Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. Я. Хавинсон, Суммы Голубева: теория экстремальных задач типа задачи об аналитической емкости и сопутствующих аппроксимационных процессов, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 75–142

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm180>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:10:43

УДК 517.535.4

СУММЫ ГОЛУБЕВА: ТЕОРИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ТИПА ЗАДАЧИ ОБ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ЕМКОСТИ И СОПУТСТВУЮЩИХ АППРОКСИМАЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ

С. Я. ХАВИНСОН

В работе изучаются аналоги аналитической емкости для классов аналитических функций, представимых особым аналитическим аппаратом, который мы называем “суммами Голубева”. В сумму Голубева входят производные различных (заданных) порядков от потенциалов Коши (в частности, в подобной сумме могут фигурировать и сами потенциалы Коши). При этом меры, определяющие различные члены суммы Голубева, задаются, вообще говоря, на разных компактах. Рассматриваются суммы Голубева с различными типами мер: комплексными, действительными или положительными. Излагается абстрактная схема исследования экстремальных задач типа задачи об аналитической емкости. Двойственно связанными с такими экстремальными задачами оказываются задачи аппроксимации с учетом величин аппроксимирующих агрегатов. В случае положительных мер задача аппроксимации трансформируется в задачу о том, как данный элемент пространства поместить в заданный в пространстве конус, добавляя к элементу линейные комбинации элементов заданного подпространства с возможно малыми коэффициентами. Предварительно установлены критерии представления аналитической функции суммами Голубева различной структуры. Эти критерии обобщают известные критерии представимости потенциалами Коши.

Библиография: 85 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	76
§ 1. Представление аналитических функций суммами Голубева	84
§ 2. Общая схема для экстремальных задач и аппроксимационных процессов, возникающих при определении аналогов аналитической емкости	95
§ 3. Емкость Коши и ее аналоги для сумм Голубева	108
§ 4. Вещественные меры. Положительные меры (Классы $\Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}$ и Γ_{Π}^{+})	125
§ 5. Аналоги аналитической емкости при других ограничениях на поведение аналитических функций	134
Список литературы	139

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00420).

Введение

В работе излагается общая схема исследования экстремальных задач, родственных хорошо известной в современной теории функций задаче об аналитической емкости множеств. Объектом, к которому прилагается указанная схема, выступают классы аналитических функций, представимых специальным аналитическим аппаратом, который мы называем “суммами Голубева”. Частным случаем таких представлений являются потенциалы Коши (интегралы типа Коши–Стилтьеса). Кроме того, и это естественно, на функции рассматриваемых классов накладываются определенные ограничения, связанные с их поведением внутри области. Наиболее популярное (но не единственно возможное) из таких ограничений – просто быть ограниченными в области.

Изложение новых результатов, иллюстрирующих общую схему, ведется в тесной связи с обзором некоторых более ранних исследований, касающихся непосредственно аналитической емкости множеств. Сообщаемые результаты являются аналогами и обобщениями этих более ранних результатов, а иногда – последнее относится к задачам с положительными или вещественными мерами – закрывают имевшиеся пробелы.

0.0. Обозначения. На протяжении работы мы придерживаемся следующих обозначений: $\mathbb{C}$ – комплексная плоскость, $\overline{\mathbb{C}}$ – расширенная плоскость. $\mathbb{R}^n$ – n -мерное вещественное пространство, $\mathbb{C}^n$ – n -мерное комплексное пространство. F – компакт в $\mathbb{C}$, G – область в $\overline{\mathbb{C}}$, содержащая ∞ внутри. $\overline{A}$ – замыкание множества A (в каком-то пространстве). $(\overline{\mathbb{C}} \setminus F)_\infty$ – та из дополнительных к компакт F областей, которая содержит ∞ . Рассматриваемые в работе меры – всегда борелевские, конечные, регулярные. S_μ – замкнутый носитель меры μ , $\|\mu\|$ – полная вариация μ . $\mathcal{M}_F$ – совокупность всех комплекснозначных мер μ , $S_\mu \subset F$. $\mathcal{M}_F^{\mathbb{R}}, \mathcal{M}_F^+$ – части $\mathcal{M}_F$, состоящие соответственно из вещественных или положительных мер. $\hat{\mu}(z)$ – преобразование Коши (потенциал Коши) меры μ (см. формулу (1.1) из §1). $C(F)$ – банахово пространство непрерывных комплексных функций на F с равномерной нормой. $C^{\mathbb{R}}(F)$ – аналогичное пространство вещественных функций на F . X' – пространство линейных функционалов над линейным пространством X (без топологии). X^* – сопряженное пространство к линейному топологическому пространству X (в частности, $\mathcal{M}_F = C(F)^*$, $\mathcal{M}_F^{\mathbb{R}} = C^{\mathbb{R}}(F)^*$ – теорема Ф. Рисса [1; гл. IV]). $A(F)$ – совокупность (линейное пространство) всех функций, аналитических на F . $B(G)$ – класс всех ограниченных аналитических в G функций, $B^1(G)$ – подкласс $B(G)$, состоящий из функций $f(z)$, для которых $|f(z)| \leq 1$, $f(\infty) = 0$.

0.1. Аналитическая емкость. В 1947 г. Л. Альфорс [2] рассмотрел экстремальную задачу для класса $B^1(G)$:

$$(0.1) \quad \sup_{f \in B^1(G)} |f'(\infty)| = \sup_{f \in B^1(G)} \lim_{z \rightarrow \infty} |zf(z)|.$$

Эту задачу естественно считать (как и делает Альфорс) обобщением задачи о лемме Шварца в круге. Одним из доводов в мотивации к изучению этого экстремума (обозначим его величину пока $M(G)$) был следующий: *условие $M(G) > 0$ необходимо и достаточно, чтобы класс ограниченных аналитических в G функций (класс*

$B(G)$ состоял не из одних констант. Доказательство этого факта (теорема 1 работы [2]) почти “тривиально”, но сам факт имеет принципиальное значение: он указывает некоторую количественную характеристику таких областей, в которых класс $B(G)$ состоит не из одних констант. Будем говорить, что какой-то класс функций в данной области нетривиален, если в этом классе есть функции, отличные от констант, и, соответственно, — что класс тривиален, когда все его функции — константы. В конце девятнадцатого века Пенлеве [3], [4] поставил следующую проблему: *охарактеризовать такие множества F , в дополнении G к которым класс $B(G)$ нетривиален* (о проблеме Пенлеве — см. в книгах [5], [6]). С этой точки зрения экстремальную величину (0.1) следует понимать как характеристику множества $F = \mathbb{C} \setminus G$; обозначим ее поэтому $\gamma(F)$ ($= M(G)$). Конечно, полученная характеристика $\gamma(F) > 0$ нетривиальности класса $B(G)$ становится сколько-нибудь содержательной, если изучена задача (0.1), из которой величина $\gamma(F)$ появилась. Отметим, что он не может описать величину (0.1) в более ясных геометрических терминах, терминах теории меры (меры типа хаусдорфовых) или в терминах теории потенциала (емкости теории потенциала), Л. Альфорс исследует задачу (0.1) в случае конечносвязной области G и, прежде всего, сосредоточивается на установлении основных свойств экстремальной функции этой задачи. Он конструирует также более “простую” экстремальную задачу, связанную с линейными комбинациями основных функций области — функции Грина и гармонических мер граничных контуров — приводящую к той же величине (0.1). (Описание этой работы Л. Альфорса можно найти в книге [7; дополнения §3].) Экстремальную функцию в задаче (0.1) называют *функцией Альфорса*. (Собственно говоря, условие нетривиальности класса $B(G)$ записано в цитированной выше теореме 1 из [2] в виде $\lim M(G_n) > 0$, где $\{G_n\}$ — исчерпывающая G возрастающая последовательность конечносвязных областей. Сделано это именно потому, что исследование экстремальной задачи было проведено лишь для конечносвязных областей. То, что $\lim M(G_n) = M(G)$, есть немедленное следствие компактности класса $B^1(G)$.) В работе Л. Альфорса и А. Бейрлинга [8] были рассмотрены экстремальные величины типа (0.1) для некоторых других классов аналитических функций, найдены важные соотношения, связывающие такие величины для некоторых отличных друг от друга классов функций. Этой работой был подтвержден и постепенно стал общепринятым взгляд на величины типа (0.1), как на определенные характеристики множества F (или, эквивалентно, области G). Величину $\gamma(F)$ из (0.1) называют теперь *аналитической емкостью или емкостью Альфорса* (В. Д. Ерохин был, по-видимому, первым, кто предложил это название — см. [9]). Важные дополнения к исследованию Альфорса были сделаны П. Гарабедяном [10], [11], описавшим двойственную задачу к (0.1) (также для конечносвязной области). *Экстремальная функция в двойственной задаче называется теперь функцией Гарабедяна* и играет, наряду с функцией Альфорса, важную роль в теории аналитической емкости; она находится в тесном родстве с ядром Сегё, связанным с ортогональными разложениями на границе области. В работах автора [12]–[15] задача (0.1), функции Альфорса и Гарабедяна впервые изучались для произвольной области. Применялся развитый автором метод двойственности экстремальных задач теории функций, основанный на теореме Хана–Банаха.

Особое внимание понятие аналитической емкости и некоторые родственные ему понятия привлекли к себе в связи с работами А. Г. Витушкина, решившего в терминах аналитической емкости основные проблемы равномерной аппроксимации рациональ-

ными функциями на множествах комплексной плоскости. Эти результаты и их применения базировались на некоторых важных свойствах аналитической емкости и ее аналога для непрерывных аналитических функций, которые были установлены А. Г. Витушкиным, а также М. С. Мельниковым. Исследования оказались также тесно связанными с изучением свойств границ функциональных алгебр из аналитических или рациональных функций (А. А. Гончар, С. Н. Мергелян, М. С. Мельников, Е. П. Долженко, Е. Бишоп, А. М. Дэви, Д. Р. Вилкен, П. Кэртис и другие). В качестве источников, где освещены (с разной степенью подробности) эти исследования, можно указать [16]–[22]. Книга Гарнетта [22] дает изложение вообще всех основных сведений, связанных с аналитической емкостью, имевшихся к 1972 году.

Как было предопределено работой Альфорса, развитие вопросов, связанных с аналитической емкостью, шло, говоря условно, в двух направлениях: “метрическом” и “аналитическом”. К работам первого направления мы относим те исследования, где величину $\gamma(F)$ сравнивают с более привычными геометрико-метрическими характеристиками и стараются, по крайней мере, описать подобным образом множества F , для которых $\gamma(F) = 0$. С некоторой натяжкой сюда можно отнести и методы измерения, заимствованные из теории потенциала. Наиболее важным результатом начальных лет в этом направлении изучения $\gamma(F)$ был пример А. Г. Витушкина [23] множества положительной хаусдорфовой длины, но с $\gamma(F) = 0$. (Пример был упрощен Л. Д. Ивановым [25] и Дж. Гарнеттом [24].) В последние 10 лет в этом направлении получен ряд очень важных, точных и трудных результатов, которых мы здесь касаться не будем. Другое направление, которое было условно названо “аналитическим” и к которому относится настоящая статья, исследует структуру самих экстремальных задач типа (0.1) в различных классах функций. Основной вопрос здесь: какие свойства рассматриваемого класса аналитических функций отражаются в данной экстремальной величине и, прежде всего, влечет ли равенство нулю этой экстремальной величины тривиальность соответствующего класса аналитических функций. Двойственность экстремумов присоединяет к этому вопросу другой: какими особенностями обладают аппроксимационные процессы, происходящие на множествах, для которых данная экстремальная величина равна нулю? Приведем пример. Пусть $F = \overline{\mathbb{C}} \setminus G$. Будем рассматривать величину

$$\gamma_K(F) = \sup_{\substack{\mu \in \mathfrak{M}_F \\ |\hat{\mu}(z)| \leq 1, z \in G}} \left| \int_F d\mu \right|$$

($\hat{\mu}(z)$ – преобразование Коши меры μ). По аналогии с обычной теорией потенциала эту величину очень хочется назвать емкостью. Будем называть ее *емкостью Коши множества F* . (Возможно, впервые этот термин прозвучал в докладе [26].) Очевидно, что $\gamma_K(F) \leq \gamma(F)$. Если F имеет конечную длину в смысле Пенлеве, то $\gamma_K(F) = \gamma(F)$, как было отмечено В. Д. Ерохиным и автором [13], см. также [22; теорема 3.1 гл. II]. (Говорят, что F имеет конечную длину по Пенлеве, если существует такое число $M \geq 0$, что при любом $\varepsilon > 0$ множества F существует ε -окрестность U_ε , для которой длина ее границы $\partial U_\varepsilon \leq M$.) В общем случае вопрос о равенстве $\gamma(F) = \gamma_K(F)$ открыт до сих пор. Неизвестно также, следует ли из условия $\gamma_K(F) = 0$, что $\gamma(F) = 0$. Более того, неизвестно, будет ли всюду разрывным множество F , если $\gamma_K(F) = 0$. (Хотя все уверены, что это так.) Но что же характеризует эта величина?

В [26] упомянуто, что имеет место следующий факт (полное доказательство приведено впервые в §3 этой работы). Если $\gamma_K(F) = 0$, то 1) в области G класс ограниченных потенциалов Коши тривиален; 2) F возможна следующая аппроксимация: для произвольной непрерывной на F функции $\varphi(\zeta)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдутся точки $\{a_1, \dots, a_k\} \subset G$ и числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такие, что

$$\max_{\zeta \in F} \left| \varphi(\zeta) - \sum_1^k \lambda_i (\zeta - a_i)^{-1} \right| < \varepsilon, \quad \sum_1^k |\lambda_i| < \varepsilon;$$

Обратно, если подобная аппроксимация возможна для $\varphi(\zeta) \equiv 1$, то $\gamma_K(F) = 0$.

Рассмотрим сперва утверждение 1). Оно доказывается просто, но не “тривиально”, как цитировавшаяся теорема 1 из [2]. Дело в том, что приходится апеллировать к достаточно глубокому факту – критерию В. П. Хавина [27] (см. также [22; теорема 3.5 гл. II]) представимости аналитической функции потенциалом Коши. Утверждение 2) первоначально было доказано В. П. Хавиным [28], [29] и автором [15], [30] при условии $\gamma(F) = 0$, а обратная часть, где вместо γ_K фигурировала γ , – при дополнительном предположении конечности длины по Пенлеве F . (Более подробное обсуждение связанных с утверждением 2) фактов см. в §3.) Таким образом, использование емкости Коши γ_K вместо емкости Альфорса γ дает как бы естественные рамки приведенному в утверждении 2) аппроксимационному факту.

Наряду с $\gamma(F)$ и $\gamma_K(F)$ в настоящее время рассматриваются величины $\gamma^{\mathbb{R}}(F)$ и $\gamma^+(F)$, которые определяются как и величина $\gamma_K(F)$, но для $\gamma^{\mathbb{R}}$ перебираются вещественные меры, а для γ^+ – положительные. Эти величины (прежде всего, γ^+) использовались в “метрическом” направлении теории для оценок и сравнения с метрическими или теоретико-потенциальными характеристиками F (см. [31], [32]). Однако вопрос о том, что характеризует условие $\gamma^{\mathbb{R}}(F) = 0$ или $\gamma^+(F) = 0$ для соответствующего класса потенциалов Коши и какие аппроксимационные процессы на F связаны с этим условием, не рассматривался. (Для $\gamma^+(F) = 0$ аналог первого утверждения из приведенной для γ_K теоремы совершенно очевиден; в то же время аппроксимационный процесс, связанный с этим условием, весьма специфичен.)

Заметим, что иногда (и это вполне естественно) устанавливаемые в “аналитическом” исследовании факты могут существенно способствовать продвижениям в “метрической” части теории. Так, например, гипотеза Данжуа о том, что для F , лежащих на спрямляемой кривой, условие $\gamma(F) = 0$ равносильно тому, что длина F равна нулю, была доказана [33], [34] с существенным использованием одного тождества, установленного Гарабедяном [11] (наряду, конечно, с другими средствами, прежде всего, с результатом Кальдерона [35] об операторе Коши на липшицевых кривых – см. подробное изложение в [36; §5]). Тождество Гарабедяна играет также значительную роль в дискретном подходе к аналитической емкости, который недавно разработан М. С. Мельниковым [37].

0.2. Суммы Голубева. Мы будем рассматривать классы аналитических функций, представимых более общим аналитическим аппаратом, чем потенциалом Коши, а именно суммами, в которых представлены и производные ядра Коши:

$$(0.2) \quad f(z) = \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - z)^{-n_j} d\mu_j, \quad z \in G = (\overline{\mathbb{C}} \setminus F)_{\infty}, \quad F = \bigcup_{j=1}^s F_j,$$

где F_j – заданные компакты, $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}$, G – та из компонент дополнения в $\overline{\mathbb{C}}$ к F , которая содержит ∞ , $n_j \geq 1$ – заданные натуральные числа. Аналитические функции этого вида будем называть “суммами Голубева” данной конфигурации Π (Π задается компактами F_j и числами n_j , $j = 1, \dots, s$).

Название “суммы Голубева” может быть обосновано тем, что подобные суммы (и ряды) систематически рассматривались в известной диссертации В. В. Голубева [38], [39], защищенной в МГУ в 1916 году. Голубев рассматривал ряд

$$f(z) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_F (\zeta - z)^{-j} \varphi_j(\zeta) d\zeta,$$

где F – спрямляемая кривая, а функции $\varphi_j(\zeta)$ – интегрируемые функции на F , как аппарат представления аналитической функции $f(z)$ в окрестности ее особой линии F – аналог ряда Лорана. Случай, когда в этом ряду конечное число членов, трактовался как аналог лорановского разложения с особыми точками конечного порядка (полюсами). Голубевым был поставлен вопрос: всякую ли аналитическую вне кривой F функцию $f(z)$, $f(\infty) = 0$, можно представить рядом такого вида? Этот вопрос исследовался В. П. Хавиным [40]–[42] и А. Г. Витушкиным [43]. Результат Хавина дает положительный ответ на вопрос Голубева, и притом в более общей ситуации. Пусть F – локально связный компакт и $\mu \geq 0$ – произвольная мера на F , удовлетворяющая единственному естественному требованию “существенности”: если для $E \subset F$ $\mu(E) = 0$, то $\overline{F \setminus E} = F$. Любую функцию $f(z)$, аналитическую вне F , $f(\infty) = 0$, можно представить рядом

$$f(z) = \sum_1^{\infty} \int_F (\zeta - z)^{-j} \varphi_j(\zeta) d\mu,$$

где $\varphi_j(\zeta)$ – комплексные функции, модуль которых интегрируем с квадратом по $d\mu$, определяемые по $f(z)$. При этом нормы $\|\varphi_j\|$ в $L^2(\mu)$ столь быстро убывают, что ряд для $f(z)$ “хорошо” сходится вне F . Первоначально [40] В. П. Хавин формулировал свой результат для произвольного компакта F , но это оказалось неверным. А. Г. Витушкин [43] сконструировал всюду разрывное множество F и непрерывную в $\overline{\mathbb{C}}$, аналитическую вне F функцию, которую нельзя представлять рядом Голубева даже несколько более общего устройства:

$$\sum_1^{\infty} \int_F (\zeta - z)^{-j} d\mu_j, \quad \mu_j \in \mathfrak{M}_F.$$

Впоследствии Р. Э. Вальский [44] доказал, что когда всюду разрывный компакт F достаточно массивен (имеет положительную ньютоновскую емкость), то всегда существует непрерывная в $\overline{\mathbb{C}}$, аналитическая вне F функция, не представимая потенциалом Коши, а С. Я. Хавинсон [45] заметил, что эта функция не представима и рядом Голубева.

0.3. Предмет статьи. Предметом работы является изучение экстремальных задач типа задачи (0.1) или задачи о $\gamma_K(F)$ в классах функций, представимых суммами

Голубева. Основной вопрос состоит в следующем: для класса функций $f(z)$, имеющих вид (0.2) и удовлетворяющих дополнительному ограничению $f(z) \in B^1(G)$, выбрать возможно более простым способом такую экстремальную задачу, чтобы обращение в нуль получаемой в ней экстремальной величины влекло за собой аналогии всех утверждений, имеющих в цитированной в п. 0.1 теореме о емкости Коши γ_K . Тот же вопрос можно ставить для классов функций, представимых суммами (0.2) со специальными видами мер: действительными или положительными. Рассмотрение таких вопросов включает, в частности, задачи о $\gamma^{\mathbb{R}}(F)$ и $\gamma^+(F)$, упоминавшиеся в п. 0.1.

Е. Ш. Чапкой [46], [47] было доказано следующее обобщение теоремы В. П. Хавина и автора из п. 0.1: *если $\gamma(F) = 0$, то для произвольных заданных на F непрерывных функций $\varphi_0(\zeta), \varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_n(\zeta)$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такая сумма простых дробей*

$$R(\zeta) = \sum_1^N \lambda_j (\zeta - a_j)^{-1}, \quad a_j \in G,$$

что

$$|\varphi_0(\zeta) - R(\zeta)| < \varepsilon, |\varphi_1(\zeta) - R'(\zeta)| < \varepsilon, \dots, |\varphi_n(\zeta) - R^{(n)}(\zeta)| < \varepsilon, \\ \zeta \in F, \quad \sum_1^N |\lambda_j| < \varepsilon.$$

(Теорема В. П. Хавина и автора получается отсюда при $n = 0$.) Поставленный выше основной вопрос, исследуемый в настоящей работе, включает получение обобщений этой теоремы, ее аналогов, когда в суммах Голубева используются вещественные или положительные меры, и установление естественных границ для действия теорем такого рода – подобно тому, как условие $\gamma_K(F) = 0$ вместо $\gamma(F) = 0$ дает естественные границы аппроксимационной теореме Хавина и Хавинсона, цитировавшейся в п. 0.1. Хочется еще раз особенно подчеркнуть своеобразие аппроксимационных процессов, двойственных экстремальным задачам для сумм Голубева с положительными мерами. Заметим также, что при наложении дополнительных условий на поведение функций внутри области вместо ограниченности могут выдвигаться иные требования – например, ограниченность некоторых интегральных средних.

0.4. Общая схема для экстремальных задач типа задачи об аналитической емкости. Особенности экстремальных задач типа задачи об аналитической емкости удобно разобрать на примере задачи о емкости Коши $\gamma_K(F)$. Заключаются они, прежде всего, в том, что линейные функционалы, экстремум которых на данном элементе (на функции $\omega(\zeta) \equiv 1, \zeta \in F$) ищется в задаче, а priori не ограничены по норме в своей совокупности. Вместо этого выдвинуто другое требование – ограниченности значений функционалов (в данном случае – мер) на некоторой совокупности элементов основного пространства (в данном случае на элементах $(\zeta - a)^{-1}, a \in G$, пространства $C(F)$). Абстрактная схема таких задач может быть описана следующим образом. В вещественном линейном пространстве X задан выпуклый неотрицательный функционал $r(x)$. Имеется также подпространство $U \subset X$, в котором действует выпуклый функционал $p(u) \geq 0, u \in U$.

Пусть $M \geq 0$ – некоторое число. Введем обозначения:

$$R(r, M) = \{l \in X' : l(x) \leq Mr(x)\}, \quad R(p, M) = \{\Lambda \in U', \Lambda(u) \leq Mp(u)\},$$

$$R(r) = \bigcup_{M \geq 0} R(r, M), \quad R = \{l \in R(r), -l \in R(p, 1)\}.$$

Как указывалось в п. 0.0, $X'(U')$ – множество всех линейных функционалов над X (над U). В случае, когда r – норма в X , включение $l \in R(r)$ означает просто, что l – непрерывный функционал над X , т.е. $l \in X^*$. Если p – норма в U , то включение $-l \in R(p, 1)$ означает, что норма l в сопряженном к U (по норме p) пространстве U^* не превосходит единицы. В этих случаях X можно считать и комплексным пространством.

Абстрактный вариант задачи о емкости Коши состоит в том, чтобы определить величину

$$(0.3) \quad \alpha = \sup_{l \in R} l(\omega),$$

где $\omega \in X$ – данный элемент. В случае задачи о емкости Коши $\gamma_K(F)$ следует принять: $X = C(F)$, $r(x)$ – норма в X , $\omega = \omega(\zeta) \equiv 1$ на F , U – линейная оболочка системы $\{(\zeta - a)^{-1}, a \in G\}$, p для $u = \lambda_1(\zeta - a_1)^{-1} + \dots + \lambda_n(\zeta - a_n)^{-1}$ определяется как $p(u) = \sum_1^n |\lambda_j|$.

