels // *Adv. Math.* 1986. V. 62. P. 7–48.
- [72] Rudin W. Fourier Analysis on Groups. New York: Interscience Publishers, 1962.
- [73] Sledd W. T., Stegenga D. A. An H^1 multiplier theorem // *Ark. Mat.* 1981. V. 19. №2. P. 265–270.
- [74] Стейн Е. М. Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.
- [75] Szasz O. Fourier series and mean moduli of continuity // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1937. V. 42. №3. P. 355–395.
- [76] Titchmarsh E. C. A contribution to the theory of Fourier transforms // *Proc. London Math. Soc.* 1924. V. 23. №2. P. 279–289.
- [77] Титчмарш Е. Введение в теорию интегралов Фурье. М.–Л.: Гостехиздат, 1948.
- [78] Torchinsky A. Real-Variable Methods in Harmonic Analysis. New York: Academic Press, 1986.
- [79] Трибель Х. Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [80] Ульянов П. Л. Об абсолютной и равномерной сходимости рядов Фурье // *Матем. сб.* 1967. Т. 72. №2. С. 193–225.
- [81] Zaanen A. C. Integration. New York: Wiley, 1967.
- [82] Зигмунд А. Тригонометрические ряды. Т. 1, 2. М.: Мир, 1965.

Поступила в редакцию

04.12.1997