Двойственной к (0.3) является задача аппроксимации элемента ω элементами подпространства U при возможно малых значениях p на аппроксимирующих элементах: найти величину

$$(0.4) \quad \beta = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} p(-u_k),$$

где $\inf$ взят по всевозможным последовательностям $\{u_k\} \subset U$, для которых

$$(0.5) \quad r(\omega - u_k) \rightarrow 0.$$

(Если последовательностей со свойством (0.5) вообще нет, то принимаем $\beta = \infty$.) Разработка вопросов аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих “полиномов” началась с работы Дейвиса и Фань-Цзы [48]. Ими были рассмотрены два типа усиленной полноты систем в банаховом пространстве X : один – когда произвольный элемент пространства приближается линейными комбинациями элементов системы так, что коэффициенты комбинаций ограничены в метрике пространства последовательностей l^δ , $\delta \geq 1$, а другой – когда эти коэффициенты сколь угодно малы в l^δ (в случае $\delta = 1$ пространство l^1 допускалось с весами). В работах автора [49]–[54] была построена общая теория аппроксимационных процессов с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих комбинаций: близость к приближаемому элементу измерялась с помощью симметричного выпуклого функционала r (нормы или преднормы), а учет коэффициентов делался преднормой p . Теория была локализована в том смысле, что для данного элемента ω устанавливалось равенство величин (0.3), (0.4): $\alpha = \beta$ и уже исходя из него строились и исследовались соответствующие понятия полноты систем ($O(p)$ -полнота и $o(p)$ -полнота). Наиболее полное изложение этих вопросов дано в работе [54], где исследуется также связь указанной усиленной полноты с обычной. В [54] приведен большой список литературы, посвященной

конкретным задачам указанной теории. Одним из приложений являлось доказательство аппроксимационной теоремы Хавина и Хавинсона, данное автором (В. П. Хавин также исходил из двойственности, но его рассуждение несколько иное), а также доказательство теоремы Чацкой. Однако симметричность функционалов r и p в этой теории не давала возможности использовать ее в таких задачах, где функционалы в (0.3) положительны относительно некоторого конуса $K \subset X$. В частности, не охватывался этой теорией случай емкости $\gamma^+(F)$. Поэтому в настоящей статье мы излагаем вопросы двойственности задач (0.3), (0.4) без предположения о симметрии функционалов r и p . Это оказалось нетрудным, но весьма полезным делом, охватывающим случай положительных относительно конуса K (содержащего внутреннюю точку x_0) функционалов в (0.3). Тогда в двойственной задаче (0.4) нижняя грань берется по таким последовательностям $\{u_k\} \subset U$, для которых существует последовательность положительных чисел $t_k \downarrow 0$ такая, что

$$(0.6) \quad -\omega + t_k x_0 + u_k \in K.$$

Таким образом, здесь вместо аппроксимации элемента ω мы стараемся “загнать” элемент $-\omega$ в конус K добавлением элементов $u_k \in U$ с возможно малыми значениями $p(-u_k)$. Именно этот факт приводит к весьма своеобразным явлениям для емкости $\gamma^+(F)$ или ее обобщений на случай сумм Голубева с положительными мерами.

0.5. Содержание работы. Содержание статьи разбито на пять параграфов, которым предшествует §0 – Введение. В §1 рассматриваются критерии представления аналитических функций суммами Голубева вида (0.2) как с произвольными мерами $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}$, так и с вещественными или положительными мерами. Приведенные результаты служат развитием и дополнением теоремы В. П. Хавина [27] (см. также [22; теорема 3.5]), в которой дается критерий представимости потенциалом Коши (с комплексной мерой).

В §2 подробно излагается схема исследования экстремальных задач типа задачи (0.3)–(0.5).

В §3 общая схема §2 реализуется сначала для емкости Коши, а затем для экстремальных величин типа емкости Коши, определяемых для сумм Голубева различных конфигураций (с комплексными мерами). Приходится различать два случая и в выборе экстремальных величин и в методе доказательства. Сначала рассматривается конфигурация специального вида, когда $n_1 = 1, n_2 = 2, \dots, n_s = s$ и $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_s$. В этом случае экстремальную величину можно определить особенно просто: совершенно так же, как γ_K , – явную роль в ее определении играет только мера μ_1 (остальные действуют “подпольно”). Доказательство основной теоремы 3.10 в этой ситуации основано на применении признака из §1 представимости функции соответствующей суммой Голубева и аналогично доказательству приведенной ранее теоремы 3.2 о емкости Коши. В случае конфигурации с произвольными показателями $n_1, n_2, \dots, n_s$ нужную экстремальную величину приходится вводить так, чтобы в ней были уже явно задействованы все меры $\mu_j, j = 1, \dots, s$ (формула (3.64)). В основной теореме 3.15 приходится предположить, что все компакты F_j всюду разрывны, и строить доказательство на совершенно иной идее, чем в теореме 3.10. Это доказательство основано, в конечном счете, на возможности разбить всюду разрывное множество $F = \bigcup F_j$ на непересекающиеся множества сколь угодно малого диаметра. В §3 приводятся также

результаты, позволяющие, как кажется, яснее понять, в чем трудность установления равенства (или неравенства) емкостей Альфорса и Коши и сколь тонким является различие между ними (если оно на самом деле имеется). Дан также ряд простых результатов о множествах, на которых возможна аппроксимация тех или иных функций суммами простых дробей с ограниченными или сколь угодно малыми суммами коэффициентов. Эти результаты иллюстрируют общую схему § 2.

В § 4 рассматриваются суммы Голубева с вещественными или положительными мерами. При рассмотрении вещественных мер (теорема 4.3) также приходится предположить, что все компакты F_j , $j = 1, \dots, s$, всюду разрывны. Доказательство не приводится – оно вполне аналогично доказательству теоремы 3.15. Для положительных мер рассматривается конфигурация общего вида (любые F_j и n_j) и доказательство основной теоремы 4.7 основано на общей теории § 2. В связи с “конусными” соображениями аппроксимация здесь носит наиболее своеобразный характер; ее можно было бы назвать односторонней. В качестве иллюстрации дан новый признак равенства нулю обычной аналитической емкости $\gamma(F)$.

В §§ 3, 4 рассматриваемые классы состоят из ограниченных внутри области функций или, по крайней мере, из имеющих ограниченную вещественную часть. В § 5 для общих конфигураций с комплексными мерами рассматриваются иные условия на поведение функций внутри области: ограниченность интегральных средних.

Мой коллега по кафедре высшей математики МГСУ В. Я. Эйдерман пробудил мой, затухший было, интерес к проблемам, связанным с аналитической емкостью. Я пользуюсь случаем выразить В. Я. Эйдерману свою признательность. Я благодарен также участникам научного семинара кафедры и, прежде всего, профессорам А. Л. Гаркави, М. В. Самохину и Б. П. Осиленкеру за терпеливое обсуждение частей работы.

§ 1. Представление аналитических функций суммами Голубева

Пусть $F \subset \mathbb{C}$ – компакт, $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Преобразование Коши меры μ есть аналитическая в G функция

$$(1.1) \quad \hat{\mu}(z) = \int_F \frac{d\mu}{(\zeta - z)}.$$

В ряде работ [27], [45], [55]–[57] рассматривались критерии представимости аналитической функции $f(z)$ в виде потенциала (преобразования) Коши (1.1). Некоторые результаты в этом направлении приводятся также в монографиях [22], [36]. Мы рассмотрим представления аналитических функций более общим аналитическим аппаратом – суммами Голубева. При этом в силу того, что основной наш предмет – экстремальные величины типа аналитической емкости, нас прежде всего будут интересовать такие области G , которые содержат ∞ . Пусть $\{n_1, \dots, n_s\}$ – заданное конечное множество натуральных чисел, $1 \leq n_1 < n_2 < \dots < n_s$, а $F_1, \dots, F_s$ – заданный набор компактов в $\mathbb{C}$, не обязательно различных. Совокупность пар (F_j, n_j) :

$$(1.2) \quad \Pi = \Pi(F_1, n_1; F_2, n_2; \dots; F_s, n_s)$$

будем называть *конфигурацией*. Рассмотрим область G :

$$(1.3) \quad G = (\overline{\mathbb{C}} \setminus F_0)_\infty, \quad \text{где } F_0 = \bigcup_{j=1}^s F_j, \quad \text{и пусть } F = \mathbb{C} \setminus G.$$

В G будем изучать класс Γ_Π аналитических функций $f(z)$, имеющих представление

$$(1.4) \quad f(z) = \sum_1^s \int_{F_j} \frac{d\mu_j}{(\zeta - z)^{n_j}} = \sum_1^s \frac{\hat{\mu}_j(z)^{(n_j-1)}}{(n_j - 1)!},$$

где μ_j – некоторые комплексные меры, $S_{\mu_j} \subset F_j$ ($\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}$). Выражения (1.4) – суммы Голубева, структура которых определена конфигурацией Π (1.2). Нас интересует вопрос, когда аналитическая в G функция имеет представление в виде суммы Голубева (1.4). Иными словами, как охарактеризовать включение $f(z) \in \Gamma_\Pi$? Любая аналитическая в области G функция $f(z)$ порождает линейный функционал L_f в $A(F)$:

$$(1.5) \quad L_f(g) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} g(z) f(z) dz, \quad g \in A(F),$$

где V – произвольная открытая окрестность F такая, что $g(z)$ аналитична в замыкании $\bar{V}$, а граница V состоит из конечного числа спрямляемых контуров (для каждой $g \in A(F)$ окрестность V , вообще говоря, своя, и значение интеграла (1.5) от выбранной, среди прочих возможных, для функции g окрестности не зависит).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1. *Для того чтобы аналитическая в области G функция $f(z)$, $f(\infty) = 0$, имела представление (1.4), необходимо и достаточно, чтобы нашлась константа $M > 0$ такая, что для всех $g \in A(F)$ имело место неравенство*

$$(1.6) \quad |L_f(g)| \leq M \max_{1 \leq j \leq s} \|g^{(n_j-1)}\|_j,$$

где $\|\cdot\|_j$ – норма в $C(F_j)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $f(z)$ имеет представление (1.4). Тогда для $g(z) \in A(F)$ имеем:

$$(1.7) \quad \begin{aligned} L_f(g) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} g(z) f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^s \int_{F_j} d\mu_j \int_{\partial V} \frac{g(z) dz}{(\zeta - z)^{n_j}} \\ &= \sum_1^s \int_{F_j} [(-1)^{n_j} g^{(n_j-1)}(\zeta) / (n_j - 1)!] d\mu_j. \end{aligned}$$

Из (1.7) оценка (1.6) с некоторым M немедленно следует. Мы доказали необходимость неравенства (1.6). Чтобы доказать достаточность, рассмотрим пространство

$$(1.8) \quad X = C(F_1) \times C(F_2) \times \cdots \times C(F_s).$$

Таким образом, X состоит из вектор-функций $\mathbf{x} = (x_1(\zeta), \dots, x_s(\zeta))$, где $x_j(\zeta) \in C(F_j)$, $j = 1, \dots, s$. В качестве нормы в X назовем:

$$(1.9) \quad \|\mathbf{x}\| = \max_{1 \leq j \leq s} \|x_j\|_j = \max_{1 \leq j \leq s} \max_{\zeta \in F_j} |x_j(\zeta)|.$$

Сопряженное к X пространство X^* состоит из наборов L комплексных мер μ_j :

$$(1.10) \quad L(\mu_1, \dots, \mu_s), \quad \mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}, \quad j = 1, \dots, s,$$

причем функционал L действует на элемент $\mathbf{x}$ по формуле

$$(1.11) \quad L(\mathbf{x}) = \sum_1^s \int_{F_j} x_j(\zeta) d\mu_j.$$

Норма функционала L будет равна

$$(1.12) \quad \|L\| = \sum_1^s \|\mu_j\|,$$

где $\|\mu_j\|$ — полная вариация μ_j . Рассмотрим в X подпространство Y , состоящее из элементов $\mathbf{y}$:

$$(1.13) \quad \mathbf{y} = (y_1(\zeta), \dots, y_s(\zeta)), \quad y_j(\zeta) = \frac{(-1)^{n_j}}{(n_j - 1)!} g^{(n_j - 1)}(\zeta), \quad \zeta \in F_j, \quad \forall g \in A(F).$$

Функционал $L_f(g)$ порождает линейный функционал $L(\mathbf{y})$ над подпространством Y , если мы положим $L(\mathbf{y}) = L_f(g)$, где $g \in A(F)$ — та функция из $A(F)$, которая порождает элемент $\mathbf{y}$ по формулам (1.13). Это определение корректно, так как если точка $\mathbf{y} \in Y$ порождается по формулам (1.13) двумя функциями g_1 и g_2 из $A(F)$, то $g_1 - g_2$ порождает элемент $\mathbf{0}$ и в силу оценки (1.6) мы имеем:

$$L_f(g_1 - g_2) = 0.$$

Кроме того, оценка (1.6) означает ограниченность функционала $L(\mathbf{y})$ на Y , и, следовательно, $L(\mathbf{y})$ можно по теореме Хана–Банаха продолжить до ограниченного линейного функционала на X ; продолженный функционал по-прежнему обозначаем L . Согласно сказанному выше об устройстве X^* функционал L представляется набором мер $(\mu_1, \dots, \mu_s)$, $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}$, $j = 1, \dots, s$. Тогда для $\mathbf{y} \in Y$:

$$(1.14) \quad L(\mathbf{y}) = L_f(g) = \sum_1^s \frac{(-1)^{n_j}}{(n_j - 1)!} \int_{F_j} g^{(n_j - 1)}(\zeta) d\mu_j.$$

Возьмем произвольную точку $z_0 \in G$, и пусть V — такая окрестность F , что z_0 лежит вне ее, а ∂V состоит из конечного числа спрямляемых контуров. Для $g(z) = (z - z_0)^{-1} \in A(F)$ из (1.5) по формуле Коши получаем:

$$(1.15) \quad L_f((z - z_0)^{-1}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} \frac{f(z) dz}{z - z_0} = f(z_0).$$

А из (1.14) следует, что

$$(1.16) \quad L_f((z - z_0)^{-1}) = \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - z_0)^{-n_j} d\mu_j.$$

Сопоставление (1.15) и (1.16) показывает, что для $f(z)$ имеет место (1.4): $f(z) \in \Gamma_{\Pi}$.

Наше утверждение можно было сформулировать и следующим образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1'. Для того чтобы аналитическая в G функция $f(z)$, $f(\infty) = 0$, входила в класс Γ_{Π} , необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $M > 0$ такая, что для всех $g \in A(F)$ выполнялось неравенство:

$$(1.17) \quad |L_f(g)| \leq M \max_{1 \leq j \leq s} [\|\operatorname{Re} g^{(n_j-1)}\|_j, \|\operatorname{Im} g^{(n_j-1)}\|_j].$$

В специальном случае, когда конфигурация $\Pi = \Pi(F, 1)$, $F = \mathbb{C} \setminus G$, класс Γ_{Π} есть класс функций, представимых в G потенциалами Коши (1.1), и предложение 1.1 дает критерий В. П. Хавина [27; теорема 1] (см. также книгу [22; теорема 3.5]).

В оценках (1.6) и (1.17) можно, как легко видеть, вместо L_f использовать вещественную часть этого функционала: вещественный линейный функционал $\tilde{L}_f$ над $A(F)$:

$$(1.18) \quad \tilde{L}_f(g) = \operatorname{Re} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial V} g(z) f(z) dz \right].$$

Введем еще два класса аналитических в области G (1.3) функций

$$(1.19) \quad \begin{aligned} \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}} : f(z) \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}, \quad & \text{если } f(z) \in \Gamma_{\Pi} \text{ и } \mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^{\mathbb{R}}, \quad j = 1, \dots, s, \\ \Gamma_{\Pi}^{+} : f(z) \in \Gamma_{\Pi}^{+}, \quad & \text{если } f(z) \in \Gamma_{\Pi} \text{ и } \mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^{+}, \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Использование $\tilde{L}_f$ вместо L_f дает возможность сходным образом формулировать соответствующие критерии для включения $f(z)$ в класс $\Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}$ или Γ_{Π}^{+} .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2. Для того чтобы аналитическая в области G функция $f(z)$, $f(\infty) = 0$, входила в класс $\Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала константа $M > 0$ такая, что

$$(1.20) \quad |\tilde{L}_f(g)| \leq M \max_{1 \leq j \leq s} \|\operatorname{Re} g^{(n_j-1)}\|_j.$$

Доказательство как и в предложении 1.1: надо вместо пространства X (1.8) рассмотреть пространство $\tilde{X}$:

$$(1.21) \quad \tilde{X} = C^{\mathbb{R}}(F_1) \times \dots \times C^{\mathbb{R}}(F_s).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3. Для того чтобы аналитическая в области G функция $f(z)$, $f(\infty) = 0$, входила в класс Γ_{Π}^{+} , необходимо и достаточно, чтобы функционал $\tilde{L}_f(g)$ принимал неотрицательные значения для тех $g \in A(F)$, для которых

$$(1.22) \quad (-1)^{n_j} \operatorname{Re} g^{(n_j-1)}(\zeta) \geq 0, \quad \zeta \in F_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимость сразу вытекает из (1.7). Докажем достаточность. В пространстве $\tilde{X}$ из (1.21) рассмотрим конус K , состоящий из элементов $\mathbf{x} = (x_1(\zeta), \dots, x_s(\zeta))$, у которых все функции-координаты неотрицательны: $x_j(\zeta) \geq 0$, $\zeta \in F_j$, $j = 1, \dots, s$. (Напомним, что множество K в линейном пространстве называется конусом, если из $\mathbf{x}_1 \in K$ и $\mathbf{x}_2 \in K$ следует, что $\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 \in K \forall \lambda_i \geq 0$, $i = 1, 2$, и из $\mathbf{x} \in K$ и $-\mathbf{x} \in K$ вытекает, что $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.) Линейные функционалы L (1.10), положительные на K , состоят из неотрицательных мер μ_j , $j = 1, \dots, s$. В пространстве $\tilde{X}$ (1.21) рассматривается подпространство $\tilde{Y}$, состоящее из элементов $\mathbf{y}$:

$$(1.23) \quad \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_s), \quad y_j(\zeta) = \frac{(-1)^{n_j}}{(n_j - 1)!} \operatorname{Re} g^{(n_j-1)}(\zeta), \\ \zeta \in F_j, \quad j = 1, \dots, s, \quad g \in A(F).$$

Линейный функционал $L(\mathbf{y}) = \tilde{L}_f(g)$, где g порождает $\mathbf{y}$ по формулам (1.23), положителен на $K \cap \tilde{Y}$ по условию. Чтобы, основываясь на теореме М. Г. Крейна (см., например, [7; с. 63]), расширить функционал L до положительного на K линейного функционала из $\tilde{X}^*$, который мы обозначим той же буквой L , достаточно убедиться, что $K \cap \tilde{Y}$ содержит внутреннюю точку K . Наличие такой точки устанавливается ниже – в лемме 1.4. Пусть расширение L произошло. Расширенному функционалу L отвечает набор $(\mu_1, \dots, \mu_s)$, $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^+$ (ср. (1.10)). Рассуждая, как при выводе (1.15) и (1.16), мы получим теперь

$$(1.24) \quad \operatorname{Re} f(z) \equiv \operatorname{Re} \sum_1^s \int_{F_j} \frac{d\mu_j}{(\zeta - z)^{n_j}}.$$

Учитывая, что $f(\infty) = 0$, знак Re можно снять, и предложение 1.3 доказано.

Заметим, что внутренними для рассмотренного в доказательстве конуса K будут те точки $\mathbf{x} = (x_1(\zeta), \dots, x_s(\zeta))$, у которых все $x_j(\zeta) > 0$ строго положительны на F_j , $j = 1, \dots, s$.

ЛЕММА 1.4. Пусть $N \geq 1$ – нечетное число. Существуют функции $g(z) \in A(F)$ такие, что

$$(1.25) \quad (-1)^{k+1} \operatorname{Re} g^k(\zeta) > 0, \quad \zeta \in F, \quad k = 0, \dots, N-1$$

(как обычно, $g^{(0)}(\zeta) \equiv g(\zeta)$).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем комплексное число a так, чтобы у разности

$$\zeta - a = \alpha(\zeta) + i\beta(\zeta), \quad \zeta \in F,$$

вещественная часть $\alpha(\zeta)$ принимала “очень большие” по абсолютной величине отрицательные значения на F , а мнимая часть $\beta(\zeta)$ в сравнении с $\alpha(\zeta)$ была “небольшой”. Для этого достаточно взять a “далеко” вправо от F , а $\operatorname{Im} a$, например, в пределах $\inf_{\zeta \in F} \operatorname{Im} \zeta \leq \operatorname{Im} a \leq \sup_{\zeta \in F} \operatorname{Im} \zeta$. Тогда для $k = 1, \dots, N$

$$(1.26) \quad (\zeta - a)^k = (\alpha(\zeta) + i\beta(\zeta))^k \\ = \alpha(\zeta)^k + iC_k^1 \alpha(\zeta)^{k-1} \beta(\zeta) - C_k^2 \alpha(\zeta)^{k-2} \beta(\zeta)^2 + \dots + i^k \beta(\zeta)^k.$$

При достаточно далеком от F положении a знак $\operatorname{Re}(\zeta - a)^k$, как усматривается из (1.26), совпадает со знаком $\alpha(\zeta)^k$. Действительно, отделяя в (1.26) вещественную часть, мы можем оценить модуль суммы всех членов, начиная со второго, в выражении для $\operatorname{Re}(\zeta - a)^k$, $k \geq 2$, величиной

$$M(|\alpha(\zeta)|^{k-2} + |\alpha(\zeta)|^{k-4} + \dots + 1) \leq M_1 |\alpha(\zeta)|^{k-2} < |\alpha(\zeta)|^k,$$

где M и M_1 — достаточно большие числа, которые мы можем выбрать одинаковыми для всех k . Возьмем функцию $g(z) = (z - a)^N$. При $k = 0, 1, \dots, N-1$ знак $\operatorname{Re} g^{(k)}(\zeta)$ совпадает со знаком $\alpha(\zeta)^{N-k}$, а этот последний — со знаком $(-1)^{k+1}$. Таким образом, $(-1)^{k+1} \operatorname{Re}[g(\zeta)^{(k)}] > 0$ на F . Для применения в предложении 1.3 надо взять $N > n_s$ — самого большого из чисел конфигурации.

В случае, когда конфигурация $\Pi = \Pi(F, 1)$, предложения 1.2 и 1.3 дают соответственно критерии представления аналитической функции $f(z)$ потенциалом Коши с вещественной или положительной мерой.

Пусть даны три конечных набора натуральных чисел $\{n_1, \dots, n_s\}$, $\{m_1, \dots, m_r\}$, $\{l_1, \dots, l_t\}$ (может быть, пересекающихся) и задан набор компактов $F_1, \dots, F_s$; $F_{s+1}, \dots, F_{s+r}$; $F_{s+r+1}, \dots, F_{s+r+t}$. Образует конфигурации:

$$\Pi_1 = \Pi(F_1, n_1; \dots; F_s, n_s),$$

$$\Pi_2 = \Pi(F_{s+1}, m_1; \dots; F_{s+r}, m_r),$$

$$\Pi_3 = \Pi(F_{s+r+1}, l_1; \dots; F_{s+r+t}, l_t),$$

и предположим, что ни одна из пар “компакт-число” не повторяется ни в каких двух из этих трех конфигураций. Положим также

$$F^1 = \bigcup_1^s F_j, \quad F^2 = \bigcup_{s+1}^{s+r} F_j, \quad F^3 = \bigcup_{s+r+1}^{s+r+t} F_j, \quad F^0 = \bigcup_1^3 F^i;$$

$$G^i = (\overline{\mathbb{C}} \setminus F^i)_\infty, \quad i = 1, 2, 3, \quad G = (\overline{\mathbb{C}} \setminus F^0)_\infty.$$

При этих условиях имеет место

ТЕОРЕМА 1.5. *Для того чтобы аналитическая в области G функция $f(z)$, $f(\infty) = 0$, представлялась суммой Голубева:*

$$f(z) = \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - z)^{-n_j} d\mu_j + \sum_1^r \int_{F_{s+j}} (\zeta - z)^{-m_j} d\nu_j + \sum_1^t \int_{F_{s+r+j}} (\zeta - z)^{-l_j} d\lambda_j,$$

где

$\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}$, $j = 1, \dots, s$; $\nu_j \in \mathfrak{M}_{F_{s+j}}^{\mathbb{R}}$, $j = 1, \dots, r$; $\lambda_j \in \mathfrak{M}_{F_{s+r+j}}^+$, $j = 1, \dots, t$;
необходимо и достаточно, чтобы

$$f(z) = f_1(z) + f_2(z) + f_3(z)$$

с функциями $f_i(z)$, аналитичными в G^i , $f_i(\infty) = 0$, $i = 1, 2, 3$, и для линейных функционалов $\tilde{L}_{f_i}$, определяемых этими функциями (подобно (1.18)), выполнялись требования:

для $\tilde{L}_{f_1}$ — из предложения 1.1' для конфигурации Π_1 ,

для $\tilde{L}_{f_2}$ — из предложения 1.2 для конфигурации Π_2 ,

для $\tilde{L}_{f_3}$ — из предложения 1.3 для конфигурации Π_3 .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.6. а) В. П. Хавин [40; теорема 5] первым рассмотрел общий критерий представления аналитической функции суммами Голубева следующего вида:

$$f(z) = \sum_1^s \int_F (\zeta - z)^{-j} \alpha_j(\zeta) d\mu,$$

где $\mu \geq 0$ – заданная на компакте F мера, а $\alpha_j(\zeta)$ – комплексные функции из пространства $L^2(\mu)$. Естественно, что и здесь все сводится к непрерывности функционала $L_f(g)$ относительно норм производных от g , но теперь в метрике $L^2(\mu)$. В специальном случае, когда F – окружность или отрезок прямой, вопрос о представлении аналитической функции суммами, которые мы называли суммами Голубева, рассматривался Г. Коте [55] еще ранее. Полученный в [55] критерий совсем иного рода, чем предложение 1.1. Он несравненно более просто проверяем, но для него существенен специальный вид F . В случае общей конфигурации Π можно рассмотреть также критерии для представления суммами вида

$$f(z) = \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - z)^{-n_j} \alpha_j(\zeta) d\mu_j,$$

где $\mu_j \geq 0$ – заданные на F_j меры, а функции $\alpha_j(\zeta) \in L^{p_j}(\mu_j)$ ($L^{p_j}(\mu_j)$ – пространство Лебега по мере μ_j на F_j , $p_j \geq 1$).

б) Для представления аналитической функции $f(z)$ потенциалом Коши с мерой $\mu \in \mathfrak{M}_F$ известна другая форма критерия представимости. Для специального случая, когда F – окружность, она была установлена Г. Ц. Тумаркиным [56], а в двойственной формулировке В. П. Хавиным [27; теорема 3]. В работах [45], [57], [58], [36] дано развитие этой формы критерия для произвольного F . Эта формулировка напоминает дальше в §3 при изложении предложения 3.8. Мне не удалось найти критерия родственной формы для представления суммами Голубева и даже потенциалами Коши с мерами из $\mathfrak{M}_F^{\mathbb{R}}$ или $\mathfrak{M}_F^+$. Поэтому уместно поставить вопрос: как могут выглядеть аналоги критерия Тумаркина–Хавина в случае потенциалов Коши с вещественными или положительными мерами и сумм Голубева различной структуры?

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7. Будем говорить, что конфигурация Π (1.2) является e -конфигурацией (конфигурация Π обладает свойством e ; запись: $\Pi \in e$), если представление всякой функции $f(z) \in \Gamma_\Pi$ в виде (1.4) единственно.

Таким образом, $\Pi \in e$, если из тождества

$$(1.27) \quad \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - z)^{-n_j} d\mu_j \equiv 0, \quad z \in G,$$

следует, что $\mu_1 \equiv 0, \dots, \mu_s \equiv 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.8. Следующие утверждения равносильны.

1. $\Pi \in e$.

2. Пусть $\{a_i\}$ – произвольная последовательность точек в G , имеющая внутри G предельные точки. Для любого набора функций $\varphi_j(\zeta) \in C(F_j)$, $j = 1, \dots, s$, найдутся последовательности дробей

$$(1.28) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^k \lambda_i^k (\zeta - a_i)^{-n_1} &= R_k^1, \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i^k (\zeta - a_i)^{-n_2} &= R_k^2, \\ &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^k \lambda_i^k (\zeta - a_i)^{-n_s} &= R_k^s \end{aligned}$$

с одинаковыми коэффициентами λ_i^k , которые при $k \rightarrow \infty$ равномерно сходятся:

$$R_k^1 \rightarrow \varphi_1 \quad \text{на } F_1, \quad R_k^2 \rightarrow \varphi_2 \quad \text{на } F_2, \quad \dots, \quad R_k^s \rightarrow \varphi_s \quad \text{на } F_s.$$

3. Пусть $\{a_i\}$ такая же, как в п. 2. Для любого набора функций $\varphi_j(\zeta) \in C(F_j)$, $j = 1, \dots, s$, найдется последовательность дробей

$$(1.29) \quad R_k(\zeta) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^k (\zeta - a_i)^{-n_1},$$

которая при $k \rightarrow \infty$ равномерно на F_1 сходится к $\varphi_1(\zeta)$, а ее производные равномерно сходятся:

$$(1.30) \quad R_k^{(n_2-n_1)} \rightarrow \varphi_2(\zeta) \quad \text{на } F_2, \quad \dots, \quad R_k^{(n_s-n_1)} \rightarrow \varphi_s(\zeta) \quad \text{на } F_s.$$

4. Для любого набора непрерывных функций $\varphi_j(\zeta) \in C(F_j)$, $j = 1, \dots, s$, существует последовательность многочленов $\{P_k(\zeta)\}$ такая, что при $k \rightarrow \infty$ ее производные равномерно сходятся:

$$(1.31) \quad P_k^{(n_1-1)} \rightarrow \varphi_1 \quad \text{на } F_1, \quad \dots, \quad P_k^{(n_s-1)} \rightarrow \varphi_s \quad \text{на } F_s.$$

5. Пусть конфигурация $\Pi \in e$ имеет вид (1.2). При любом натуральном h конфигурация

$$(1.32) \quad \Pi' = \{F_1, n_1 + h; F_2, n_2 + h; \dots; F_s, n_s + h\}$$

также обладает e -свойством. При натуральном h , $1 \leq h \leq n_1 - 1$, также и конфигурация

$$(1.33) \quad \Pi'' = \{F_1, n_1 - h; F_2, n_2 - h; \dots; F_s, n_s - h\}$$

обладает e -свойством.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $\{a_i\} \subset G$ имеет в G предельную точку, то (1.27) равносильно соотношениям

$$(1.34) \quad \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - a_i)^{-n_j} d\mu_j = 0, \quad i = 1, \dots$$

Рассмотрим снова пространство X (1.8) и в нем последовательность элементов

$$(1.35) \quad \mathbf{x}^i = ((\zeta - a_i)^{-n_1}, \dots, (\zeta - a_i)^{-n_s}), \quad i = 1, 2, \dots$$

Условие (1.34) означает, что произвольный линейный функционал L (1.10) над X обращается на элементах $\mathbf{x}^i$ в нуль. Но тогда в силу условия II $\in e$ он тождественный нуль, и система элементов $\{\mathbf{x}^i\}$ полна в X , что совпадает с утверждением 2. Аналогично ведется рассуждение и в обратную сторону. Чтобы доказать утверждение 3, надо взять систему элементов

$$(1.36) \quad \mathbf{y}^i = \{[(\zeta - a_i)^{-1}]^{(n_1-1)}, \dots, [(\zeta - a_i)^{-1}]^{(n_s-1)}\}.$$

Легко видеть, что условие (1.34) означает и обращение линейного функционала L (1.10) в нуль на элементах $\mathbf{y}^i$ (поскольку в равенствах (1.34) можно члены суммы умножить на постоянные множители), и получается, что система $\{\mathbf{y}^i\}$ полна в X (утверждение 3). Сравнивая коэффициенты при разложении в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ степеней $(\zeta - z)^{-n_j}$, мы приходим к заключению, что (1.27) эквивалентно тому, что

$$(1.37) \quad \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta^i)^{(n_j-1)} d\mu_j = 0, \quad i = 1, \dots$$

Поэтому векторы

$$(1.38) \quad \mathbf{t}^i = \{(\zeta^i)^{(n_1-1)}, \dots, (\zeta^i)^{(n_s-1)}\}, \quad i = 1, \dots,$$

также образуют полную систему в X — как и объявлено в утверждении 4. (Можно было бы рассуждать и иначе: аппроксимируем построенные в утверждении 3 рациональные функции полиномами и используем свойства сходящихся последовательностей аналитических функций.) Утверждение 5 получается, если мы продифференцируем или проинтегрируем тождество (1.27) h раз.

Примеры e -множеств и контрпримеры.

ЛЕММА 1.9. Пусть F — всюду разрывный компакт, а ряд Голубева

$$(1.39) \quad f(z) \sum_1^\infty \int_F (\zeta - z)^{-j} d\mu_j, \quad \mu_j \in \mathfrak{M}_F,$$

равномерно сходится к нулю в области $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$.

Тогда

$$(1.40) \quad \mu_1 \equiv 0, \dots, \mu_j \equiv 0, \dots$$

(Факт, сформулированный в лемме, неоднократно использован разными авторами. См., в частности, [43], [57].)

Доказательство приводится ради полноты изложения. Поскольку F всюду разрывно, то при любом $\varepsilon > 0$ его можно покрыть открытыми многоугольниками $\Delta_1, \dots, \Delta_r$, $r = r(\varepsilon)$, такими, что их замыкания не пересекаются, а диаметры $< \varepsilon$. Отсюда следует, что подобные многоугольники образуют базис открытых множеств в F . (Открытость множества понимается в индуцированной из $\mathbb{C}$ топологии F .) Поэтому чтобы доказать, что какая-то мера $\mu \equiv 0$ на F , достаточно доказать, что $\mu(\Delta) = 0$ для любого такого многоугольника Δ . Взяв такой многоугольник Δ и интегрируя вдоль его границы $\partial\Delta$, получаем:

$$0 = \int_{\partial\Delta} f(z) dz = -2\pi i \mu_1(\Delta).$$

Поэтому $\mu_1 \equiv 0$ и

$$(1.41) \quad f(z) = \sum_2^\infty \int_F (\zeta - z)^{-j} d\mu_j \equiv 0.$$

Равномерно внутри G сходится и ряд

$$f_1(z) = \sum_2^\infty \frac{1}{(j-1)} \int_F \frac{d\mu_j}{(\zeta - z)^{j-1}},$$

дающий первообразную к $f(z)$, и поэтому $f_1(z) \equiv 0$. Теперь точно так же, как в случае μ_1 , доказываем, что $\mu_2 \equiv 0$, и т. д.

Таким образом, на основании этой леммы имеем:

ПРИМЕР 1.10. Всякая конфигурация (1.2), в которой $F_1, \dots, F_s$ – всюду разрывные компакты, является e -конфигурацией. (Сумма всюду разрывных компактов F_j есть всюду разрывный компакт F .)

ПРИМЕР 1.11. Если F – нигде не плотный компакт со связным дополнением, то конфигурация $\Pi = \Pi(F, 1)$ является e -конфигурацией. На F действует теорема М. А. Лаврентьева [60], [61] о возможности любую непрерывную функцию равномерно аппроксимировать полиномами. Согласно утверждению 4 предложения 1.8 $\Pi \in e$.

ПРИМЕР 1.12. F – нигде не плотное множество со связным дополнением, $F_2 = F_3 = \dots = F_s$ – всюду разрывное множество, $F_2 \subset F_1$. Тогда $\Pi = \Pi(F_1, 1; F_2, 2; \dots; F_s, s)$ – e -конфигурация. Это следует из утверждения 4 предложения 1.8. Утверждение 4 в этой ситуации – теорема Е. Бишоп [62] об одновременной аппроксимации полиномами и их производными.

Заметим, что если F имеет внутренние точки, то заведомо $\Pi \notin e$, – это сразу следует из утверждения 2 (или утверждения 3, или утверждения 4) предложения 1.8. Поэтому при описании примеров конфигураций $\Pi \notin e$ интересны конфигурации с нигде не плотными множествами.

ПРИМЕР 1.13 ($\Pi \notin e$). Пусть F — нигде не плотный континуум со связным дополнением, имеющий конечную длину по Пенлеве. Тогда конфигурация

$$\Pi = \Pi(F, 1; F, 2) \notin e.$$

Пусть $f(z)$ — функция Альфорса для $G = \overline{\mathbb{C}} \setminus F$. Известно (см., например, [22; теорема 3.1]), что в этом случае $f(z)$ представляется потенциалом Коши:

$$(1.42) \quad f(z) = \int_F \frac{d\mu}{(\zeta - z)}.$$

Покажем, что $f'(z)$ также представляется потенциалом Коши.

Пусть L_n — прообраз окружности $|w| = 1 - 1/n$ при отображении $w = f(z)$ области G на единичный круг. Тогда

$$(1.43) \quad \int_{L_n} |f'(z)| |dz| = 2\pi \left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq 2\pi.$$

Ограниченность интегралов (1.43) и дает возможность [22; теорема 3.2] представить $f'(z)$ в виде потенциала Коши:

$$(1.44) \quad f'(z) = \int_F \frac{d\nu}{(\zeta - z)}.$$

С другой стороны, из (1.42)

$$f'(z) = \int_F \frac{d\mu}{(\zeta - z)^2}.$$

Итак,

$$\int_F \frac{d\nu}{\zeta - z} - \int_F \frac{d\mu}{(\zeta - z)^2} \equiv 0,$$

хотя $\nu \not\equiv 0$ и $\mu \not\equiv 0$.

ПРИМЕР 1.14 ($\Pi \notin e$, усиление примера 1.13). Введем следующую характеристику ограниченной односвязной области D . Пусть z_0 — точка внутри D . Положим

$$\alpha(z_0, D) = \sup_{z \in D} \inf l(z_0, z),$$

где $l(z_0, z)$ — длина линии, идущей внутри D и соединяющей точки z_0 и z , а $\inf$ берется по всем таким линиям. Положим, далее,

$$\alpha(D) = \inf_{z_0 \in D} \alpha(z_0, D).$$

В [57; теорема 4] доказано, что если при любом $\varepsilon > 0$ компакт F можно покрыть непесекающимися односвязными областями $\Delta_1, \dots, \Delta_{r(\varepsilon)}$, лежащими в ε -окрестности F и такими, что

$$\sum_1^{r(\varepsilon)} \alpha(\Delta_i) \leq M,$$

где M не зависит от ε , то функции Альфорса $f(z)$ для области $G = (\mathbb{C} \setminus F)_\infty$ представляется потенциалом Коши с мерой на F . Нетрудно привести примеры множеств бесконечной длины по Пенлеве, для которых, тем не менее, условие этой теоремы выполняется. В частности, такими будут так называемые “снежинки Коха” ([64], [65], [38], [39]), хотя каждая их дуга неспрямляема. Если F — нигде не плотный континуум со связным дополнением, удовлетворяющий условию этой теоремы (теперь $r(\varepsilon) = 1$ при любом $\varepsilon > 0$), то, представляя $f(z)$ и $f'(z)$ потенциалами Коши, снова приходим к заключению, что $\Pi(F, 1; F, 2) \notin e$.

Для класса $\Gamma_\Pi^\mathbb{R}$ можно ввести аналог e -конфигурации: $e^\mathbb{R}$ -конфигурацию.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.15. Конфигурация $\Pi \in e^\mathbb{R}$, если из тождества (1.27), где все $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^\mathbb{R}$, следует, что $\mu_1 \equiv 0, \dots, \mu_s \equiv 0$.

Ясно, что $\Pi \in e \Rightarrow \Pi \in e^\mathbb{R}$. Для $\Pi \in e^\mathbb{R}$ имеют место аналоги аппроксимационных утверждений предложения 1.8. Например, теперь в пространстве X (1.21) будет иметь место полнота объединенной системы векторов

$$(1.45) \quad \begin{aligned} \mathbf{x}^i &= \{\operatorname{Re}(\zeta - a_i)^{-n_1}, \dots, \operatorname{Re}(\zeta - a_i)^{-n_s}\}, \quad i = 1, 2, \dots, \\ \mathbf{y}^i &= \{\operatorname{Im}(\zeta - a_i)^{-n_1}, \dots, \operatorname{Im}(\zeta - a_i)^{-n_s}\}, \quad i = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Вводить аналогичное определение для Γ_Π^+ не имеет смысла, так как действует следующее простое предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.16. Пусть Π — произвольная конфигурация. Если для мер $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^+$, $j = 1, \dots, s$, имеет место тождество (1.27), то $\mu_1 \equiv \mu_2 \equiv \dots \equiv \mu_s \equiv 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через $f(z) \equiv 0$ левую часть (1.27). Для функционала (1.18) получаем

$$0 = \tilde{L}_f(g) = \sum_1^s \int_{F_j} \frac{(-1)^{n_j} \operatorname{Re} g^{(n_j-1)}(\zeta)}{(n_j-1)!} d\mu_j.$$

Если возьмем функцию g , построенную в лемме 1.4, то приходим к тому, что все меры $\mu_j \equiv 0$.

В то же время, для того чтобы для всякой функции $f(z) \in \Gamma_\Pi^+$ гарантировать единственность представления (1.4) с мерами $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^+$, $j = 1, \dots, s$, приходится требовать, чтобы $\Pi \in e^\mathbb{R}$.

Было бы интересно найти какие-нибудь геометрические, топологические или какие-то иные характеристики для конфигураций Π различной структуры, чтобы $\Pi \in e$ или $\Pi \in e^\mathbb{R}$.

§ 2. Общая схема для экстремальных задач и аппроксимационных процессов, возникающих при определении аналогов аналитической емкости

Пусть X — линейное пространство. Функционал $r: X \rightarrow \mathbb{R}^1$ — выпуклый функционал в X , если

$$\begin{aligned} r(x_1 + x_2) &\leq r(x_1) + r(x_2), \quad r(\lambda x) = \lambda r(x) \\ \forall \lambda &\geq 0, \quad \forall x_1 \in X, \quad \forall x_2 \in X, \quad \forall x \in X. \end{aligned}$$

Если $r(x) \geq 0$ и последнее требование выполняется в усиленной форме:

$$r(\lambda x) = |\lambda| r(x)$$

для всех λ из основного числового поля, над которым действует линейная структура X , то $r(x)$ – преднорма.

Если $M \geq 0$ – некоторое число, то через $R(r, M)$ в вещественном линейном пространстве X будем обозначать совокупность всех линейных функционалов $l(x)$ над X , мажорируемых $Mr(x)$:

$$(2.1) \quad R(r, M) = \{l \in X' : l(x) \leq Mr(x), \forall x \in X\}.$$

В случае, когда $r(x)$ – норма в X , условие (2.1) означает просто, что $R(r, M) = \{l \in X^*, \|l\| \leq M\}$.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть U – линейное подпространство вещественного линейного пространства X , $r(x) \geq 0$ – неотрицательный выпуклый функционал в X . Тогда для любого $\omega \in X$

$$(2.2) \quad \inf_{u \in U} r(\omega - u) = \max_{\substack{l \in R(r, 1) \\ l(u) = 0 \quad \forall u \in U}} l(\omega).$$

(Мы пишем $\max$ ($\min$) вместо $\sup$ ($\inf$), если есть уверенность, что экстремум достигается.)

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Теорема 2.1 хорошо известна в современной теории аппроксимации в случае, когда r – норма в X . (В этом случае можно считать X не только вещественным, но и комплексным пространством, поставив в правой части (2.2) $|l(\omega)|$ вместо $l(\omega)$.) Ее доказательство для этого случая можно найти, например, в книгах [66], [67].

Впервые для нормированного X она была доказана С.М. Никольским [68], рассматривавшим случай конечномерного U , а в другой записи еще раньше М.Г. Крейн-ном [69]. В дальнейшем А.Л. Гаркави [70] обобщил этот результат на случай, когда U – выпуклое множество в нормированном пространстве. Систематическое изложение на этой основе теории аппроксимации элементами подпространств дано в книге [66], а также [71], [72].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2.1. Доказательство не отличается от того случая, когда $r(x)$ – норма в X . Мы воспроизводим это рассуждение только для удобства чтения работы и в целях последовательного ее изложения.

Прежде всего ясно, что правая часть в (2.2) не превосходит левой. Если в (2.2) нижняя грань равна нулю, то (2.2) очевидно, так как $l \equiv 0 \in R(r, 1)$. Разберем случай, когда

$$\alpha = \inf_{u \in U} r(\omega - u) > 0.$$

Рассмотрим в X подпространство

$$(2.3) \quad E = \{\beta\omega + u\} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^1, \quad \forall u \in U.$$

Определим на E линейный функционал l^* , положив

$$(2.4) \quad l^*(\omega) = \alpha, \quad l^*(u) = 0 \quad \forall u \in U.$$

Для элемента $\beta\omega + u$ при $\beta > 0$ в силу определения α имеем:

$$l^*(\beta\omega + u) = \beta\alpha \leq \beta r \left(\omega - \left(\frac{-u}{\beta} \right) \right) = r(\beta\omega + u).$$

При $\beta < 0$ из (2.4) получаем, что

$$l^*(\beta\omega + u) = \beta\alpha < 0 \leq r(\beta\omega + u).$$

Таким образом, на E линейный функционал l^* мажорируется выпуклым функционалом r . Продолжим l^* с сохранением этой мажорации на все X — теорема Хана–Банаха. Тогда $l^* \in R(r, 1)$, $l^*(u) = 0 \quad \forall u \in U$, $l^*(\omega) = \alpha$, что и доказывает теорему.

Пусть на подпространстве U линейного вещественного пространства X задан выпуклый функционал $p(u) \geq 0$. Введем для линейных функционалов на U множество $R(p, M)$, аналогичное $R(r, M)$:

$$(2.5) \quad R(p, M) = \{l \in U' : l(u) \leq Mp(u) \quad \forall u \in U\},$$

и для любого $\omega \in X$ рассмотрим усложненную аппроксимационную задачу:

$$(2.6) \quad \alpha = \inf_{u \in U} [r(\omega - u) + p(-u)].$$

Теорема двойственности для задачи (2.6) приобретает следующий вид.

ТЕОРЕМА 2.3.

$$(2.7) \quad \alpha = \max [l(\omega) : l \in R(r, 1), -l \in R(p, 1)].$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим линейное пространство $Y = X \times U$, состоящее из векторов $y = (x, u) \quad \forall x \in X, \forall u \in U$. Введем в Y выпуклый функционал

$$(2.8) \quad P(y) = P((x, u)) \stackrel{\text{def}}{=} r(x) + p(u).$$

Линейный функционал L над Y есть пара (l, Λ) , где $l \in X'$, $\Lambda \in U'$, действующая на элемент $y \in Y$ по правилу:

$$(2.9) \quad L(y) = l(x) + \Lambda(u).$$

Определим класс $R(P, 1)$ линейных функционалов $L(y) \in Y'$ подобно тому, как определялись классы $R(p, 1)$ и $R(r, 1)$:

$$R(P, 1) = \{L \in Y' : L(y) \leq P(y)\}.$$

Таким образом,

$$(2.10) \quad L = (l, \Lambda) \in R(P, 1) \Leftrightarrow l \in R(r, 1), \quad \Lambda \in R(p, 1).$$

Рассмотрим теперь в Y аппроксимацию относительно функционала P элемента $\Omega = (\omega, \mathbf{O})$ элементами $\tilde{u} = (u, u)$, $u \in U$, составляющими в Y линейное подпространство E . Согласно теореме 2.1 получаем

$$\begin{aligned} \inf_{\tilde{u} \in E} P(\Omega - \tilde{u}) &= \inf_{u \in U} [r(\omega - u) + p(-u)] = \alpha \\ &= \max [L(\Omega) : L \in R(P, 1), L(\tilde{u}) = 0, \tilde{u} \in E] \\ &= \max [l(\omega) : l \in R(r, 1), \Lambda \in R(p, 1), l(u) + \Lambda(u) = 0] \\ &= \max [l(\omega) : l \in R(r, 1), -l \in R(p, 1)]. \end{aligned}$$

Теорема 2.3 обобщает теорему 1 работы автора [50], где r и p предполагались преднормами, непрерывными соответственно в пространстве X (локально-выпуклом) и конечномерном подпространстве U .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.4. Когда r и p — преднормы (в частности, когда r — норма в X), теорема верна и для комплексного пространства X , если в (2.7) поставить $|l(\omega)|$ и соответственным образом трактовать множества $R(r, 1)$ и $R(p, 1)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.5. В условиях предыдущей теоремы для любого $\omega \in X$ положим

$$(2.11) \quad \tilde{p}(\omega) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} p(-u_k),$$

где $\inf$ берется по всем последовательностям $\{u_k\} \subset U$, для которых

$$(2.12) \quad r(\omega - u_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Если последовательностей $\{u_k\} \subset U$, для которых выполняется (2.12), вообще нет, то положим $\tilde{p}(\omega) = \infty$. Конечно, может оказаться, что $\tilde{p}(\omega) = \infty$ и тогда, когда последовательности со свойствами (2.12) существуют.

Введем дальнейшие обозначения:

$$(2.13) \quad \begin{cases} R(r) = \bigcup_{M \geq 0} R(r, M), \\ R : l \in R \Leftrightarrow l \in R(r), \quad -l \in R(p, 1). \end{cases}$$

ТЕОРЕМА 2.6.

$$(2.14) \quad \tilde{p}(\omega) = \sup_{l \in R} l(\omega).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно теореме 2.3 для произвольного $M > 0$ имеем:

$$(2.15) \quad \inf_{u \in U} [Mr(\omega - u) + p(-u)] = \sup_{l \in R(r, M), -l \in R(p, 1)} l(\omega).$$

Выведем (2.14) из (2.15), считая пока, что $\tilde{p}(\omega) < \infty$.

Пусть $l \in R$. Тогда существует $M > 0$ такая, что $l \in R(r, M)$ и $-l \in R(p, 1)$. Для любого $\varepsilon > 0$ существует $u \in U$, для которого

$$(2.16) \quad r(\omega - u) < \frac{\varepsilon}{M}, \quad p(-u) < \tilde{p}(\omega) + \varepsilon.$$

Для взятого нами $l \in R$ получаем:

$$l(\omega) = l(\omega - u) + (-l(-u)) \leq Mr(\omega - u) + p(-u) < \tilde{p}(\omega) + 2\varepsilon.$$

Таким образом, правая часть в (2.14) не больше левой. Если $\tilde{p}(\omega) = 0$, то (2.14) уже доказано, так как $l \equiv 0 \in R$. Пусть теперь $0 < \tilde{p}(\omega) < \infty$. Допустим, что правая часть в (2.14) строго меньше левой:

$$(2.17) \quad \sup_{l \in R} l(\omega) \leq \tilde{p}(\omega) - \varepsilon_0 = A, \quad \varepsilon_0 > 0.$$

Тогда тем более при любом фиксированном $M > 0$

$$(2.18) \quad \inf_{u \in U} [Mr(\omega - u) + p(-u)] = \sup_{l \in R(r, M), -l \in R(p, 1)} l(\omega) \leq A.$$

Возьмем ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0/2$, а M столь большим, что $AM^{-1} < \varepsilon$. В силу (2.18) существует $u \in U$ такой, что

$$(2.19) \quad r(\omega - u) < \varepsilon, \quad p(-u) \leq A + \varepsilon \leq \tilde{p}(\omega) - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Из (2.19), вспомнив определение $\tilde{p}(\omega)$, получаем:

$$\tilde{p}(\omega) \leq \tilde{p}(\omega) - \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Противоречие. Итак, когда $\tilde{p}(\omega) < \infty$, соотношение (2.14) доказано.

Пусть теперь $\tilde{p}(\omega) = \infty$. Допустим, что

$$(2.20) \quad \sup_{l \in R} l(\omega) = A < \infty.$$

Тогда тем более при любом $M > 0$

$$\inf_{u \in U} [Mr(\omega - u) + p(-u)] = \sup_{l \in R(r, M), -l \in R(p, 1)} l(\omega) \leq A.$$

Пусть $u_M \in U$ — такой элемент, что

$$Mr(\omega - u_M) + p(-u_M) \leq A + 1.$$

Тогда

$$(2.21) \quad r(\omega - u_M) \leq (A + 1)M^{-1}, \quad p(-u_M) \leq A + 1.$$

При $M \rightarrow \infty$ из (2.21) получаем, что

$$r(\omega - u_M) \rightarrow 0, \quad \tilde{p}(-u_M) \leq A + 1,$$

и, следовательно, $\tilde{p}(\omega) \leq A + 1$. Доказательство завершено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.7. Если $\tilde{p}(\omega) < \infty$, то будем говорить, что элемент ω является $(r, O(p))$ -аппроксимируемым подпространством U . Если $\tilde{p}(\omega) = 0$, то скажем, что элемент ω является $(r, o(p))$ -аппроксимируемым подпространством U . Если все элементы X являются $(r, O(p))$ -аппроксимируемыми элементами U , то скажем, что U $(r, O(p))$ плотно в X . Если все элементы X являются $(r, o(p))$ -аппроксимируемыми элементами U , то U назовем $(r, o(p))$ -плотным в X .

Напомним, что если E – какое-то подпространство в линейном пространстве X , то запись $l \in E^\perp$ означает, что линейный функционал l обращается в нуль на всех элементах на E ($E^\perp$ – аннулятор E).

СЛЕДСТВИЕ 2.8. Для того чтобы каждый элемент линейного подпространства $E \subset X$ был $(r, o(p))$ -аппроксимируемым подпространством U , необходимо и достаточно, чтобы

$$(2.22) \quad l \in R \Rightarrow l \in E^\perp.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть каждый элемент $\omega \in E$ будет $(r, o(p))$ -аппроксимируемым подпространством U , т.е. $\tilde{p}(\omega) = 0$. Тогда из (2.14) следует, что $l(\omega) \leq 0 \quad \forall l \in R, \forall \omega \in E$. Таким образом, $l \leq 0$ на E . Но E – линейное подпространство и поэтому $l \equiv 0$ на E , т.е. $l \in E^\perp$. Обратное опять-таки следует из (2.14).

СЛЕДСТВИЕ 2.9. Для того чтобы U было $(r, o(p))$ -плотным в X , необходимо и достаточно, чтобы

$$l \in R \Leftrightarrow l \equiv 0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.10. Пусть X – пространство Банаха, $r \geq 0$ – непрерывный выпуклый функционал в X , E – замкнутое линейное подпространство в X . Для того чтобы каждый элемент $\omega \in E$ был $(r, O(p))$ -аппроксимируемым подпространством U , необходимо и достаточно, чтобы существовало число $N_0 > 0$ такое, что

$$(2.23) \quad \tilde{p}(\omega) \leq N_0 \|\omega\| \quad \forall \omega \in E.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим прежде всего, что $\tilde{p}(\omega)$ – выпуклый функционал на E . Пусть X_N – множество тех элементов $\omega \in X$, для которых $\tilde{p}(\omega) \leq N$. Из непрерывности r следует, что X_N – замкнутое множество (может быть, и пустое). Тогда $E_N = E \cap X_N$ – также замкнутое, причем $E = \bigcup_N E_N$. Из теоремы Бэра следует, что некоторое E_N должно быть всюду плотным в каком-нибудь шаре $S(\omega_0, \rho)$ подпространства E (ω_0 – центр шара, ρ – его радиус) и, следовательно, $E_N \supset S(\omega_0, \rho)$. Поэтому обычными в теории Банаха–Штейнхауса рассуждениями устанавливаем, что

$$E_N \supset S(\omega_0, \rho) \Rightarrow \exists N_0: \tilde{p}(\omega) \leq N_0 \|\omega\| \quad \forall \omega \in E.$$

Мы доказали следствие 2.10 в части необходимости. Достаточность – очевидна.

СЛЕДСТВИЕ 2.11. Пусть X, r, E такие же, как в следствии 2.10. Для того чтобы каждый элемент $\omega \in E$ был $(r, O(p))$ -аппроксимируемым подпространством U , необходимо и достаточно, чтобы существовало $N_0 > 0$ такое, что

$$(2.24) \quad l \in R \Rightarrow \|l\|_E \leq N_0.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для $l \in R$ и $\omega \in E$ согласно следствию 2.10 и (2.14) получаем:

$$\begin{aligned} l(\omega) &\leq \tilde{p}(\omega) \leq N_0 \|\omega\|, \\ l(-\omega) &\leq \tilde{p}(-\omega) \leq N_0 \|-\omega\| = N_0 \|\omega\| \end{aligned}$$

и, следовательно, $\|l\|_E \leq N_0$. Обратное утверждение очевидно опять-таки в силу (2.14).

СЛЕДСТВИЕ 2.12. Пусть X – банахово пространство, r – непрерывный выпуклый функционал в X . Для того чтобы подпространство $U \subset X$ было $(r, O(p))$ -плотным в X , необходимо и достаточно выполнения любого из следующих двух условий:

$$(2.25) \quad \exists N_0 \geq 0: \tilde{p}(\omega) \leq N_0 \|\omega\| \quad \forall \omega \in X,$$

$$(2.26) \quad \exists N_0 \geq 0: l \in R \Rightarrow \|l\| \leq N_0.$$

СЛЕДСТВИЕ 2.13. Пусть X – банахово пространство, а $r(x)$ – норма в X . Следующие условия эквивалентны:

- a) подпространство U $(r, O(p))$ -плотно в X ;
- b) существует $N_0 \geq 0$ такое, что

$$(2.27) \quad l \in R \Leftrightarrow \|l\| \leq N_0;$$

- c) для произвольного $\omega \in X$ в экстремальной задаче, стоящей в правой части (2.14), существует экстремальный элемент.

То, что a) $\Leftrightarrow$ b), следует из предыдущего. Если имеет место b), то в силу слабой (*) компактности экстремум в правой части (2.14) при любом ω достигается. Если же экстремум всегда достигается, то $\tilde{p}(\omega) < \infty$ для всех ω и, значит, имеет место a).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.14. Как будет ясно из последующих параграфов, именно экстремальная задача, стоящая в правой части соотношения (2.14), является абстрактной версией экстремальных задач такого типа, как задача об аналитической емкости. Для случая, когда $r(x)$ – норма в банаховом пространстве X , а $p(u)$ – норма или преднорма в подпространстве U , теорема 2.6 была доказана в [54] и являлась основой для установления новых свойств полных систем в банаховых пространствах. (В случае, когда $r(x)$ и $p(u)$ – преднормы, теорема и ее доказательство верны и для комплексных пространств: надо лишь в (2.14) поставить $|l(\omega)|$ вместо $l(\omega)$). Однако то, что мы установили теорему без предположения симметричности $p(u)$ и, прежде всего, $r(x)$, позволяет применять ее при изучении экстремальных задач для положительных относительно некоторого конуса функционалов. А эти задачи, связанные с весьма своеобразными аппроксимационными процессами, также важны для изучения аналогов и модификаций аналитической емкости.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.15 (дополнение к определению 2.7). В случае, когда функционал $r(x)$ – норма в нормированном пространстве X , мы будем говорить просто об $O(p)$ -аппроксимируемости элемента ω вместо $(r, O(p))$ -аппроксимируемости и точно так же об $o(p)$ -аппроксимируемости, $O(p)$ - или $o(p)$ -плотности подпространства U в X .

Интерпретация для конусов. Пусть K – конус в линейном пространстве X . Напомним, что функционал $l \in X'$ называется положительным (относительно K), если $l(x) \geq 0$ при $x \in K$.

ЛЕММА 2.16. Пусть K – конус в вещественном линейном локально выпуклом пространстве X , содержащий внутреннюю точку x_0 . Положим

$$(2.28) \quad K_0 = K - x_0$$

и пусть $r_0(x)$ – функционал Минковского для K_0 . Функционал $r_0(x)$ – выпуклый непрерывный неотрицательный функционал в X , причем

$$(2.29) \quad r_0(x) = 0, \quad x \in K, \quad r_0(-x_0) = 1.$$

Действительно, для $x \in K$ при любом $t > 0$ $x + tx_0 \in K$ и, следовательно, $x \in K - tx_0 = t(K - x_0)$. По определению функционала Минковского

$$r_0(x) = \inf_{t > 0, x \in tK_0} t = 0.$$

Из аналогичного рассуждения для $-x_0$ получаем, что $r_0(-x_0) = 1$.

Содержание леммы хорошо известно – см., например, [59; §3, гл. 1, п. 10, с. 63–64]. Там же в п. 3 гл. 1, с. 48–50 можно найти все сведения о выпуклом функционале, отвечающем данному выпуклому множеству (функционал Минковского).

Введем еще один выпуклый функционал

$$(2.30) \quad r(x) = r_0(-x).$$

ЛЕММА 2.17. В условиях предыдущей леммы линейный функционал $l(x)$ положителен тогда и только тогда, когда $l \in R(r)$. Линейный функционал $l \in R(r, 1)$ тогда и только тогда, когда l положителен и $l(x_0) \leq 1$.

Любой положительный линейный функционал непрерывен.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $l(x) \geq 0$ на K и $\varepsilon > 0$ произвольно. Для любого x в силу определения $r_0(x)$

$$x/r_0(x) + \varepsilon \in K_0 = K - x_0.$$

Тогда

$$x + (r_0(x) + \varepsilon)x_0 \in K$$

и, следовательно,

$$l(x) + (r_0(x) + \varepsilon)l(x_0) \geq 0.$$

В силу произвольности ε отсюда получаем, что

$$(2.31) \quad \begin{aligned} l(x) &\geq -l(x_0)r_0(x), \\ l(-x) &\geq -l(x_0)r_0(-x) = -l(x_0)r(x), \\ l(x) &\leq l(x_0)r(x). \end{aligned}$$

Последняя оценка означает, что

$$(2.32) \quad l(x) \in R(r, l(x_0)) \subset R(r).$$

Пусть, наоборот, $l \in R(r)$, т.е. $l \in R(r, M)$ с некоторым $M \geq 0$. Это значит, что $l(x) \leq Mr(x)$ с некоторым $M \geq 0$ при всех x . Для $x \in K$ имеем в силу (2.29) $r_0(x) = 0$, и тогда

$$l(x) = -l(-x) \geq -Mr(-x) = -Mr_0(x) = 0,$$

что доказывает первое утверждение леммы, а второе сразу вытекает из (2.31) и того, что $r(x_0) = r_0(-x_0) = 1$. Непрерывность $l(x)$ следует опять-таки из (2.31) и непрерывности $r(x)$.

Если обозначить множество всех положительных линейных функционалов через K^+ , то доказанные сейчас утверждения запишутся так:

$$(2.33) \quad K^+ = R(r), \quad l(x) \in R(r, 1) \Leftrightarrow l \in K^+ \quad \text{и} \quad l(x_0) \leq 1.$$

Пусть в вещественном линейном локально выпуклом пространстве X кроме конуса K , содержащего внутреннюю точку x_0 , задано еще некоторое линейное подпространство U , а на U определен выпуклый неотрицательный функционал p . Рассмотрим одномерное подпространство E , проходящее через x_0 :

$$(2.34) \quad E = \{tx_0\} \quad \forall t \in \mathbb{R}^1,$$

и пусть

$$(2.35) \quad \tilde{U} = E + U.$$

Если $x_0 \notin U$, то определим на $\tilde{U}$ выпуклый функционал, положив

$$(2.36) \quad p_1(\tilde{u}) \stackrel{\text{def}}{=} |t| + p(-u), \quad \text{когда} \quad \tilde{u} = tx_0 + u, \quad u \in U.$$

Если же $x_0 \in U$, то $\tilde{U} = U$, и тогда считаем, что

$$(2.37) \quad p_1(\tilde{u}) = p(-u).$$

ТЕОРЕМА 2.18. *Для любого $\omega \in X$ имеем:*

$$(2.38) \quad \inf p_1(\tilde{u}) = \max[l(\omega) : l \in K^+, l(x_0) \leq 1, -l \in R(p, 1)],$$

где $\inf$ берется по всем $\tilde{u} = tx_0 + u$, $t > 0$, $u \in U$, для которых

$$(2.39) \quad -\omega + \tilde{u} = -\omega + tx_0 + u \in K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сперва $x_0 \notin U$. Правая часть (2.38) согласно (2.33) может быть записана так:

$$(2.40) \quad \max l(\omega), \quad l \in R(r, 1), \quad -l \in R(p, 1),$$

что по теореме 2.3 есть

$$(2.41) \quad \inf_{u \in U} [r(\omega - u) + p(-u)],$$

где согласно (2.30) и определению функционала Минковского $r_0(x)$:

$$\begin{aligned} r(\omega - u) &= r_0(-\omega + u) = \inf t, \\ t > 0: \quad -\omega + u &\in tK_0 = t(K - x_0) = K - tx_0, \end{aligned}$$

т.е. $-\omega + tx_0 + u \in K$, или $-\omega + \tilde{u} \in K$, что совпадает с условием (2.39). Таким образом, (2.41) означает следующее:

$$\inf_{u \in U} [r(\omega - u) + p(-u)] = \inf_{u \in U} [\inf_{t > 0} t + p(-u)] = \inf_{\tilde{u}} p_1(\tilde{u})$$

при условиях (2.39). Сопоставив полученное с (2.40), имеем (2.38).

Если $x_0 \in U$, то в (2.38) и (2.39) можем сразу брать $t = 0$, так как $\tilde{u}$ и u пробегает одно и то же подпространство $\tilde{U} = U$. Таким образом, если $x_0 \in U$, то

$$(2.42) \quad \inf p_1(\tilde{u}) = \inf p(-u) = \max [l(\omega) : l \in K^+, l(x_0) \leq 1, -l \in R(p, 1)],$$

где $\inf$ берется по таким $u \in U$, для которых

$$(2.43) \quad -\omega + u \in K.$$

Доказательство завершено.

В дальнейших приложениях мы, как правило, имеем дело с ситуацией, когда $x_0 \in U$.

Посмотрим, что дает теперь теорема 2.6, считая, что относительно X , K , U , p выполнены все предыдущие условия. Выясним сперва, что означает теперь условие $r(\omega - u_k) \rightarrow 0$ для какой-то последовательности $\{u_k\} \subset U$.

ЛЕММА 2.19. Для последовательности $\{u_k\} \subset U$ условие

$$(2.44) \quad r(\omega - u_k) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty,$$

означает, что существует последовательность неотрицательных чисел t_k , $t_k \rightarrow 0$, такая, что

$$(2.45) \quad -\omega + t_k x_0 + u_k \in K.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как было разобрано выше в доказательстве теоремы 2.18,

$$r(\omega - u_k) = \inf t, \quad t > 0, \quad -\omega + tx_0 + u_k \in K$$

и $r(\omega - u_k) \rightarrow 0$, тогда и только тогда, когда существуют числа $t_k \rightarrow 0$, $t_k \geq 0$, при которых имеет место (2.45).

Определение $\tilde{p}(\omega)$ теперь означает, что

$$(2.46) \quad \tilde{p}(\omega) = \inf \lim p(-u_k),$$

где $\inf$ берется по всем последовательностям $\{u_k\} \subset U$, для которых существуют последовательности неотрицательных чисел $\{t_k\}$, $t_k \rightarrow 0$, такие, что выполняются включения (2.45). (Конечно, если такие последовательности $\{u_k\}$ существуют; если их нет, то согласно определению 2.5 $\tilde{p}(\omega) = \infty$.)

ЛЕММА 2.20. *Если U содержит какую-нибудь внутреннюю точку x_1 конуса K , то последовательности $\{u_k\} \subset U$, удовлетворяющие (2.44), обязательно существуют для всех $\omega \in X$ и $\tilde{p}(\omega) < \infty$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (Не предполагается, что $x_1 = x_0$.) Для достаточно большого числа $T > 0$ элемент

$$-\omega + Tx_1 \in K.$$

Положив $u = Tx_1 \in U$, возьмем стационарную последовательность $\{u, u, \dots\}$, для которой (2.45) выполняется с $t_k = 0$, $k = 1, 2, \dots$. Поскольку для этой последовательности величина $p(-u)$ — определенное число, то $p(\omega) < \infty$.

Теорема 2.6 принимает следующий вид.

ТЕОРЕМА 2.21. *Пусть X — линейное вещественное локально выпуклое пространство, K — конус в X , содержащий внутреннюю точку x_0 , U — линейное подпространство в X , $p(u) \geq 0$ — выпуклый функционал на U , $r(u)$ определено в (2.30). Для любого $\omega \in X$ имеем:*

$$(2.47) \quad \tilde{p}(\omega) = \sup_{l \in K^+, -l \in R(p, 1)} l(\omega),$$

где $\tilde{p}(\omega)$ определено в (2.44)–(2.46) (или $\tilde{p}(\omega) = \infty$).

ЗАМЕЧАНИЕ 2.22. Важно отметить, что в теоремах 2.18 и 2.21 речь идет не об аппроксимации данного элемента ω подпространством U , а о том, чтобы “уловить” данный элемент $-\omega$ конусом, добавляя к $-\omega$ элементы из U при возможно малых значениях $p(-u)$. Именно такие задачи оказались двойственными для линейных экстремальных задач с положительными функционалами $l \in K^+$, удовлетворяющими дополнительным условиям: $-l \in R(p, 1)$. Насколько я могу судить, ранее (см., например, [73], [74]) разбирались лишь задачи, когда дополнительные условия состояли в том, что значения функционала на некоторых элементах U удовлетворяли заданным неравенствам. Эти задачи являются весьма частным случаем развитых здесь общих взглядов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.23. Сравнивая теоремы 2.18 и 2.21, приходим к неожиданному (во всяком случае для автора!) заключению, что в задачах с конусом теорема 2.18, основанная на “полуфабрикатной” (по отношению к основной теореме 2.6) теореме 2.3, может давать лучший результат. Действительно, в случае, когда $x_0 \in U$ (а если известно, что U содержит какую-нибудь внутреннюю точку K , то именно ее мы можем взять за x_0), из (2.38), (2.39) и (2.42)–(2.46) получаем

$$(2.48) \quad \tilde{p}(\omega) = \max l(\omega), \quad l \in K^+, \quad l(x_0) \leq 1, \quad -l \in R(p, 1),$$

что лучше (2.47) хотя бы потому, что существует экстремальный функционал l^* .

Уместно спросить, как теперь обстоит дело с $(r, O(p))$ или $(r, o(p))$ -плотностью подпространства U . Применяя лемму 2.20, получаем (в сделанных выше обозначениях):

СЛЕДСТВИЕ 2.24. При произвольном подпространстве U подпространство $\tilde{U}$ из (2.35) будет $(r, O(p_1))$ -плотно в X (p_1 определено в (2.37)). Если U содержит внутреннюю точку конуса K , то U будет $(r, O(p))$ -плотным в X . $(r, o(p))$ -плотность подпространства U в X означает, что для любых $\omega \in X$ и $\varepsilon > 0$ найдутся число t , $0 < t < \varepsilon$, и элемент $u \in U$ такие, что выполняется (2.39) и $p(-u) < \varepsilon$.

Из теоремы 2.21 получаем

СЛЕДСТВИЕ 2.25. Подпространство U будет $(r, o(p))$ -плотным в X , если и только если из включений $l \in K^+$ и $-l \in R(p, 1)$ следует, что $l \equiv 0$.

Специальные случаи для конструирования p .

I. Пусть $\{x_i\}$ – счетная (или конечная) система линейно независимых элементов в линейном пространстве X (вещественном или комплексном – не важно), а U – линейная оболочка $\{x_i\}$. Пусть в каждом $\mathbb{R}^n$, $n = 1, 2, \dots$, или в каждом $\mathbb{C}^n$ (смотря по тому – вещественное или комплексное X) определен неотрицательный выпуклый функционал p (в комплексном случае – преднорма) $p(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ или $\mathbb{C}^n$, причем

$$(2.49) \quad p(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = p(\lambda_1, \dots, \lambda_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{m-n}), \quad m > n.$$

Тогда $p(u)$ для $u = \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$ можно определить как

$$(2.50) \quad p(u) = p(\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n) \stackrel{\text{def}}{=} p(\lambda_1, \dots, \lambda_n).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.26 (дополнение к определениям 2.7 и 2.15). В этом случае вместо того чтобы говорить, что подпространство U $(r, O(p))$ - или $(r, o(p))$ -аппроксимирует данный элемент ω , будем иногда говорить, что система $\{x_i\}$ $(r, O(p))$ -, $(r, o(p))$ -, $O(p)$ - или $o(p)$ -аппроксимирует ω . Точно так же вместо $(r, O(p))$ -, $(r, o(p))$ -, $O(p)$ - или $o(p)$ -плотности U в X будем говорить, что система $\{x_i\}$ будет $(r, O(p))$ -, $(r, o(p))$ -, $O(p)$ - или $o(p)$ -полна в X .

II. Пусть $X_1, \dots, X_N, \dots$ – последовательность нормированных пространств (все X_i одновременно либо вещественные, либо комплексные); норму в X_i обозначаем $\|\cdot\|_i$, $i = 1, 2, \dots$. Пусть заданы также непрерывные линейные операторы:

$$(2.51) \quad B_i: X_i \rightarrow X, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где X – “основное” нормированное пространство (вещественное или комплексное – одновременно с X_i). Рассмотрим произведения:

$$(2.52) \quad Y_N = X_1 \times \dots \times X_N, \quad N = 1, 2, \dots$$

Для $y = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in Y_N$ определяем норму, положив

$$(2.53) \quad \|y\| = \sum_1^N \|x_i\|_i,$$

и линейный оператор $D_N: Y_N \rightarrow X$:

$$(2.54) \quad D_N y = \sum_1^N B_i x_i.$$

Пусть

$$(2.55) \quad U = \bigcup_N D_N(Y_N).$$

Ясно, что U – линейное подпространство в X . Определим на U функционал $p(u)$ формулой

$$(2.56) \quad p(u) = \inf \|y\| : y \in D_N^{-1}(u), \quad N = 1, 2, \dots;$$

$p(u) \geq 0$ – преднорма на U . В силу симметрии $p(u)$ условие $-l \in R(p, 1)$ означает теперь, что

$$(2.57) \quad |l(u)| \leq p(u), \quad u \in U.$$

Выполнение (2.57) эквивалентно следующему. Пусть $u_i = B_i x_i \quad \forall x_i \in X_i$. Для всех u_i такого вида должно быть

$$(2.58) \quad |l(u_i)| \leq \|x_i\|_i, \quad u_i = B_i x_i \quad (\|B_i^* l\| \leq 1)$$

($B_i^*: X^* \rightarrow X_i^*$ – сопряженный к B_i оператор). Действительно, пусть выполняется (2.58) и $\forall u \in U: u = u_1 + \dots + u_N, u_i = B_i x_i, x_i \in X_i$.

Тогда $|l(u)| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_N\|$. Поскольку такая оценка верна для всех представлений u , то получаем (в силу определения $p(u)$ формулой (2.56)) оценку (2.57). Наоборот, если имеет место мажорация (2.57), то, в частности, для $u_i = B_i x_i$ имеем:

$$|l(u_i)| \leq p(u_i) \leq \|x_i\|_i$$

опять-таки в силу определения $p(u)$.

Легко понять, что, рассуждая аналогичным образом, можно в п. I отказаться от линейной независимости системы $\{x_i\}$, что иногда бывает выгодно. Для этого надо рассмотреть в качестве X_i одномерные пространства $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{C}^1$ и определить операторы $B_i: X_i \rightarrow X$ как

$$(2.59) \quad B_i(\lambda) = \lambda x_i, \quad \lambda \in \mathbb{R}^1 \quad \text{или} \quad \lambda \in \mathbb{C}^1.$$

Ясно также, что нормы в Y_N через нормы в X_i можно определять многими отличными от (2.53) способами. Тогда преднорма $p(u)$ будет иной и условия $-l \in R(p, 1)$ – другими.

§3. Емкость Коши и ее аналоги для сумм Голубева

Емкость Коши $\gamma_K(F)$ компакта F определяется равенством:

$$(3.1) \quad \gamma_K(F) = \sup \left| \int_F d\mu \right|, \quad \mu \in \mathfrak{M}_F, \quad |\hat{\mu}(z)| \leq 1, \quad z \in G, \quad F = \overline{\mathbb{C}} \setminus G.$$

Обычная аналитическая емкость $\gamma(F)$ (задача (0.1)) может быть определена аналогичным равенством:

$$(3.2) \quad \gamma(F) = \sup \left| \int_F d\mu \right|, \quad \mu \in \mathfrak{M}_F, \quad |\hat{\mu}(z)/L(z)| \leq 1, \quad z \in G.$$

В этой формуле $L(z)$ – функция, которую называют функцией Гарабедяна – см. [22; §5, гл. 1]. Эта функция тесно связана с ядром Сегё для области G – см. [75; гл. VII]. $L(z)$ обладает многими важными свойствами – например, $L(z) \neq 0$ и даже $\ln L(z)$ – однозначная функция. Любая ограниченная функция $f(z)$, $f(\infty) = 0$, может быть представлена формулой

$$(3.3) \quad f(z) = \hat{\mu}(z)/L(z), \quad \mu \in \mathfrak{M}_F,$$

откуда и получается определение (3.2) (см. [13], [14], а также книги [36; §8], [22; гл. I, §5]). Однако для конкретных оценок функция $L(z)$ – трудный объект (некоторые попытки были в [76], [77]).

Поэтому остается открытым вопрос о равенстве $\gamma_K(F) = \gamma(F)$. (Неравенство $\gamma_K(F) \leq \gamma(F)$ – очевидно.) Если множество имеет конечную длину по Пенлеве, то все ограниченные в G аналитические функции представимы потенциалом Коши (ср. пример 1.13), и в этом случае $\gamma_K(F) = \gamma(F)$. Несколько более общая ситуация примера 1.14 также гарантирует это равенство. В то же время сейчас хорошо известны примеры областей, в которых есть ограниченные аналитические функции (даже непрерывные в $\overline{\mathbb{C}}$), которые не представимы потенциалом Коши [43], [44]. Более того, есть примеры [76] областей, где функция Альфорса не представима потенциалом Коши. Таким образом, вопрос о равенстве емкостей Альфорса и Коши продолжает быть нерешенным. Неизвестно даже, будет ли из условия $\gamma_K(F) = 0$ вытекать, что и $\gamma(F) = 0$. Более того, неизвестно, будет ли множество F , для которого $\gamma_K(F) = 0$, всюду разрывным (если $\gamma(F) = 0$, то F обязательно всюду разрывное множество), между тем $\gamma_K(F)$ и, в частности, условие $\gamma_K(F) = 0$ являются характеристиками важных процессов на F и в G .

Мы начнем с установления двойственного выражения для $\gamma_K(F)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1. Пусть G – произвольная область, $\infty \in G$, $F = \overline{\mathbb{C}} \setminus G$, V_1 – произвольная окрестность компакта F , $V = V_1 \cap G$, $\{a_i\}$ – произвольное всюду плотное множество точек в V . Тогда

$$(3.4) \quad \gamma_K(F) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k |\lambda_i|,$$

где $\inf$ берется по всевозможным последовательностям

$$(3.5) \quad \left\{ \sum_1^k \lambda_i (\zeta - a_i)^{-1} \right\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

таким, что

$$(3.6) \quad \max_{\zeta \in F} \left| 1 - \sum_1^k \lambda_i (\zeta - a_i)^{-1} \right| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в пространстве $X = C(F)$ систему функций

$$(3.7) \quad \{(\zeta - a_i)^{-1}, i = 1, 2, \dots\},$$

и пусть U — линейная оболочка этой системы. В качестве выпуклого функционала r из теорем §2 возьмем норму в X . На подпространстве U определим преднорму p следующим образом:

$$(3.8) \quad p[\lambda_1(\zeta - a_1)^{-1} + \dots + \lambda_k(\zeta - a_k)^{-1}] = \sum_1^k |\lambda_i|.$$

(Если F содержит бесконечное множество точек, то p на самом деле норма.) Воспользуемся теоремой 2.6. Будем в дальнейшем обозначать функцию $\omega(\zeta) \equiv 1$ на F через $\mathbf{1}$ ($\mathbf{1}_F$).

Согласно этой теореме

$$(3.9) \quad \tilde{p}(\mathbf{1}) = \sup_{l \in R} |l(\mathbf{1})|.$$

Выясним, из каких линейных функционалов l состоит множество R теоремы 2.6 в нашей ситуации. Поскольку r — норма в $C(F)$, включение $l \in R(r)$ просто означает непрерывность функционала l (а priori он взят лишь из $C(F')$, а не из $C(F)^*$) и, значит, согласно теореме Рисса представимость l некоторой мерой μ . Что означает теперь условие $l \in R(p, 1)$ (включение $l \in R$ в случае, когда r и p симметричны, означает, что $l \in R(r) \cap R(p, 1)$)? Согласно определению $R(p, 1)$ должно быть при любых k и $\lambda_1, \dots, \lambda_k$:

$$(3.10) \quad \left| l \left(\sum_1^k \lambda_i (\zeta - a_i)^{-1} \right) \right| \leq p(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum_1^k |\lambda_i|.$$

Последние неравенства, как легко видеть, эквивалентны тому, что

$$(3.11) \quad |[(\zeta - a_i)^{-1}]| = \left| \int_F d\mu (\zeta - a_i)^{-1} \right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Но (3.11) означает, что $|\hat{\mu}(z)| \leq 1$: достаточно вспомнить принцип максимума и то, что $\{a_i\}$ всюду плотно в V . Подставляя эти сведения в (3.9), получим:

$$(3.12) \quad \tilde{p}(\mathbf{1}) = \sup \left| \int_F d\mu \right|, \quad |\hat{\mu}(z)| \leq 1,$$

и, следовательно,

$$(3.13) \quad \tilde{p}(\mathbf{1}) = \gamma_k(F).$$

Поскольку очевидно, что $\gamma_k(F) < \infty$, то $\tilde{p}(\mathbf{1})$ определяется формулой (3.4) при условии (3.6) (см. определение (2.11) для $\tilde{p}(\omega)$ в §2).

Совершенно аналогично устанавливается

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1'. Пусть $\{a_i\}$ – такое же множество, как в предложении 3.1. Тогда

$$(3.14) \quad \gamma(F) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_1^k |\lambda_i| |L(a_i)|,$$

где $\inf$ берется по всевозможным последовательностям (3.5), для которых имеет место (3.6); $L(z)$ – функция Гарабедяна.

Доказательство протекает так же, как для предложения 3.1, и состоит в обосновании, исходя из (3.2), равенства

$$(3.15) \quad \gamma(F) = \tilde{p}_1(\mathbf{1}),$$

где преднорма p_1 имеет вид

$$(3.16) \quad p_1(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \sum_1^k |L(a_i)| |\lambda_i|.$$

Равенство (3.13) было получено В. П. Хавиным [28], [29] (для $\gamma(F)$) при предположении, что длина по Пенлеве F – конечна (тогда $\gamma(F) = \gamma_K(F)$), а равенство (3.14) – С. Я. Хавинсоном [15], [30], см. также [36]. Оба автора опирались на двойственность экстремальных задач, но доказательства имели более специальный характер, наша же цель – проиллюстрировать возможности схемы §2.

Использование $\gamma_K(F)$ дает возможность придать более законченный характер аппроксимационной теореме В. П. Хавина и автора, цитировавшейся во введении.

ТЕОРЕМА 3.2. Пусть $\gamma_K(F) = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Для всякой меры $\mu \in \mathfrak{M}_F$, $\mu \not\equiv 0$, потенциал Коши $\hat{\mu}(z)$ не может быть ограниченной функцией в G .
2. Пусть $\{a_i\}$ – такое же множество точек, как в предложении 3.1, и преднорма p определена равенством (3.8). Тогда система простых дробей (3.7) $o(p)$ -полна в пространстве $C(F)$. Таким образом, для произвольных $\omega(\zeta) \in C(F)$ и $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ такие, что

$$(3.17) \quad \max_{\zeta \in F} \left| \omega(\zeta) - \sum_1^k \lambda_i (\zeta - a_i)^{-1} \right| < \varepsilon, \quad \sum_1^k |\lambda_i| < \varepsilon.$$

Обратное утверждение: Если какая-то система простых дробей с полюсами $\{b_i\}$, как-то расположенными в G :

$$(3.18) \quad \{(\zeta - b_i)^{-1}\}, \quad b_i \in G,$$

$o(p)$ -аппроксимирует функцию $\mathbf{1}$ (p определено на линейной оболочке системы (3.18) равенствами (3.8), в которых вместо $\{a_i\}$ взяты $\{b_i\}$), то $\gamma_K(F) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\gamma_K(F) = 0$, но существует мера $\mu \neq 0$ на F , для которой $\hat{\mu}(z) \in B(G)$, $\hat{\mu}(z) \neq 0$. Разложение $\hat{\mu}(z)$ в ряд Лорана в окрестности $z = \infty$ имеет вид

$$(3.19) \quad \hat{\mu}(z) = \frac{c_{-s}}{z^s} + \frac{c_{-(s+1)}}{z^{s+1}} + \dots, \quad c_{-s} \neq 0, \quad s \geq 2,$$

поскольку коэффициент $c_{-1} = -\int_F d\mu = 0$ в силу условия $\gamma_K(F) = 0$. Воспользуемся теперь критерием В. П. Хавина для представимости потенциалом Коши (это специальный случай предложения 1.1, когда конфигурация $\Pi = (F, 1)$). Должна существовать константа $M \geq 0$ такая, что для произвольной окрестности V (с хорошей границей) множества F и произвольной $g(z)$, аналитической в $\bar{V}$, должно быть

$$\left| \int_{\partial V} g(z) \hat{\mu}(z) dz \right| \leq M \|g\|_F = M \max_{\zeta \in F} |g(\zeta)|.$$

Но тогда для ограниченной в области G функции $f(z) = z^{s-1} \hat{\mu}(z)$ имеем

$$\left| \int_{\partial V} g(z) f(z) dz \right| = \left| \int_{\partial V} g(z) z^{s-1} \hat{\mu}(z) dz \right| \leq M \|z^{s-1} g(z)\|_F \leq M \|z^{s-1}\|_F \|g\|_F.$$

Таким образом, для функции $f(z)$ неравенство из критерия В. П. Хавина выполняется с $M_1 = M \|z^{s-1}\|_F$. Поэтому $f(z)$ представима потенциалом Коши некоторой меры ν : $f(z) = \hat{\nu}(z)$, но $-\int_F d\nu = f'(\infty) = c_{-s} \neq 0$. Следовательно, $\gamma_K(F) \neq 0$ – вопреки условию. Итак, если $\hat{\mu}(z) \in B(G)$, то должно быть $\hat{\mu}(z) \equiv 0$ в G . Условие $\gamma_K(F) = 0$ влечет, что плоская мера F равна нулю. Действительно, в противном случае существовал бы непрерывный во всей плоскости потенциал $\hat{\sigma}(z)$ от плоской меры $d\sigma \in \mathfrak{M}_F$ (см., например, [22; теорема на с. 2]) и тогда $\hat{\sigma}'(\infty) = -\int_F d\sigma \neq 0$. Поэтому равенство $\hat{\mu}(z) \equiv 0$ в G имеет место почти везде на плоскости $\mathbb{C}$. Но известно [22; следствие 1.3 гл. II], что тогда $\mu \equiv 0$. Первое утверждение доказано. Докажем второе.

Рассмотрим некоторый линейный функционал l над $C(F)$. Нам согласно следствию 2.9 надо показать, что из включения $l \in R$ вытекает, что $l \equiv 0$. Как и в доказательстве предложения 3.1, устанавливаем, что l представляется комплексной мерой μ , для которой имеет место неравенство (3.11). Но тогда $|\hat{\mu}(z)| \leq 1$ в G и по утверждению 1 $\mu \equiv 0$. Итак, действительно, $l \in R \Rightarrow l \equiv 0$. Поэтому согласно упоминавшемуся уже следствию 2.9, это означает $o(p)$ -плотность в $C(F)$ линейной оболочки U системы (3.7) или $o(p)$ -полноту этой системы в $C(F)$.

Докажем обратное утверждение теоремы. Нам дано, что функция $\mathbf{1}$ является $o(p)$ -аппроксимлируемой некоторой системой $\{(\zeta - b_i)^{-1}\}$, $b_i \in G$, $i = 1, \dots$. Это согласно теореме 2.6 означает, что для линейного функционала $l \in R$ $l(\mathbf{1}) = 0$. Опять-таки то, что $l \in R(r)$, означает здесь просто включение $l \in C(F)^*$ и, следовательно, представление l мерой μ . Включение $-l \in R(p, 1)$ означает сейчас, что выполняются неравенства (3.11), в которых вместо a_i фигурируют b_i . Таким образом, из этих (с заменой a_i на b_i) неравенств (3.11) следует, что

$$(3.20) \quad \int_F d\mu = 0.$$

Но тогда из того, что $|\hat{\mu}(z)| \leq 1$ в G , тем более вытекает (3.20) и $\gamma_K(F) = 0$.

Сформулируем, как выглядит соответствующий результат для аналитической емкости Альфорса $\gamma(F)$.

ТЕОРЕМА 3.2'. Пусть $\gamma(F) = 0$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Всякая $f(z) \in B(G)$ есть константа.
2. Система дробей (3.7) $o(p)$ -полна в $C(F)$. Обратно: если какая-то система (3.18) $o(p_1)$ -аппроксимирует $\mathbf{1}$ в $C(F)$, то $\gamma(F) = 0$ (p_1 определено в (3.16) с заменой $\{a_i\}$ на b_i).

Доказательство протекает так же, как в теореме 3.2. Однако здесь утверждение 1 (теорема 1 основополагающей работы Альфорса [2] — факт, хотя и весьма полезный, но тривиальный: из того, что $f(z) \in B(G)$ и имеет разложение (3.19) в окрестности ∞ , следует, что $z^{s-1}f(z) \in B(G)$). В то же время утверждение 1 в теореме 3.2 существенно опирается на вполне глубокий факт: критерий представимости потенциалом Коши.

Утверждение 2 теоремы 3.2' составляет результат, независимо доказанный в свое время автором [15], [30] и В.П. Хавиным [27], [28] и приводившийся уже во введении. Обратная часть этой теоремы в сформулированном виде доказана автором [30], [26]. Здесь интересно отметить следующую “парадоксальную” ситуацию. Если $\gamma(F) = 0$, то $L(z) \equiv 1$ [30], [14]. Поэтому $o(p_1)$ -аппроксимация означает, что на самом деле была произведена $o(p)$ -аппроксимация $\mathbf{1}$. Однако непосредственно из $o(p)$ -аппроксимации $\mathbf{1}$ удастся вывести лишь, что $\gamma_K(F) = 0$, а всегда $\gamma_K(F) \leq \gamma(F)$. Обратное утверждение в теореме 3.2 было выведено В.П. Хавиным для множеств с конечной длиной по Пенлеве (когда $\gamma_K(F) = \gamma(F)$). Теорема 3.2 в полном объеме была описана в докладе [26], где впервые появился термин “емкость Коши”. Доказательство теоремы ранее не публиковалось. Поскольку не удастся решить вопрос, совпадают ли $\gamma(F)$ и $\gamma_K(F)$, сделаем ряд рассуждений, частично вскрывающих имеющиеся здесь трудности.

Пусть область G , $\infty \in G$, имеет границу L , состоящую из замкнутых жордановых спрямляемых кривых $L_1, \dots, L_m$, попарно не имеющих общих точек. Пусть, далее, D_j — конечная область, ограниченная контуром L_j , $j = 1, \dots, m$, и $F = \bigcup_1^m D_j$. В этом случае, как следует из сказанного выше, $\gamma_K(F) = \gamma(F)$: в качестве экстремальной меры на L для $\gamma_K(F)$ можно взять $(2\pi i)^{-1} f(\zeta) d\zeta$, где $f(z)$ — экстремальная функция (функция Альфорса) для $\gamma(F)$. Однако полезно отметить и такие дополнительные факты.

Пусть Φ_j , $j = 1, \dots, m$, произвольное компактное множество, лежащее внутри D_j и составляющее из бесконечного количества точек, $\Phi = \bigcup_1^m \Phi_j$. Возьмем счетное всюду плотное множество точек $\{a_i\}$ на L и в пространстве $C(\Phi)$ рассмотрим систему функций (3.7), определив на подпространстве $U \subset C(\Phi)$, являющемся линейной оболочкой этой системы, преднорму (3.8).

Для функции $\mathbf{1}_\Phi$ (тождественная единица на Φ) рассмотрим величину $\tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi)$, а также величину $\tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi)$, определяемую равенством:

$$(3.21) \quad \tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi) = \inf_{\substack{\nu \in \mathfrak{M}_L \\ \hat{\nu}(z) \equiv 1, z \in \Phi}} \int_L |d\nu|.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.3.

$$(3.22) \quad \gamma(F) = \sup_{\substack{\mu \in \mathfrak{M}_\Phi \\ |\widehat{\mu}(z)| \leq 1, z \in G}} \left| \int_\Phi d\mu \right| = \tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi) = \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_\Phi).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим класс мер $\nu \in \mathfrak{M}_L$, для которых $\widehat{\nu}(z) \equiv 1, z \in \Phi$, через A . Мера $\nu_0 : d\nu_0 = (2\pi i)^{-1} d\zeta$ принадлежит A . Если какая-то мера ν также принадлежит A , то

$$\widehat{\nu_0 - \nu}(z) \equiv 0, \quad z \in \Phi,$$

и так как Φ содержит бесконечное число точек в каждой области D_j , то

$$\widehat{\nu_0 - \nu}(z) \equiv 0, \quad z \in D_j, \quad j = 1, \dots, m.$$

Но известно (это один из вариантов теоремы бр. Рисс, см., например, [78]), что тогда

$$(3.23) \quad d\nu_0 - d\nu \equiv \psi(\zeta) d\zeta, \quad \psi(z) \in E_1(G), \quad \psi(\infty) = 0;$$

здесь $\psi(\zeta)$ – граничные значения на L функции $\psi(z)$ класса E_1 В. И. Смирнова, состоящего из функций, представимых интегралом Коши через свои граничные значения. Поэтому определение (3.21) даст

$$(3.24) \quad \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_\Phi) = \inf_{\substack{\psi \in E_1(G) \\ \psi(\infty)=0}} \frac{1}{2\pi} \int_L |1 + \psi(\zeta)| |d\zeta|.$$

Но известно, что последняя величина совпадает с $\gamma(F)$ (см. [78] [22]). Это есть упоминавшееся во введении двойственное соотношение Гарабедяна [10]. Если $\psi^*(z)$ – экстремальная функция в (3.24) (а она обязательно существует), то $L(z) = 1 + \psi^*(z)$ – функция Гарабедяна для области G . Заменяя экстремальную в (3.21) или (3.24) меру $d\nu^* = (1 + \psi^*(\zeta)) d\zeta = L(\zeta) d\zeta$ дискретными мерами, сидящими в точках L и слабо (*) сходящимися к $d\nu^*$ (с помощью интегральных сумм, например), придем к тому, что

$$\tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi) \leq \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_\Phi).$$

Однако строгое неравенство невозможно, так как если бы оно осуществлялось, то с помощью слабой компактности ограниченных семейств мер мы бы пришли к мере $\nu^{**} \in \mathfrak{M}_L$ такой, что

$$\int_L |d\nu^{**}| \leq \tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi) < \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_\Phi), \quad \text{но } \widehat{\nu^{**}}(z) \equiv 1, \quad z \in \Phi.$$

Получилось противоречие с определением $\tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_\Phi)$. Итак,

$$(3.25) \quad \tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi) = \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_\Phi) = \gamma(F).$$

По теореме двойственности 2.6 (формула (2.14)) получаем:

$$\tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi) = \sup_{\substack{\mu \in \mathfrak{M}_\Phi \\ |\tilde{\mu}(a_i)| \leq 1}} \left| \int_\Phi d\mu \right|.$$

Поскольку $\{a_i\}$ – всюду плотно на L , это, вместе с (3.25) – то же, что и (3.22).

То, что меры для определения величины $\gamma_K(F)$ можно перебирать не на F и не на $\partial F = L$, а на внутреннем к F множестве Φ , – любопытный, но простой факт. Его можно было бы доказать и непосредственным применением теоремы Рунге. Мы пошли иным путем, получив дополнительную информацию: $\tilde{p}(\mathbf{1}_\Phi)$ и $\tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_\Phi)$.

Рассмотрим теперь случай произвольной области $G \ni \infty$ и $F = \overline{\mathbb{C}} \setminus G$. Обозначим через $\tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_F)$ следующую величину. Рассматриваем всевозможные меры ν с компактными носителями $S_\nu \subset G$ такие, что

$$\hat{\nu}(z) \equiv 1, \quad z \in F.$$

Положим

$$(3.26) \quad \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_F) = \inf_{\substack{S_\nu \subset G \\ \hat{\nu}(z) \equiv 1, z \in F}} \int |d\nu|.$$

ТЕОРЕМА 3.4 (В. П. Хавин [28], [29]).

$$(3.27) \quad \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_F) = \gamma(F).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{G_n\}$, $G_n \ni \infty$, – возрастающая последовательность конечносвязных областей, исчерпывающая G , причем границы L_n областей G_n состоят из конечного числа спрямляемых замкнутых кривых Жордана. Если $F_n = \overline{\mathbb{C}} \setminus G_n$, то хорошо известно и легко доказывается, исходя из компактности класса $B^1(G)$, что

$$(3.28) \quad \gamma(F_n) \rightarrow \gamma(F).$$

Пусть $\tilde{p}_n(\mathbf{1}_F)$ – величина, определяемая в предыдущем предложении 3.3 для случая, когда в этом предложении положено $G_n = G$, $\Phi = F$.

Из (3.22) и (3.28) получаем:

$$\gamma(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{p}_n(\mathbf{1}_F).$$

Очевидно, что

$$(3.29) \quad \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_F) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{p}}_n(\mathbf{1}_F).$$

Покажем, что строгое неравенство невозможно. Допустим, что

$$(3.30) \quad \tilde{\tilde{p}}(\mathbf{1}_F) < \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\tilde{p}}_n(\mathbf{1}_F),$$

и зададимся некоторым $\varepsilon > 0$, $0 < \varepsilon < \lim \tilde{p}_n(\mathbf{1}_F) - \tilde{p}(\mathbf{1}_F)$. Пусть n таково, что

$$(3.31) \quad \gamma(F) \leq \gamma(F_n) \leq \gamma(F) + \varepsilon,$$

и пусть ν такая мера, что $S_\nu \subset G$ и

$$(3.32) \quad \hat{\nu}(z) \equiv 1, \quad z \in F, \quad \int_{S_\nu} |d\nu| \leq \tilde{p}(\mathbf{1}_F) + \varepsilon.$$

Можно считать, что S_ν лежит внутри G_n (если это не так, то увеличим номер n). В силу предложения 3.3 имеем

$$(3.33) \quad \sup_{\substack{\mu \in \mathfrak{M}_F \\ |\hat{\mu}(z)| \leq 1, z \in G_n}} \left| \int_F d\mu \right| = \gamma(F_n) = \tilde{p}_n(\mathbf{1}_F) > \tilde{p}(\mathbf{1}_F) + \varepsilon.$$

С другой стороны, для всякой меры μ из (3.33) и меры ν из (3.32)

$$(3.34) \quad \left| \int_F d\mu \right| = \left| \int_F \hat{\nu}(\zeta) d\mu \right| = \left| \int_{S_\nu} \hat{\mu}(z) d\nu \right| \leq \int_{S_\nu} |d\nu| \leq \tilde{p}(\mathbf{1}_F) + \varepsilon.$$

Оценки (3.33) и (3.34) противоречат друг другу, что и доказывает теорему В. П. Хавина. (Оригинальное доказательство В. П. Хавина иное.)

Таким образом, вопрос о равенстве $\gamma(F)$ и $\gamma_K(F)$ сводится предложением 3.1 и теоремой 3.4 к вопросу о равенстве

$$(3.35) \quad \tilde{p}(\mathbf{1}_F) = \tilde{p}(\mathbf{1}_F).$$

В определении (3.26) для $\tilde{p}$ – точное равенство единице потенциалов $\hat{\nu}(z)$ на F . В определении (3.4)–(3.6) для $\tilde{p}$ – аппроксимационное. Принцип компактности для дискретных мер, фигурирующих в суммах (3.5)–(3.6), не помогает, так как предельная мера размещается на F , а не в G .

Для того чтобы оттенить сказанное об аппроксимации простыми дробями в теоремах 3.2 и 3.2', приведем несколько простых дополнительных соображений. Заметим, прежде всего, что в случае произвольного компакта F система (3.7) не обязана быть полной в обычном смысле и тем более $O(p)$ - или $o(p)$ -полной. Так будет, в частности, когда F содержит внутренние точки. Однако имеют место следующие факты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.5. Пусть F – произвольный компакт со связным дополнением. Любая функция $\omega(\zeta)$, аналитическая на F , является $O(p)$ -аппроксимируемой в $C(F)$ системой (3.7), где $\{a_i\}$ – такие же, как в предложении 3.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Надо показать, что $\tilde{p}(\omega) < \infty$. Но согласно теореме 2.6

$$\tilde{p}(\omega) = \sup_{|\hat{\mu}(a_i)| \leq 1, i=1,2,\dots} \left| \int_F \omega(\zeta) d\mu \right|.$$

Условия $|\hat{\mu}(a_i)| \leq 1, i = 1, 2, \dots$, равносильны тому, что $|\hat{\mu}(z)| \leq 1, z \in G$. Пусть $V \supset F$ – окрестность с хорошей границей такая, что $\omega(z)$ еще аналитична в $\bar{V}$. Тогда

$$\left| \int_F \omega(\zeta) d\mu \right| = 2\pi \left| \int_{\partial V} \omega(z) \hat{\mu}(z) dz \right| \leq \max_{z \in \partial V} |\omega(z)| \times (\text{длина } \partial V) \leq M < +\infty,$$

где M не зависит от μ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.6. Если $\gamma_K(F) > 0$, то **1**, являясь $O(p)$ -аппроксимируемой, не является $o(p)$ -аппроксимируемой системой (3.7).

Доказательство немедленно следует из предложений 3.1, 3.5 и теоремы 3.2

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Если F – нигде не плотное множество со связным дополнением, имеющее конечную длину по Пенлеве, то система простых дробей (3.7) $O(p)$ -полна в $C(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу аппроксимационной теоремы М. А. Лаврентьева система (3.7) полна (в обычном смысле) в $C(F)$. Поэтому если $f(z)$ – аналитическая в G функция и $f(z) = \hat{\mu}(z)$, $\mu \in \mathfrak{M}_F$, то мера μ определяется по f однозначно (e – свойство конфигурации $\Pi = \Pi(F, 1)$). Но в силу конечности длины по Пенлеве множества F из $|\hat{\mu}(z)| \leq 1$ в G следует, что $\|\mu\| \leq M < +\infty$, где M не зависит от μ . Неравенства $|\hat{\mu}(a_i)| \leq 1$, $i = 1, 2, \dots$, влекут, что $|\hat{\mu}(z)| \leq 1$ в G , и поэтому $\|\mu\| \leq M$. Согласно следствию 2.12 система (3.7) является $O(p)$ -полной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть F – всюду разрывно и $\text{cap } F > 0$ ($\text{cap } F$ – емкость Ньютона для F). Система (3.7) не является $O(p)$ -полной в $C(F)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Согласно следствию 2.12 нам надо доказать, что не существует такого $M > 0$, что если для какой-то меры μ выполняются неравенства (3.11), то $\|\mu\| \leq M$. Нам придется воспользоваться некоторыми фактами, изложенными в книге [36]. Будем исчерпывать область G возрастающей последовательностью конечносвязных областей $\{G_n\}$, $G_n \ni \infty$, границы которых ∂G_n состоят из спрямляемых контуров.

Если $F_n = \overline{\mathbb{C}} \setminus G_n$, то $F_n \supset F_{n+1}$, $\partial F_n = \partial G_n$, $\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n = F$.

Положим

$$(f, \varphi, F_n) = \int_{\partial F_n} f(z) \varphi(z) dz, \quad R(f, F_n) = \sup_{\varphi \in B^1(F_n)} |(f, \varphi, F_n)|,$$

где $B^1(F_n)$ – аналитические во внутренних точках F_n и ограниченные там по модулю единицей функции и, наконец,

$$R(f, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} R(f, F_n)$$

(доказывается, что $R(f, F_n)$ – возрастающая последовательность). Теорема 2.3 книги [36] утверждает, что $f(z)$ есть потенциал Коши меры μ на F тогда и только тогда, когда $R(f, F) < +\infty$. При этом мера μ , представляющая $f(z)$, может быть выбрана так, что $\|\mu\| = (2\pi)^{-1} R(f, F)$.

Эта теорема, дающая иной, чем неоднократно цитированный выше, признак представимости аналитической функции потенциалом Коши, была доказана для случая круга В. П. Хавиным [27], а в двойственной формулировке еще раньше Г. П. Тумаркиным [56]. Общий случай F и G исследовался в работах [57], [58], [45], [36]. В нашем случае всюду разрывного множества F если $f(z)$ есть потенциал Коши, то мера μ определяется по $f(z)$ однозначно (e -свойство!), и, следовательно, $\|\mu\| = (2\pi)^{-1} R(f, F) < \infty$. Пусть, далее, ∂F_n состоит из контуров $L_n^1, \dots, L_n^m$. Положим

$$V(f, F_n) = \sum_1^m \left| \int_{L_n^k} f(z) dz \right|.$$

Числа $V(f, F_n)$ не убывают с ростом n , и число

$$V(f, F) = \lim_{n \rightarrow \infty} V(f, F_n)$$

называется вариацией $f(z)$ по Помпейу (см. [22; §3, гл. II, с. 30], [36]). Нетрудно видеть (лемма 3.8 книги [36] – неравенство (3.40)), что

$$R(f, F) \geq V(f, F).$$

Из леммы 3.10 книги [36] следует, что для сколь угодно большого N существует функция $f(z)$, аналитическая в G (и даже непрерывная в $\overline{\mathbb{C}}$), для которой

$$V(f, F) \geq N, \quad \sup_{z \in G} |f(z)| \leq 1,$$

и при этом представимая как потенциал Коши некоторой меры μ на F (сопоставление формул (3.52) и (3.57) из [36]). Но тогда

$$\|\mu\| = (2\pi)^{-1} R(f, F) \geq (2\pi)^{-1} V(f, F) \geq (2\pi)^{-1} N,$$

т.е. $\|\mu\|$ у меры, представляющей функцию из $B^1(G)$, может быть сколь угодно большой, и предложение 3.8 доказано.

Цитированные сейчас при установлении предложения 3.8 факты из [36] являются этапами к воспроизведению результата Р. Э. Вальского [44]: при $\text{cap } F > 0$ и F – всюду разрывном обязательно существует в $\overline{\mathbb{C}} \setminus F$ ограниченная аналитическая функция, не представимая потенциалом Коши.

Перейдем теперь к аналогам емкости Коши, предложения 3.1 и теоремы 3.2 для сумм Голубева конфигураций более сложных, чем конфигурация $(F, 1)$. Рассмотрим, прежде всего, конфигурацию следующего вида (см. (1.2), (1.3)):

$$(3.36) \quad \Pi = (F_1, 1; F_2, 2; \dots; F_s, s),$$

Γ_Π – здесь класс аналитических в G функций $f(z)$, имеющих представление

$$(3.37) \quad f(z) = \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - z)^{-j} d\mu_j, \quad \mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}, \quad j = 1, \dots, s.$$

Введем величину

$$(3.38) \quad \gamma(\Pi) = \sup_{f \in \Gamma_\Pi \cap B^1(G)} |f'(\infty)| = \sup_{f \in \Gamma_\Pi \cap B^1(G)} \left| \int_{F_1} d\mu_1 \right|.$$

Найдем, прежде всего, двойственное выражение для этой величины.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. Пусть $\{a_i\}$ – такое же точечное множество, как в предложении 3.1. Тогда

$$(3.39) \quad \gamma(\Pi) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_1^k |\lambda_i|,$$

где $\inf$ берется по всевозможным последовательностям (3.5), для которых выполняются условия:

$$(3.40) \quad \begin{aligned} \max_{\zeta \in F_1} \left| 1 - \sum_1^k \lambda_i (\zeta - a_i)^{-1} \right| &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \\ \max_{\zeta \in F_j} \left| \sum_1^k \lambda_i (\zeta - a_i)^{-j} \right| &\rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty, \quad j = 2, \dots, s. \end{aligned}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим банахово пространство X , определенное произведением (1.8), и в этом пространстве систему векторов

$$(3.41) \quad \mathbf{x}^i = ((\zeta - a_i)^{-1}, (\zeta - a_i)^{-2}, \dots, (\zeta - a_i)^{-s}), \quad i = 1, 2, \dots$$

(Это система (1.35) для нашей конфигурации.) В качестве функционала r в теории, изложенной в § 2, берем норму пространства X (определяемую формулой (1.9)). Поэтому линейный функционал $l \in R(r)$ – просто непрерывный линейный функционал над X , описываемый набором комплексных мер (1.10). На линейной оболочке U векторов системы (3.41) определим выпуклый функционал p (он будет преднормой) равенством

$$(3.42) \quad p(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}^k) = \sum_1^k |\lambda_i|.$$

Включение $-l \in R(p, 1)$ означает теперь, что

$$|l(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}^k)| \leq \sum_1^k |\lambda_i| \quad \text{при произвольных } k, \lambda_1, \dots, \lambda_k.$$

Но эти неравенства эквивалентны таким:

$$(3.43) \quad |l(\mathbf{x}^i)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Расписывая действие функционала l с помощью набора представляющих его мер μ_j , $j = 1, \dots, s$, получаем:

$$(3.44) \quad \left| \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - a_i)^{-j} d\mu_j \right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Таким образом, неравенства (3.44) означают, что $l \in R$: $l \in R(r)$, $-l \in R(p, 1)$ (см. §2). Но (3.44) равносильны тому, что

$$(3.45) \quad f(z) = \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - z)^{-j} d\mu_j \in \Gamma_{\Pi} \cap B^1(G).$$

Рассмотрим, наконец, в X элемент

$$(3.46) \quad \omega = (\mathbf{1}, 0, \dots, 0)$$

и вычислим $\tilde{p}(\omega)$. Согласно теореме 2.6

$$(3.47) \quad \tilde{p}(\omega) = \sup_{l \in R} |l(\omega)| = \sup_{(\mu_1, \dots, \mu_s) \in R} \left| \int_{F_1} d\mu_1 \right| = \sup_{f \in \Gamma_{\Pi} \cap B^1(G)} |f'(\infty)| = \gamma(\Pi).$$

Очевидно, что $\gamma(\Pi) \leq \gamma(F) < \infty$, и поэтому согласно (2.11), (2.12) $\tilde{p}(\omega)$ определяется следующим образом:

$$(3.48) \quad \tilde{p}(\omega) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} p(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}^k) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_1^k |\lambda_i|,$$

где $\inf$ берется по всем последовательностям

$$(3.49) \quad \left\{ \sum_1^k \lambda_i \mathbf{x}^i \right\},$$

для которых

$$(3.50) \quad r\left(\omega - \sum_1^k \lambda_i \mathbf{x}^i\right) = \left\| \omega - \sum_1^k \lambda_i \mathbf{x}^i \right\|_X \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Однако (3.48)–(3.50) то же самое, что (3.5) вместе с (3.40).

ТЕОРЕМА 3.10. Пусть конфигурация Π имеет вид (3.36), причем $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_s$. Тогда справедливы следующие утверждения.

1. Если $\gamma(\Pi) = 0$, то всякая функция $f(z) \in \Gamma_{\Pi} \cap B(G)$ тождественна нулю в G .
2. Если $\gamma(\Pi) = 0$ и, кроме того, $\Pi \in e$, то меры μ_j в представлении $f(z) \in \Gamma_{\Pi} \cap B(G)$ по формуле (3.37) равны нулю: $\mu_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, s$.
3. Пусть $\Gamma(\Pi) = 0$ и $\Pi \in e$. Если точки $\{a_i\}$, векторы $\mathbf{x}^i$ из (3.41), p из (3.42) такие же, как в предложении 3.9, то система векторов $\{\mathbf{x}^i, i = 1, 2, \dots\}$ $o(p)$ -полна в пространстве X из (1.8). То есть для любых функций $\varphi_j(\zeta) \in C(F_j)$, $j = 1, \dots, s$, и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, что

$$(3.51) \quad \max_{\zeta \in F_j} \left| \varphi_j(\zeta) - \sum_1^k \lambda_i (\zeta - a_i)^{-j} \right| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, s; \quad \sum_1^k |\lambda_i| < \varepsilon.$$

Обратно. Пусть Π – конфигурация вида (3.36) с произвольными компактными $F_1, \dots, F_s$, $\{b_i\}$ – произвольная последовательность точек в G . Если система векторов

$$(3.52) \quad \mathbf{y}^i = \{(\zeta - b_i)^{-1}, (\zeta - b_i)^{-2}, \dots, (\zeta - b_i)^{-s}\}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

$o(p)$ -аппроксимирует в пространстве X из (1.8) вектор ω (3.46), где p определена формулами (3.42), в которых $\mathbf{x}^i$ заменены на $\mathbf{y}^i$, то $\gamma(\Pi) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем утверждение 1. Допустим, что существует $f(z) \in \Gamma_\Pi \cap B(G)$, $f(z) \not\equiv 0$. Тогда при некотором $\nu \geq 2$ функция $\mathcal{F}(z) = z^{\nu-1}f(z)$ имеет $\mathcal{F}'(\infty) \neq 0$. Ясно, что $\mathcal{F}(z) \in B(G)$. Если мы покажем, что $\mathcal{F}(z) \in \Gamma_\Pi$, то получится противоречие с условием $\gamma(\Pi) = 0$. Поскольку $f \in \Gamma_\Pi$, то согласно предложению 1.1 существует $M > 0$ такое, что

$$(3.53) \quad |L_f(g)| \leq M \max_{1 \leq j \leq s} \max_{\zeta \in F_j} |g^{(j-1)}(\zeta)| \quad (g^{(0)} \equiv g) \quad \forall g \in A(F)$$

(L_f – функционал (1.5)). Поэтому

$$(3.54) \quad |L_{\mathcal{F}}(g)| = |L_f(z^{\nu-1}g)| \leq M \max_{1 \leq j \leq s} \max_{\zeta \in F_j} |[\zeta^{\nu-1}g(\zeta)]^{(j-1)}|.$$

Однако из формулы Лейбница для производной произведения мы легко обнаружим, что

$$(3.55) \quad \begin{aligned} & \max_{\zeta \in F_j} |[\zeta^{\nu-1}g(\zeta)]^{(j-1)}| \\ & \leq M_1 \left[\max_{\zeta \in F_j} |g(\zeta)^{(j-1)}| + \max_{\zeta \in F_j} |g(\zeta)^{(j-2)}| + \dots + \max_{\zeta \in F_j} |g(\zeta)| \right] \\ & \leq M_1 \left[\max_{\zeta \in F_j} |g(\zeta)^{(j-1)}| + \max_{\zeta \in F_{j-1}} |g(\zeta)^{j-2}| + \dots + \max_{\zeta \in F_1} |g(\zeta)| \right], \end{aligned}$$

где M_1 – некоторая константа, которую можно считать не зависящей от j . Из оценок (3.54) и (3.55) получаем, что

$$|L_{\mathcal{F}}(g)| \leq M_2 \max_{1 \leq j \leq s} \max_{\zeta \in F_j} |g(\zeta)^{(j-1)}|$$

и, следовательно, $\mathcal{F}(z) \in \Gamma_\Pi$. Образовалось, как сказано выше, противоречие с тем, что $\gamma(\Pi) = 0$. Итак, если $\gamma(\Pi) = 0$, то любая $f(z) \in \Gamma_\Pi \cap B(G)$ есть тождественный нуль и доказано утверждение 1.

Если теперь дополнительно известно, что $\Pi \in e$, то в представлении $f(z) \in \Gamma_\Pi \cap B(G)$ все меры $\mu_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, s$ (ведь уже доказано, что $f(z) \equiv 0$), и получается утверждение 2.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.11. Сделаем сразу же вот какое замечание. Именно для применения предложения 1.1 потребовалось специальное устройство конфигурации Π (3.36) и дополнительное требование убывания множеств F_j с ростом j . В противном случае в оценках или из правила Лейбница возникли бы производные тех порядков, которые в структуре Π не предусмотрены, или пришлось бы оценивать эти производные не на тех множествах, которые предписаны структурой.

Докажем утверждение 3. Так же, как при доказательстве предложения 3.9, устанавливается, что линейный функционал $l \in R$ (см. §2) является набором комплексных мер μ_j , причем выполняются неравенства (3.44), означающие, что имеет место включение (3.45). Но тогда, как уже установлено, все $\mu_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, s$. Итак, $l \in R \Rightarrow l \equiv 0$, а это согласно следствию 2.9 и означает $o(p)$ -полноту системы (3.41) в пространстве X .

Докажем обратную часть теоремы. Определим p равенствами (3.42), в которых $\mathbf{x}^i$ заменены на $\mathbf{y}^i$ из (3.52), и вычислим двойственное выражение для $\tilde{p}(\omega)$, где ω — вектор (3.46). По условию ω является $o(p)$ -аппроксимируемой системой $\{\mathbf{y}^i\}$. Поэтому $\tilde{p}(\omega) = 0$. Так же, как в (3.47), устанавливаем, что

$$(3.56) \quad \tilde{p}(\omega) = \sup \left| \int_{F_1} d\mu_1 \right| = 0,$$

где $\sup$ берется по всем наборам $(\mu_1, \dots, \mu_s)$, для которых

$$(3.57) \quad \left| \sum_1^s \int_{F_j} (\zeta - b_i)^{-j} d\mu_j \right| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots$$

Тем более,

$$\gamma(\Pi) = \sup \left| \int_{F_1} d\mu_1 \right| = 0$$

($\sup$ берется по всем наборам мер, для которых имеет место (3.45)). Доказательство завершено.

К сожалению, не удалось установить, следует ли из условия $\gamma(\Pi) = 0$, что F — всюду разрывное множество или хотя бы что $\Pi \in e$. Если бы ответ был утвердительным, то формулировка теоремы упростилась бы.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.12. Возьмем вместо системы $\mathbf{x}^i$ (3.41) систему

$$(3.58) \quad \tilde{\mathbf{x}}^i = \{(\zeta - a_i)^{-1}, -[(\zeta - a_i)^{-1}]', \dots, (-1)^{s-1}[(\zeta - a_i)^{-1}]^{(s-1)}\}$$

и, переопределив p равенствами (3.42) с заменой $\mathbf{x}^i$ на $\tilde{\mathbf{x}}^i$, получим в утверждении 3 нашей теоремы $o(p)$ -полноту системы (3.58). Таким образом, для произвольного набора непрерывных на F_j функций $\varphi_j(\zeta)$: $\varphi_j(\zeta) \in C(F_j)$, $j = 1, \dots, s$, и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, что для суммы простых дробей

$$(3.59) \quad R(z) = \sum_1^k \lambda_i (z - a_i)^{-1}$$

выполняются неравенства:

$$(3.60) \quad \max_{\zeta \in F_1} |\varphi_1(\zeta) - R(\zeta)| < \varepsilon, \quad \max_{\zeta \in F_j} |\varphi_j(\zeta) - R^{(j-1)}(\zeta)| < \varepsilon,$$

$$j = 2, \dots, s, \quad \sum_1^k |\lambda_i| < \varepsilon.$$

В частности, если аналитическая емкость $\gamma(F) = 0$ ($F = F_1!$), то и $\gamma(\Pi) = 0$ и, кроме того, F — всюду разрывное множество и, значит, $\Pi \in e$ согласно лемме 1.9 и примеру 1.10. Следовательно, при $\gamma(F) = 0$ имеет место аппроксимация (3.60), где теперь можно взять и $F_1 = F_2 = \dots = F_s = F$, а это есть цитируемая во введении теорема Е. Ш. Чашкой [46]. Теорема 3.10 дает естественные границы действия этой теоремы и содержит также ее обращение.

СЛЕДСТВИЕ 3.13 (о стирании особенностей). Пусть конфигурация Π вида (3.36) является e -конфигурацией $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_s$, $F_1 = \Phi' \cup \Phi''$, где Φ' и Φ'' находятся на положительном расстоянии друг от друга. Обозначим через Π' и Π'' конфигурации, подобные Π (т.е. вида (3.36)), построенные на частях множеств F_j , попавших в Φ или Φ'' соответственно. Пусть, наконец, $\gamma(\Pi') = 0$. Если $f(z) \in \Gamma_\Pi \cap B^1(G)$ и $\mu_1, \dots, \mu_s$ — меры, представляющие $f(z)$ по формуле (3.37), то

$$(3.61) \quad \mu_j|_{\Phi'} \equiv 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Очевидно, что функция

$$f_1(z) = \sum_1^s \int_{\Phi'} (\zeta - z)^{-j} d\mu_j = f(z) - \sum_1^s \int_{\Phi''} (\zeta - z)^{-j} d\mu_j$$

входит в класс $\Gamma_{\Pi'} \cap B^1(G')$, $G = (\mathbb{C} \setminus \Phi')_\infty$. Поскольку $\gamma(\Pi') = 0$, то $f_1(z) \equiv 0$. Так как $\Pi \in e$, то и $\Pi' \in e$. Поэтому все меры, представляющие $f_1(z)$, должны быть нулями, т.е. выполняются соотношения (3.61). Если не требовать включения $\Pi \in e$, а только условия $\gamma(\Pi') = 0$, то множество Φ' опять стирается ($f_1(z) \equiv 0$), но уже нельзя утверждать, что (3.61) имеет место.

Для рассмотрения произвольных конфигураций приходится сделать более жестким определение “управляющей” $\gamma(\Pi)$ величины. Пусть рассматривается произвольная конфигурация (1.2)–(1.4). Определим величину $\gamma(\Pi)$ следующим образом:

$$(3.62) \quad \gamma(\Pi) = \sup_{f \in \Gamma_\Pi \cap B^1(G)} \max_{1 \leq j \leq s} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right|.$$

В пространстве $X = C(F_1) \times \dots \times C(F_s)$ (1.8) рассмотрим векторы

$$(3.63) \quad \omega_j = (0, \dots, 0, \mathbf{1}_{F_j}, 0, \dots, 0).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.14. Пусть $\{a_i\} \subset G$ – такая же последовательность точек, как в предложении 3.9. Образует векторы $\mathbf{x}^i$ пространства X по формулам

$$(3.64) \quad \mathbf{x}^i = ((\zeta - a_i)^{-n_1}, \dots, (\zeta - a_i)^{-n_s})$$

и определим на линейной оболочке U этих векторов преднорму p равенствами (3.42). Тогда

$$(3.65) \quad \sup_{f \in \Gamma_{\Pi} \cap B^1(G)} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right| = \tilde{p}(\omega_j).$$

Доказательство такое же, как у предложения 3.9. Заметим также, что в левой части (3.65) стоит, как нетрудно видеть, заведомо конечная величина и, значит, $\tilde{p}(\omega)$ в соответствии с § 2 определяется аппроксимативными равенствами типа (3.39), (3.40).

ТЕОРЕМА 3.15. Пусть в конфигурации Π все множества F_j , $j = 1, \dots, s$, всюду разрывные, $\{a_i\} \subset G$ – последовательность точек такая же, как в предложении 3.1, и $\gamma(\Pi) = 0$. Тогда:

1. Не существует функции $f(z) \in \Gamma_{\Pi} \cap B(G)$, у которой в ее представлении (1.4) хоть одна из мер μ_j , $j = 1, \dots, s$, отлична от нуля.
2. Векторы $\mathbf{x}^i$ из (3.64) образуют $o(p)$ -полную систему в пространстве X из (1.8).

Обратно, пусть все F_j в конфигурации Π – произвольные компакты. Если для какой-нибудь последовательности точек $\{b_i\} \subset G$ векторы

$$(3.66) \quad \mathbf{y}^i = ((\zeta - b_i)^{-n_1}, \dots, (\zeta - b_i)^{-n_s}), \quad i = 1, 2, \dots,$$

таковы, что их линейная оболочка $o(p)$ -аппроксимирует векторы ω_j , $j = 1, \dots, s$ (3.63), то $\gamma(\Pi) = 0$. Здесь p определяется равенствами (3.42), где $\mathbf{x}^i$ заменены на $\mathbf{y}^i$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Придется рассуждать совсем иначе, чем при доказательстве теоремы 3.10, и без ссылки на критерий из предложения 1.1. Причины, почему нельзя воспользоваться этим критерием, указывались в замечании 3.11. мы докажем сперва утверждение 2. Поскольку все F_j всюду разрывны, то и их объединение F – всюду разрывно. Пусть $\varphi = (\varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_s(\zeta))$, $\varphi_j(\zeta) \in C(F_j)$, $j = 1, \dots, s$, – произвольный элемент X . Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$ и представим F как сумму попарно не пересекающихся компактов $\Phi^1, \dots, \Phi^t$, диаметры которых меньше η [79]; число η подбираем столь малым, чтобы колебание каждой из функций φ_j на любом из множеств $F_j^k = F_j \cap \Phi^k$ было меньше ε ($k = 1, \dots, t$; $j = 1, \dots, s$). Каждое Φ^k заключим в открытую окрестность D^k так, чтобы замыкания этих окрестностей $\overline{D}^k$ были компактны и попарно не пересекались. Обозначим через ρ минимальное расстояние между $\overline{D}^{k_1}$ и $\overline{D}^{k_2}$, $k_1 \neq k_2$; $\rho > 0$. Рассмотрим конфигурации

$$(3.67) \quad \Pi^k(F_1^k, n_1; F_2^k, n_2; \dots; F_s^k, n_s), \quad k = 1, \dots, t.$$

Очевидно, что $\gamma(\Pi^k) = 0$, $k = 1, \dots, t$. На каждом F_j , $j = 1, \dots, s$, построим функции ψ_j , значения которых постоянны на любом F_j^k , $k = 1, \dots, t$, и

$$(3.68) \quad \max_{\zeta \in F_j} |\varphi_j(\zeta) - \psi_j(\zeta)| < \varepsilon.$$

(Достаточно взять в качестве постоянного значения $\psi_j(\zeta)$ на F_j^k любое из значений $\varphi_j(\zeta)$ на F_j^k — естественно, это делается в случае непустого F_j^k .)

Таким образом,

$$(3.69) \quad \psi_j|_{F_j^k} = q_j^k(\omega_j)|_{F_j^k}, \quad k = 1, \dots, t; \quad j = 1, \dots, s,$$

где запись $|_{F_j^k}$ означает сужение функции на множество F_j^k , а q_j^k суть константы. Рассмотрим в пространстве $X_k = C(F_1^k) \times \dots \times C(F_s^k)$, $k = 1, \dots, t$, вектор:

$$(3.70) \quad \psi|_{\Phi^k} = (\psi_1|_{F_1^k}, \dots, \psi_s|_{F_s^k}) = \sum_{j=1}^s q_j^k(\omega_j)|_{F_j^k}, \quad k = 1, \dots, t.$$

В силу того, что $\gamma(\Pi^k) = 0$, из предложения 3.14 (формулы (3.65)) следует, что каждый вектор $\omega_j|_{\Phi^k} = \omega_j|_{F_j^k}$ $o(p)$ -аппроксимируем в пространстве X_k системой $\mathbf{x}^i|_{\Phi^k}$, $i = 1, 2, \dots$, где $\mathbf{x}^i$ — из формул (3.64). При этом, как следует из предложения 3.14, можно для аппроксимации на Φ^k оставить в системе $\{\mathbf{x}^i\}$ только те векторы, у которых полюсы a_i^k попали в D^k . Таким образом, для взятого $\varepsilon > 0$ найдутся точки $a_1^k, \dots, a_{r_k}^k$ из последовательности $\{a_i\}$, лежащие в V , и коэффициенты $\lambda_1^k, \dots, \lambda_{r_k}^k$ такие, что

$$(3.71) \quad \max_{\zeta \in F_j^k} \left| \psi_j|_{F_j^k}(\zeta) - \sum_{\nu=1}^{r_k} \lambda_\nu^k (\zeta - a_\nu^k)^{-n_j} \right| < \varepsilon, \quad j = 1, \dots, s,$$

$$(3.72) \quad \sum_{\nu=1}^{r_k} |\lambda_\nu^k| < N = \begin{cases} \frac{\varepsilon}{t} \rho^{n_s}, & \text{если } \rho < 1, \\ \frac{\varepsilon}{t}, & \text{если } \rho > 1. \end{cases}$$

Подобное построение осуществим для всех $k = 1, \dots, t$. При $a \in D^k$ и $\zeta \in F \setminus \Phi^k$ имеем:

$$(3.73) \quad |\zeta - a|^{-1} < \rho^{-1}.$$

Пусть ζ — произвольная точка F_j . Для определенности пусть $\zeta \in F_j^{k_0}$. Имеем тогда,

используя (3.71)–(3.73) и (3.68),

$$\begin{aligned}
 (3.74) \quad & \left| \varphi_j(\zeta) - \sum_{k=1}^t \sum_{\nu=1}^{r_k} \lambda_{\nu}^k (\zeta - a_{\nu}^k)^{-n_j} \right| \\
 & < \varepsilon + \left| \psi_j(\zeta) - \sum_{k=1}^t \sum_{\nu=1}^{r_k} \lambda_{\nu}^k (\zeta - a_{\nu}^k)^{-n_j} \right| \\
 & < \varepsilon + \left| \psi_j(\zeta) - \sum_{\nu=1}^{r_{k_0}} \lambda_{\nu}^{k_0} (\zeta - a_{\nu}^{k_0})^{-n_j} \right| + \left| \sum_{k \neq k_0}^t \sum_1^{r_k} \lambda_{\nu}^k (\zeta - a_{\nu}^k)^{n_j} \right| \\
 & \leq 2\varepsilon + (t-1)N\rho^{-n_j} < 3\varepsilon, \\
 (3.75) \quad & \sum_{k=1}^t \sum_{\nu=1}^{r_k} |\lambda_{\nu}^k| < \frac{\varepsilon}{t} \cdot t = \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Неравенства (3.74) и (3.75) доказывают утверждение 2. Утверждение 1 немедленно вытекает из критерия $o(p)$ -плотности, содержащегося в следствии 2.9.

Для доказательства обратной части теоремы замечаем, что, рассуждая как при доказательстве формулы (3.65) предложения 3.14, выведем соотношения

$$(3.76) \quad \sup_{f \in \Gamma_{\Pi} |f(b_i)| \leq 1} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right| = \tilde{p}(\omega_j), \quad j = 1, \dots, s.$$

Однако левая часть в (3.65) не больше, чем левая часть в (3.76). Поэтому, если ω_j являются $o(p)$ -аппроксимируемыми системой $\{\mathbf{y}^i\}$, т.е. $\tilde{p}(\omega_j) = 0$, $j = 1, \dots, s$, то и левые части в (3.65) равны нулю и, значит, по определению $\gamma(\Pi) = 0$. Теорема полностью доказана.

Мы не будем здесь формулировать очевидного аналога следствия 3.13.

§ 4. Вещественные меры. Положительные меры (Классы $\Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}$ и Γ_{Π}^{+})

Пусть Π – произвольная конфигурация (1.2) и $\Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}$ – определенный в (1.19) класс функций $f(z)$ в области G , имеющих представление (1.4) с вещественными мерами $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^{\mathbb{R}}$.

По аналогии с (3.64) положим:

$$(4.1) \quad \gamma^{\mathbb{R}}(\Pi) = \sup_{f \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}} \cap B^1(G)} \max_{1 \leq j \leq s} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right|.$$

В случае простейшей конфигурации $\Pi = (F, 1)$ получаем вариант емкости Коши компакта F , когда рассматриваются потенциалы Коши вещественных мер:

$$(4.2) \quad \gamma^{\mathbb{R}}(F) = \sup \left| \int_F d\mu \right|, \quad \mu \in \mathfrak{M}_F^{\mathbb{R}}, \quad |\hat{\mu}(z)| \leq 1, \quad z \in G.$$

Поскольку в случае вещественных мер удобнее вести дело с пространствами, наделенными вещественными линейными структурами, рассмотрим еще величину

$$(4.3) \quad \beta(\Pi) = \sup \max_{1 \leq j \leq s} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right|,$$

где $\sup$ берется по всем $f \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}$, для которых

$$(4.4) \quad \begin{cases} |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1, \\ |\operatorname{Im} f(z)| \leq 1. \end{cases}$$

Очевидно, что

$$(4.5) \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\beta(\Pi) \leq \gamma^{\mathbb{R}}(\Pi) \leq \beta(\Pi).$$

И, таким образом, условия $\gamma^{\mathbb{R}}(\Pi) = 0$ и $\beta(\Pi) = 0$ совпадают. Теперь естественно ввести еще величину

$$(4.6) \quad \beta_1(\Pi) = \sup \max_{1 \leq j \leq s} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right|, \quad f(z) \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}, \quad |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1,$$

при определении которой из двух неравенств (4.4), выделяющих класс рассматриваемых функций $f(z)$, оставлено только одно.

Рассмотрим, наконец, величину

$$(4.7) \quad \beta_0(\Pi) = \sup_{\substack{f \in \Gamma_{\Pi} \\ |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1}} \max_{1 \leq j \leq s} \left[\left| \operatorname{Re} \int_{F_j} d\mu_j \right|, \left| \operatorname{Re} \int_{F_j} i d\mu_j \right| \right];$$

здесь меры $\mu_j = \mu_j^1 + i\mu_j^2 \in \mathfrak{M}_{F_j}$. Если у этих мер отделить вещественные и мнимые части, то для β_0 получаем:

$$(4.8) \quad \beta_0(\Pi) = \sup_{\substack{f \in \Gamma_{\Pi} \\ |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1}} \max_{1 \leq j \leq s} \max \left[\left| \int_{F_j} d\mu_j^1 \right|, \left| \int_{F_j} d\mu_j^2 \right| \right].$$

Вводить здесь аналогичную величину для тех $f(z) \in \Gamma_{\Pi}$, у которых выполнены оба неравенства (4.4), не имеет смысла, так как она связана с рассмотренной в §3 величиной $\gamma(\Pi)$ неравенствами типа (4.5).

Рассмотрим теперь два банаховых пространства:

$$(4.9) \quad \begin{cases} X_1 = C^{\mathbb{R}}(F_1) \times \cdots \times C^{\mathbb{R}}(F_s), \\ X_2 = \operatorname{Re}[C(F_1) \times \cdots \times C(F_s)]. \end{cases}$$

Пространство X_1 уже фигурировало в §1 (формула (1.21) со слегка измененным обозначением). Пространство X_2 состоит из тех же элементов, что и пространство X из (1.8), являющееся произведением, стоящим в (4.9) в квадратных скобках, но знак

Реподчеркивает, что X_2 рассматривается как вещественное, а не как комплексное линейное пространство. Любой линейный функционал $\Lambda \in X_2^*$ может быть представлен как $\Lambda = \operatorname{Re} l$, где l – линейный функционал из X^* . Линейный функционал $l \in X^*$, что уже неоднократно использовалось, состоит из набора комплексных мер

$$(\mu_1, \dots, \mu_s), \quad \mu_j = \mu_j^1 + i\mu_j^2, \quad \mu_j^i \in \mathfrak{M}_{F_j}^{\mathbb{R}}, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, \dots, s.$$

Пусть $\{a_i\} \subset G$ – счетное множество точек, всюду плотное в $V \setminus F$, где V – некоторая окрестность компакта F . Выделим в наших пространствах следующие системы элементов ($i = 1, 2, \dots$):

$$(4.10) \quad \mathbf{x}^i = \{\operatorname{Re}(\zeta - a_i)^{-n_1}, \dots, \operatorname{Re}(\zeta - a_i)^{-n_s}\} \quad \text{в } X_1,$$

$$(4.11) \quad \mathbf{y}^i = \{\operatorname{Im}(\zeta - a_i)^{-n_1}, \dots, \operatorname{Im}(\zeta - a_i)^{-n_s}\} \quad \text{в } X_1,$$

$$(4.12) \quad \mathbf{x}^i = \{(\zeta - a_i)^{-n_1}, \dots, (\zeta - a_i)^{-n_s}\} \quad \text{в } X_2.$$

Определим выпуклые функционалы p на вещественных линейных оболочках этих систем в соответствии с изложенным в конце § 2:

$$(4.13) \quad p(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}^k) = \sum_1^k |\lambda_i| \quad (\text{в } X_1 \text{ и } X_2),$$

$$(4.14) \quad p(\lambda_1 \mathbf{x}^1 + \dots + \lambda_k \mathbf{x}^k + \sigma_1 \mathbf{y}^1 + \dots + \sigma_k \mathbf{y}^k) = \sum_1^k (|\lambda_i| + |\sigma_i|) \quad (\text{в } X_1).$$

Напомним, наконец, что элементы

$$\omega_j = (0, \dots, 0, \mathbf{1}_{F_j}, 0, \dots, 0)$$

(формула (3.63)) являются элементами и X_1 и X_2 .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.

$$(4.15) \quad \sup_{f \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}, |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right| = \tilde{p}(\omega_j), \quad j = 1, \dots, s,$$

где p определено в (4.13) для системы (4.10).

$$(4.16) \quad \sup_{\substack{f \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}} \\ |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1, |\operatorname{Im} f(z)| \leq 1}} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right| = \tilde{p}(\omega_j), \quad j = 1, \dots, s,$$

где p определено в (4.14) для объединенной системы (4.10), (4.11);

$$(4.17) \quad \begin{cases} \sup_{\substack{f \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}} \\ |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1}} \left| \operatorname{Re} \int_{F_j} d\mu_j \right| = \tilde{p}(\omega_j), & j = 1, \dots, s, \\ \sup_{\substack{f \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}} \\ |\operatorname{Re} f| \leq 1}} \left| \operatorname{Re} \int_{F_j}^i d\mu_j \right| = \tilde{p}(i\omega_j), & j = 1, \dots, s, \end{cases}$$

где p определено в (4.13) для системы (4.12), $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}$, $j = 1, \dots, s$.

СЛЕДСТВИЕ 4.2.

$$\begin{aligned}
 (4.18) \quad \beta(\Pi) &= \max_{1 \leq j \leq s} \tilde{p}(\omega_j) && (\text{система (4.10), (4.11)}), \\
 \beta_1(\Pi) &= \max_{1 \leq j \leq s} \tilde{p}(\omega_j) && (\text{система (4.10)}), \\
 \beta_0(\Pi) &= \max_{1 \leq j \leq s} \max[\tilde{p}(\omega_j), \tilde{p}(i\omega_j)] && (\text{система (4.12)}).
 \end{aligned}$$

Мы не приводим доказательства предложения 4.1 и не расписываем подробно аппроксимационные соотношения для p , так как это делается на основании общей теории §2 аналогично тому, как эта теория применялась в §3 (см., в частности, равенства (3.4)–(3.6), (3.14)–(3.16), (3.39), (3.40)).

ТЕОРЕМА 4.3. Пусть все компакты конфигурации Π всюду разрывны, а $\{a_i\} \subset G$ – счетное множество точек, всюду плотное в $V \setminus F$, где V – какая-нибудь окрестность F . Тогда справедливы следующие утверждения.

- I. Если $\gamma^{\mathbb{R}}(\Pi) = 0$ (или, что то же, $\beta(\Pi) = 0$), то
 - 1) не существует функции $f(z) \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}} \cap B(G)$, у которой хотя бы одна из мер $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^{\mathbb{R}}$ в представлении (1.4) отлична от нуля;
 - 2) система $\{\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i, i = 1, 2, \dots\}$ (4.10), (4.11) $o(p)$ -полна в X_1 (p из (4.14)).
- II. Если $\beta_1(\Pi) = 0$, то
 - 1) не существует функции $f(z) \in \Gamma_{\Pi}^{\mathbb{R}}$, обладающей ограниченной вещественной частью, у которой хотя бы одна из мер $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^{\mathbb{R}}$ в представлении (1.4) отлична от нуля;
 - 2) система $\{\mathbf{x}^i\}$, $i = 1, 2, \dots$ (4.10), $o(p)$ -полна в X_1 (p из (4.13)).
- III. Если $\beta_0(\Pi) = 0$, то
 - 1) не существует функции $f(z) \in \Gamma_{\Pi}$ с ограниченной вещественной частью, у которой хотя бы одна из мер $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}$ в представлении (1.4) отлична от нуля;
 - 2) система $\{\mathbf{x}^i\}$, $i = 1, \dots$ (4.12), $o(p)$ -полна в X_2 (p из (4.13)).

Обратное утверждение. Пусть в конфигурации Π компакты F_j , $j = 1, \dots, s$, произвольны, а $\{b_i\}$ – произвольное счетное множество в области G . Определим в X_1 векторы $\tilde{\mathbf{x}}^i, \tilde{\mathbf{y}}^i$ формулами (4.10), (4.11), где a_i заменены на b_i , $i = 1, 2, \dots$. В X_2 определим векторы $\tilde{\mathbf{x}}^i$ формулами (4.12), где также a_i заменены на b_i , $i = 1, 2, \dots$. В определениях (4.13), (4.14) функционала p заменим $\mathbf{x}^i, \mathbf{y}^i$ на $\tilde{\mathbf{x}}^i, \tilde{\mathbf{y}}^i$. Тогда справедливы следующие утверждения.

- I. Если система $\{\tilde{\mathbf{x}}^i, \tilde{\mathbf{y}}^i\}$, $i = 1, 2, \dots$ (4.10), (4.11), $o(p)$ -аппроксимирует в пространстве X_1 векторы ω_j , $j = 1, \dots, s$, то $\gamma^{\mathbb{R}}(\Pi) = 0$.
- II. Если система $\{\tilde{\mathbf{x}}^i\}$, $i = 1, 2, \dots$ (4.10), $o(p)$ -аппроксимирует в пространстве X_1 векторы ω_j , $j = 1, \dots, s$, то $\beta_1(\Pi) = 0$.
- III. Если система $\{\tilde{\mathbf{x}}^i\}$, $i = 1, 2, \dots$ (4.12), $o(p)$ -аппроксимирует в пространстве X_2 векторы $\omega_j, i\omega_j$, $j = 1, \dots, s$, то $\beta_0(\Pi) = 0$.

Доказательство теоремы 4.3 проводится вполне аналогично доказательству теоремы 3.15, и мы его опустим.

Рассмотрим теперь экстремальные величины, связанные с классом Γ_{Π}^{+} (1.19) функций, представимых формулой (1.4) с положительными мерами $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^{+}$. Можно было бы определить, например, величину $\gamma^{+}(\Pi)$ равенством

$$\gamma^{+}(\Pi) = \sup_{f \in \Gamma_{\Pi}^{+} \cap B^1(G)} \max_{1 \leq j \leq s} \int_{F_j} d\mu_j$$

— по аналогии с $\gamma^{\mathbb{R}}$ и схожим образом определить аналоги $\beta(\Pi)$ и $\beta_1(\Pi)$. Однако удобнее слегка изменить здесь эти определения. Положим

$$(4.19) \quad \gamma^{+}(\Pi) = \sup_{f \in \Gamma_{\Pi}^{+} \cap B^1(G)} \sum_1^s \int_{F_j} d\mu_j,$$

$$(4.20) \quad \beta^{+}(\Pi) = \sup \sum_1^s \int_{F_j} d\mu_j, \quad f \in \Gamma_{\Pi}^{+}, \quad |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1, \quad |\operatorname{Im} f(z)| \leq 1,$$

$$(4.21) \quad \beta_1^{+}(\Pi) = \sup \sum_1^s \int_{F_j} d\mu_j, \quad f \in \Gamma_{\Pi}^{+}, \quad |\operatorname{Re} f(z)| \leq 1.$$

В случае, когда $\Pi = \{F, 1\}$ — величина $\gamma^{+}(\Pi) = \gamma^{+}(F)$ — “положительная”, аналитическая емкость применялась в ряде работ (например, [31], [32], [76], [77]). Ее иногда легче оценить, чем обычную аналитическую емкость $\gamma(F)$ или емкость Коши $\gamma_K(F)$. Однако на самом деле еще удобнее иметь дело с величиной $\beta^{+}(\Pi)$, в частности, с $\beta^{+}(F)$, когда $\Pi = \{F, 1\}$. $\gamma^{+}(\Pi)$ и $\beta^{+}(\Pi)$ связаны неравенствами, аналогичными неравенствам (4.5) для $\gamma^{\mathbb{R}}(\Pi)$ и $\beta(\Pi)$, и обращаются в нуль одновременно.

Поскольку все μ_j — неотрицательны, тот факт, что условие $\gamma^{+}(\Pi) = 0$ (или, что то же, условие $\beta^{+}(\Pi) = 0$) характеризует конфигурации Π , для которых класс $\Gamma_{\Pi}^{+} \cap B(G)$ является тривиальным, становится совершенно очевидным (в отличие от аналогичных заключений в теоремах 3.2, 3.10, 3.15, 4.3). Точно так же очевидна тривиальность соответствующего класса функций при условии $\beta_1^{+}(\Pi) = 0$. Однако следует выяснить аппроксимационное содержание условий $\gamma^{+}(\Pi) = 0$ ($\beta^{+}(\Pi) = 0$) и $\beta_1^{+}(\Pi) = 0$.

Рассмотрим снова пространство X_1 из (4.9) и выделим в нем конус K , состоящий из точек $\mathbf{x} = (\varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_s(\zeta))$, у которых все функции $\varphi_j(\zeta)$ неотрицательны:

$$(4.22) \quad \mathbf{x} = (\varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_s(\zeta)) \in K, \quad \text{если} \quad \varphi_j(\zeta) \geq 0, \quad \zeta \in F_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Внутренние точки K — такие векторы $\mathbf{x}$ (4.22), у которых $\varphi_j(\zeta) > 0$ (строгое неравенство) на F_j , $j = 1, \dots, s$.

ЛЕММА 4.4. *Существуют точки $a \in G$ такие, что вектор*

$$(4.23) \quad \mathbf{x}_0 = (\operatorname{Re}(\zeta - a)^{-n_1}, \dots, \operatorname{Re}(\zeta - a)^{-n_s})$$

является внутренней точкой K .

Лемма 4.4 — облегченный двойник леммы 1.4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем

$$\operatorname{Re}(\zeta - a)^{-k} = \frac{\operatorname{Re}(\zeta - a)^k}{|\zeta - a|^{2k}}.$$

Поэтому если взять точку a “далеко” влево от множества F , а $|\operatorname{Im} a|$ малым в сравнении с $|\operatorname{Re} a|$, то рассуждения, сделанные в доказательстве леммы 1.4, покажут, что все функции, являющиеся координатами x_0 , будут положительными на F и, тем более, на каждом F_j .

Фиксируем вектор $\mathbf{x}_0$ (4.23), являющийся внутренней точкой K .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.5. Пусть $\{a_i\}$ – система точек в G , всюду плотная в $V \setminus F$, где V – некоторая окрестность F . В пространстве X_1 (4.9) рассмотрим системы векторов (4.10), (4.11) и функционал p , определенный на линейных оболочках U этих систем равенствами (4.13) или (4.14). Пусть $\omega = (\psi_1(\zeta), \dots, \psi_s(\zeta))$ – произвольный элемент X_1 . Тогда

$$(4.24) \quad \max_{\substack{f \in \Gamma_{\Pi}^+ \\ |\operatorname{Re} f| \leq 1, |\operatorname{Im} f| \leq 1}} \sum_1^s \int_{F_j} \psi_j d\mu_j = \tilde{p}(\omega),$$

где $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^+$ – меры в представлении $f \in \Gamma_{\Pi}^+$, а $\tilde{p}(\omega)$ определяется следующим образом:

$$(4.25) \quad \tilde{p}(\omega) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_1^k |\lambda_i| + |\sigma_i|$$

и $\inf$ взят по всевозможным последовательностям

$$(4.26) \quad \left\{ \sum_1^k \lambda_i \mathbf{x}^i + \sigma_i \mathbf{y}^i \right\},$$

для которых существуют такие последовательности чисел $\{t_k\}$:

$$(4.27) \quad t_k > 0, \quad t_k \rightarrow 0,$$

что имеют место неравенства

$$(4.28) \quad -\psi_j(\zeta) + t_k \operatorname{Re}(\zeta - a)^{-n_j} + \sum_1^k (\lambda_i \operatorname{Re}[(\zeta - a_i)^{-n_j}] + \sigma_i \operatorname{Im}[(\zeta - a_i)^{-n_j}]) \geq 0.$$

Та же формула (4.24) описывает и задачу

$$(4.29) \quad \max_{\substack{f \in \Gamma_{\Pi}^+ \\ |\operatorname{Re} f| \leq 1}} \sum_1^s \int_{F_j} \psi_j d\mu_j,$$

но теперь в выражениях (4.25), (4.26), (4.28) надо отбросить члены, содержащие σ_i .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем (см. §2) (4.24). Наборы мер $(\mu_1, \dots, \mu_s)$, $\mu_j \in \mathfrak{M}_{F_j}^+$, определяют функционалы $l \in K^+$. То, что $-l \in R(p, 1)$, поскольку p – преднорма, означает выполнение неравенств

$$(4.30) \quad |\operatorname{Re} f(a_i)| \leq 1, \quad |\operatorname{Im} f(a_i)| \leq 1, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $f(z) \in \Gamma_{\Pi}^+$ – функция, построенная по формуле (1.4) для этого набора мер. В силу принципа максимума и минимума для гармонических функций это равносильно тому, что $f(z)$ удовлетворяет неравенствам $|\operatorname{Re} f(z)| \leq 1, |\operatorname{Im} f(z)| \leq 1$ в G . В частности, при значении $z = a$, определяющем по формулам (4.23) внутреннюю точку $\mathbf{x}_0$ конуса K , получаем

$$(4.31) \quad \operatorname{Re} f(a) = \sum_1^s \int_{F_j} \operatorname{Re}[(\zeta - a)^{-n_j}] d\mu_j \leq 1.$$

Поскольку $\operatorname{Re}[(\zeta - a)^{-n_j}] > 0, \zeta \in F_j, j = 1, \dots, s$, то из (4.31) заключаем, что вариации всех μ_j , удовлетворяющих (4.30), равномерно ограничены. Поэтому существует экстремальный набор мер $(\mu_1^*, \dots, \mu_s^*)$ в (4.24), и это подчеркнуто в записи $\sup$ вместо $\sup$. Равенство (4.24) – это равенство (2.47) теоремы 2.21, где теперь наверняка $\tilde{p}(\omega) < \infty$. Поэтому $\tilde{p}(\omega)$ определяется равенством (2.46) и включением (2.45) леммы 2.19. Условия (4.25)–(4.28) – просто запись (2.46) и (2.45) в нашей ситуации. Абсолютно так же ведутся рассуждения для задачи (4.29). В формулах (4.25)–(4.28) теперь следует просто убрать все члены с σ_i .

Пусть

$$(4.32) \quad \omega_0 = (\mathbf{1}, \dots, \mathbf{1}).$$

СЛЕДСТВИЕ 4.6.

$$(4.33) \quad \left. \begin{array}{l} \beta^+(\Pi) \\ \beta_1^+(\Pi) \end{array} \right\} = \tilde{p}(\omega_0).$$

Конечно, $\tilde{p}(\omega_0)$ для $\beta^+(\Pi)$ и $\beta_1^+(\Pi)$ выглядят по-разному. Не будем, однако, воспроизводить для этого специального случая $\omega = \omega_0$ формулы (4.25)–(4.28).

ТЕОРЕМА 4.7. Пусть Π – какая-то конфигурация, $\{a_i\}$ – как в предложении 4.5. Если $\gamma^+(\Pi) = 0$ (или, что то же, $\beta^+(\Pi) = 0$), то для произвольного $\omega = (\psi_1(\zeta), \dots, \psi_s(\zeta)) \in X_1$ и произвольного $\varepsilon > 0$ найдутся такие вещественные коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ и число $t > 0$, что будут выполняться неравенства (4.28) (с $t_k = t$) и при этом

$$(4.34) \quad t + \sum_1^k (|\lambda_i| + |\sigma_i|) < \varepsilon.$$

Если $\beta_1^+(\Pi) = 0$, то будут выполняться неравенства (4.28), где нет членов с σ_i , и неравенство (4.34), также с отброшенными σ_i .

Обратное утверждение. Пусть $\{b_i\}$ – какая-то последовательность точек области G . Если при любом $\varepsilon > 0$ можно найти $t > 0$, $\{\lambda_i\}$, $\{\sigma_i\}$, для которых имеет место (4.34), и выполняются неравенства:

$$(4.35) \quad -1 + t \operatorname{Re}(\zeta - a)^{-n_j} + \sum_i (\lambda_i \operatorname{Re}(\zeta - b_i)^{-n_j} + \sigma_i \operatorname{Im}(\zeta - b_i)^{-n_j}) \geq 0,$$

то $\beta^+(\Pi) = 0$. Если (4.35) и (4.34) удовлетворяются при $\sigma_i = 0$, то $\beta_1^+(\Pi) = 0$.

Прямое утверждение теоремы вытекает из следствия 2.25. Действительно, как мы рассудили при выводе предложения 4.5, включение $-l \in R(p, 1)$ означает, что выполняются неравенства (4.30) или (для $\beta_1(\Pi)$) – первое из них. Но тогда $l \equiv 0$. Таким образом, включения $l \in K^+$ и $-l \in R(p, 1)$ влекут сейчас, что $l \equiv 0$. Неравенства (4.28) и (4.34) – расписывание для нашего случая той $(r, o(p))$ -полноты, о которой говорится в следствии 2.25.

Чтобы доказать обратное утверждение теоремы, замечаем, что (4.34) и (4.35) влекут за собой соотношение

$$(4.36) \quad \max_{f \in \Gamma_{\Pi}^+, |\operatorname{Re} f(b_i)| \leq 1, |\operatorname{Im} f(b_i)| \leq 1} \sum_1^s \int_{F_j} d\mu_j = 0.$$

Чтобы в этом убедиться, следует построить векторы $\tilde{\mathbf{x}}^i, \tilde{\mathbf{y}}^i$, как в обратном утверждении теоремы 4.3, и функционал p рассматривать на их линейной оболочке. Тогда условие $-l \in R(p, 1)$ будет обозначать выполнение неравенств $|\operatorname{Re} f(b_i)| \leq 1, |\operatorname{Im} f(b_i)| \leq 1, i = 1, 2, \dots$

Неравенства (4.34), (4.35) теперь показывают, что для так переопределенного на линейную оболочку системы $\{\tilde{\mathbf{x}}^i, \tilde{\mathbf{y}}^i\}$ функционала p будет $\tilde{p}(\omega_0) = 0$. Согласно (2.47) это $\tilde{p}(\omega_0)$ как раз и есть величина (4.36). Но если имеет место (4.36), то тем более должно быть $\beta^+(\Pi) = 0$ (см. определение (4.20)).

Для $\beta_1^+(\Pi)$ рассуждение точно такое же; надо рассматривать лишь “половинную” систему $\{\tilde{\mathbf{x}}^i\}$.

Для частного случая, когда $\Pi = \{F, 1\}$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 4.8. Если $\gamma^+(\Pi) = 0$, то для произвольного $\psi(\zeta) \in C^{\mathbb{R}}(F)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие вещественные коэффициенты $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ и число $t > 0$, что будет выполняться неравенство (4.34) и

$$(4.37) \quad -\psi(\zeta) + t \operatorname{Re}(\zeta - a)^{-1} + \sum_1^k (\lambda_i \operatorname{Re}(\zeta - a_i)^{-1} + \sigma_i \operatorname{Im}(\zeta - a_i)^{-1}) \geq 0.$$

Здесь $\{a_i\}$ такие же, как в предложении 4.5, точка $a \in G$ такова, что $\operatorname{Re}(\zeta - a)^{-1} > 0, \zeta \in F$.

Обратное утверждение. Если для какой-либо последовательности $\{b_i\} \subset G$ и функции $\psi(\zeta) \equiv 1, \zeta \in F$, при любом $\varepsilon > 0$ можно найти вещественные числа $t > 0, \lambda_1, \dots, \lambda_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ такие, что имеют место неравенства (4.37) (с заменой точек a_i на b_i) и (4.34), то $\gamma^+(F) = 0$.

На том же пути можно получить новый достаточный признак для равенства $\gamma(F) = 0$, где $\gamma(F)$ – обычная аналитическая емкость.

ТЕОРЕМА 4.9. Если для какой-либо последовательности $\{b_i\} \subset G$ и функции $\psi(\zeta) \equiv 1$, $\zeta \in F$, при любом $\varepsilon > 0$ можно найти вещественные числа $t > 0$, $\lambda_1, \dots, \lambda_k, \sigma_1, \dots, \sigma_k$ такие, что имеют место неравенства (4.37) (с заменой a_i на b_i) и

$$(4.38) \quad t + \sum_1^k |L(b_i)|(|\lambda_i| + |\sigma_i|) < \varepsilon,$$

то $\gamma(F) = 0$. Здесь $L(z)$ — функция Гарабедяна и точка a — такова, что $\operatorname{Re}(\zeta - a)^{-1} > 0$, $\zeta \in F$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если $f^*(z)$ — функция Альфорса для области G , то

$$(4.39) \quad f^*(z) = \frac{\widehat{\mu}^*(z)}{L(z)},$$

где μ^* — некоторая положительная мера на F . Этот факт составляет содержание одной из теорем, установленных в свое время автором [13], [14], [36]. Поэтому

$$(4.40) \quad \gamma(F) = \sup \left| \int_F d\mu \right|, \quad \mu \in \mathfrak{M}_F^+, \quad |\widehat{\mu}(z)| \leq |L(z)|.$$

Рассмотрим вместо $\gamma(F)$ величину $\gamma_0(F)$:

$$(4.41) \quad \gamma_0(F) = \sup \int_F d\mu, \quad \mu \in \mathfrak{M}_F^+, \quad |\operatorname{Re} \widehat{\mu}(z)| \leq |L(z)|, \quad |\operatorname{Im} \widehat{\mu}(z)| \leq |L(z)|.$$

Ясно, что $\gamma(F) = 0$ тогда и только тогда, когда $\gamma_0(F) = 0$.

Определим далее на подпространстве U , являющемся линейной оболочкой системы (3.18), функционал p_1 равенством (3.16), в котором, однако, вместо точек $\{a_i\}$ взяты точки $\{b_i\}$. После этого следует использовать общие построения §2 так же, как при доказательстве предложения 4.5 и теоремы 4.7.

Полученный в теореме 4.9 признак для $\gamma(F) = 0$ “сильнее” содержащегося в теореме 3.2' (в обратном утверждении этой теоремы): добиться (4.37) “проще”, чем той аппроксимации, про которую говорится в теореме 3.2'. По той же причине основная часть теоремы 3.2' дает больше, чем то утверждение, которое можно было бы получить, исходя из (4.41) и рассуждая, как при выводе предложения 4.5 и теоремы 4.7. (Почему мы и не привели соответствующего утверждения.) Следует подчеркнуть, что “парадоксальная” ситуация, о которой говорилось после теоремы 3.2', имеет место и сейчас: ведь получив из условий теоремы 4.9, что $\gamma(F) = 0$, мы, следовательно, устанавливаем и равенство $L(z) \equiv 1$. Но тогда (4.38) имеет место без весов $L(a_i)$.

Заметим в заключение, что если положить $\nu_i = \lambda_i - i\sigma_i$, то

$$\lambda_i \operatorname{Re}(\zeta - a_i)^{-1} + \sigma_i \operatorname{Im}(\zeta - a_i)^{-1} = \operatorname{Re}[\nu_i(\zeta - a_i)^{-1}],$$

и тогда все суммы (4.28), (4.34), (4.35), (4.37), (4.38) перепишутся несколько более компактным образом.

§ 5. Аналоги аналитической емкости при других ограничениях на поведение аналитических функций

До сих пор мы определяли аналоги аналитической емкости, исходя из того, что рассматриваемые классы состояли из аналитических функций, ограниченных в области (или, по крайней мере, имеющих ограниченную вещественную часть). Однако можно исходить из других ограничений, накладываемых на поведение изучаемых классов при подходе к границе. Такими ограничениями могут быть, например, условия ограниченности некоторых интегральных средних, т.е. условия, аналогичные тем, которые выделяют классы Харди или родственные им классы Смирнова (см. [80]–[85]).

Рассмотрение соотношений, связывающих обычную аналогическую емкость и ее аналоги в других классах функций, интересно не только само по себе, но иногда приводит к серьезным продвижениям в “метрической” части теории. Например, как мы уже указывали во введении, соотношение Гарабедяна (см. [10], [14], [22], [36]) между обычной аналитической емкостью и ее аналогом для класса Смирнова E_2 позволило вместе с другими средствами доказать так называемую гипотезу Данжуа: на спрямляемой кривой условия $\gamma(F) = 0$ и $\text{mes } E = 0$ – равносильны (здесь $\text{mes } F$ – линейная мера Лебега на кривой, на которой расположен компакт F) – см. [33], [34], [36].

Пусть область G исчерпывается монотонно возрастающей последовательностью областей $\{G_i\}$ со следующими свойствами: $\infty \in G_i$, $i = 1, 2, \dots$, $\overline{G_i} \subset G_{i+1}$, G_i – конечносвязная область и ее граница $L_i = \partial G_i$ состоит из конечного числа простых замкнутых жордановых спрямляемых кривых, которые попарно не пересекаются.

При $\delta > 0$ через $E_\delta = E_\delta\{L_i\}$ обозначим класс аналитических в G функций $f(z)$, $f(\infty) = 0$, для которых

$$(5.1) \quad \int_{L_i} |f(z)|^\delta |dz| \leq T(f) < +\infty, \quad i = 1, 2, \dots,$$

где $T(f)$ – константа. В случае конечносвязной области G классы $E_\delta\{L_i\}$ – хорошо изученные классы Смирнова; известно, в частности, что их определение не зависит от выбранной последовательности $\{L_i\}$ ([80], [81], [84], [85]). В произвольной области эти классы изучены гораздо меньше (см., в частности, [14]) и не известно, зависит ли их определение от выбранного исчерпания $\{G_i\}$. Подкласс E_δ , состоящий из функций, для которых в (5.1) константа $T(f) = 1$, обозначим через E_δ^1 . В случае $\delta = \infty$ под E_∞ следует понимать класс функций, ограниченных на всех L_i одной и той же константой, и, таким образом, $E_\infty = B(G)$, а $E_\infty^1 = B^1(G)$. Будем через $L_\Delta(L_i)$, $1 \leq \Delta < \infty$, обозначать, как обычно, пространство комплекснозначных функций $\beta(z)$, для которых

$$(5.2) \quad \|\beta\| = \left\{ \int_{L_i} |\beta(z)|^\Delta |dz| \right\}^{1/\Delta} < +\infty.$$

В случае $\Delta = \infty$ $L_\infty(L_i) \stackrel{\text{def}}{=} C(L_i)$ – пространство непрерывных на L_i функций с обычной нормой.

Пусть Π – какая-то конфигурация (1.2), область G из (1.3) и пространство X определяется произведением (1.8). Для пространств $X_i = L_\Delta(L_i)$, $i = 1, 2, \dots$, определим операторы $B_i: X_i \rightarrow X$ формулами

$$(5.3) \quad B_i: \beta(z) \in X_i \rightarrow \left(\int_{L_i} (\zeta - z)^{-n_1} \beta(z) dz, \dots, \int_{L_i} (\zeta - z)^{-n_s} \beta(z) dz \right).$$

В частности, когда конфигурация Π имеет вид (3.36),

(5.4)

$$B_i: \beta(z) \in X_i \rightarrow \left(\int_{L_i} (\zeta - z)^{-1} \beta(z) dz, \int_{L_i} (\zeta - z)^{-2} \beta(z) dz, \dots, \int_{L_i} (\zeta - z)^{-s} \beta(z) dz \right).$$

Отправляясь от оператора B_i , применим конструкцию, описываемую формулами (2.51)–(2.56). Мы построим тогда подпространство $U \subset X$ и в нем преднорму $p(u)$. Элементами $u(\zeta)$ подпространства U будут конечные суммы вида:

$$(5.5) \quad u(\zeta) = B_1 \beta_1 + \dots + B_N \beta_N, \quad \beta_i \in L_\Delta(L_i),$$

а преднорма $p(u)$ определена как

$$(5.6) \quad p(u) = \inf \sum_i \|\beta_i\|,$$

где $\inf$ взят по всем суммам (5.5) (с различными N и β_i), дающим данный элемент $u(\zeta) \in U$.

Рассмотрим теперь аппроксимацию элементов $\omega_j \in X$, $j = 1, \dots, s$, определяемых формулами (3.63), подпространством U . Соотношение двойственности (2.14) теоремы 2.6 дает:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.1. Пусть $1 \leq \delta \leq \infty$, $1 \leq \Delta \leq \infty$ и $\delta^{-1} + \Delta^{-1} = 1$, а Π – произвольная конфигурация (1.2). Тогда

$$(5.7) \quad \sup_{f \in \Gamma_\Pi \cap E_\delta^1} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right| = \tilde{p}(\omega_j), \quad j = 1, \dots, s,$$

где

$$(5.8) \quad \tilde{p}(\omega_j) = \inf \lim_{k \rightarrow \infty} \left(\sum_1^{N_k} \|\beta_i\| \right),$$

inf взят по всем последовательностям $\{u_k\} \subset U$,

$$(5.9) \quad u_k = \sum_1^{N_k} B_i \beta_i, \quad \beta_i \in L_\Delta(L_i), \quad i = 1, \dots, N_k,$$

которые сходятся в X к ω_j :

$$(5.10) \quad \|\omega_j - u_k\|_X \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

(Заметим, что, как следует из левой части формулы (5.7), не может быть, чтобы $\tilde{p}(\omega_j) = \infty$.)

Желая ввести аналоги аналитической емкости в разбираемых сейчас ситуациях, рассмотрим сперва конфигурацию Π вида (3.36) и определим величину $\gamma(\Pi, \delta)$, где $\delta > 0$ – некоторое число, формулой:

$$(5.11) \quad \gamma(\Pi, \delta) = \sup_{f \in \Gamma_\Pi \cap E_\delta^1} |f'(\infty)| = \sup_{f \in \Gamma_\Pi \cap E_\delta^1} \left| \int_{F_1} d\mu_1 \right|,$$

аналогичной формуле (3.38) для $\gamma(\Pi)$. Поскольку нет гарантии, что класс $E_\delta\{L_i\}$ не зависит от взятой последовательности $\{G_i\}$, более правильным являлось бы более длинное обозначение $\gamma(\Pi, E_\delta^1(L_i))$. В силу сказанного выше о классе E_∞^1 имеем $\gamma(\Pi, \infty) = \gamma(\Pi)$. Из предложения 5.1 получаем, в частности,

СЛЕДСТВИЕ 5.2. При $\delta \geq 1$

$$(5.12) \quad \gamma(\Pi, \delta) = \tilde{p}(\omega_1).$$

Следующая теорема является аналогом (и обобщением) теоремы 3.10, в которую она переходит при $\delta = \infty$.

ТЕОРЕМА 5.3. Пусть конфигурация Π имеет вид (3.36), причем $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_s$ и $1 \leq \delta \leq \infty$. Тогда:

1. Если $\gamma(\Pi, \delta) = 0$, то всякая функция $f(z) \in \Gamma_\Pi \cap E_\delta$ тождественно нулю.
2. Если $\gamma(\Pi, \delta) = 0$ и $\Pi \in e$, то все меры μ_j в представлении $f(z) \in \Gamma_\Pi \cap E_\delta$ по формуле (3.37) равны нулю: $\mu_j \equiv 0$, $j = 1, \dots, s$.
3. Если $\gamma(\Pi, \delta) = 0$ и $\Pi \in e$, то подпространство U из функций вида (5.5), где операторы B_i имеют вид (5.4), а $\Delta^{-1} + \delta^{-1} = 1$, является $o(p)$ -плотным в пространстве X (p определено в (5.6)).

Обратно: пусть Π – конфигурация (3.36) (условие $F_1 \supseteq F_2 \supseteq \dots \supseteq F_s$ не обязательно). Если подпространство U $o(p)$ -аппроксимирует в X элемент ω_1 , то $\gamma(\Pi, \delta) = 0$.

Доказательство утверждений прямой части теоремы протекает в точности так же, как в теореме 3.10, поскольку функция $z^{\nu-1}$ и ее производные ограничены вблизи множества F . Обратная часть теоремы содержится в следствии 5.2.

Для того чтобы перейти к произвольной конфигурации Π , придется сделать некоторые изменения. Это связано с необходимостью оценивать значения операторов B_i через норму функций $\beta(z)$ в $L_\Delta(L_i)$. По сути дела все сводится к оценке $\int_{L_i} |\beta(z)| |dz|$

через $\int_{L_i} |\beta(z)|^\Delta |dz|$, $\Delta > 1$. Но при возрастании длин L_i к бесконечности (что никоим образом не исключено) это невозможно. Поэтому мы теперь предположим, что каждая из границ ∂G_ν нашей последовательности областей $\{G_\nu\}$ разбита на дуги, длина каждой из которых не превосходит единицы. Совокупность всех получившихся дуг снова обозначаем $\{L_i\}$. Не обязательно даже считать, что эти дуги составляют полную границу той или иной из областей G_ν . Просто даны последовательности дуг $\{L_i\}$, лежащих на границах областей G_ν и имеющих длины не больше единицы. После этого определение (5.1) классов $E_\delta\{L_i\}$, $E_\delta^1\{L_i\}$, обозначения пространств $L_\Delta(L_i)$, нормы (5.2) в них, операторов B_i (5.3) или (5.4), формулы (5.5), (5.6) перетолковываются очевидным образом. Очевидно также, что при любом $\delta > 0$ $B(G) \subset E_\delta\{L_i\}$ и $B^1(G) \subset E_\delta^1\{L_i\}$. Предложение 5.1 сохраняется. При этом если система дуг $\{L_i\}$ покрывает границу хоть одной из областей G_ν , то все величины в (5.8) конечны. Определим теперь величину $\tilde{\gamma}(\Pi, \delta) = \tilde{\gamma}(\Pi, E_\delta^1\{L_i\})$ иначе, чем в (5.11) определялась $\gamma(\Pi, \delta)$:

$$(5.13) \quad \tilde{\gamma}(\Pi, \delta) = \sup_{f \in \Gamma_\Pi \cap E_\delta^1\{L_i\}} \max_{1 \leq j \leq s} \left| \int_{F_j} d\mu_j \right|.$$

Это определение соответствует определению (3.62) для $\gamma(\Pi)$ в случае произвольной конфигурации Π , причем $\tilde{\gamma}(\Pi, \delta) \geq \gamma(\Pi)$.

ТЕОРЕМА 5.4. Пусть в конфигурации Π все множества F_j , $j = 1, \dots, s$, всюду разрывны и $\tilde{\gamma}(\Pi, \delta) = 0$, $1 \leq \delta \leq \infty$. Тогда:

1. Не существует функции $f(z) \in \Gamma_\Pi \cap E_\delta\{L_i\}$, у которой хоть одна из мер μ_j , $j = 1, \dots, s$, в ее представлении (1.4) отлична от нуля.
2. Подпространство U из функций вида (5.5), где операторы B_i имеют вид (5.3), и $\Delta^{-1} + \delta^{-1} = 1$, $o(p)$ -плотно в пространстве X ; функционал $p(u)$ определен в (5.6).

Обратно, если элементы ω_j , $j = 1, \dots, s$, $o(p)$ -аппроксимируются подпространством U , то $\tilde{\gamma}(\Pi, \delta) = 0$ (F_j – любые, не обязательно всюду разрывные).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Будем следовать схеме доказательства теоремы 3.15. Однако имеющиеся отличия заставляют провести рассуждения подробно. Докажем сперва утверждение 2. Пусть $\varphi = (\varphi_1(\zeta), \dots, \varphi_s(\zeta))$, $\varphi_j(\zeta) \in C(F_j)$, $j = 1, \dots, s$, – произвольный элемент пространства X . Зададимся произвольным $\varepsilon > 0$. Представим всюду разрывное множество F из (1.3) как сумму попарно непересекающихся компактов $\Phi^1, \dots, \Phi^t$, диаметры которых меньше η , причем $\eta > 0$ выбрано так, чтобы колебание любой функции $\varphi_j(\zeta)$ на каждом из множеств $F_j^k = F_j \cap \Phi^k$ было меньше ε , $k = 1, \dots, t$; $j = 1, \dots, s$. Рассмотрим конфигурации

$$(5.14) \quad \Pi^k = (F_1^k, n_1; \dots; F_s^k, n_s), \quad k = 1, \dots, t.$$

Заклучим каждое множество Φ^k в открытую окрестность D^k таким образом, чтобы замыкание $\overline{D}^k$ попарно не пересекались, и пусть $\rho_0 > 0$ – минимальное расстояние между парами $\overline{D}^k$ и $\overline{D}^{k_1}$, $k \neq k_1$. Обозначим через $\{L_i^k\}$ совокупность дуг системы $\{L_i\}$, попавших в D^k . Остальные дуги системы $\{L_i\}$ либо лежат в других областях D^{k_1} , $k_1 \neq k$, либо расположены на границах конечного числа из областей $\{G_\nu\}$, исчерпывающих G . Пусть эти области будут $G_1, \dots, G_{\nu_0}$, и пусть $\rho_1 > 0$ – минимальное расстояние от ∂G_ν , $\nu = 1, \dots, \nu_0$, до множества F . Определим число

$$(5.15) \quad \rho = \min(\rho_0, \rho_1, 1) > 0.$$

Докажем, что при любом $k = 1, \dots, t$

$$(5.16) \quad \tilde{\gamma}(\Pi^k, \delta) \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\gamma}(\Pi^k, E_\delta^1\{L_i^k\}) = 0.$$

Если бы $\tilde{\gamma}(\Pi^k, \delta) \neq 0$, то существовала бы функция $f(z) \in \Gamma_{\Pi^k} \cap E_\delta^1\{L_i^k\}$, для которой в ее представлении (1.4) по конфигурации Π^k некоторая мера μ_j была такой, что

$$(5.17) \quad \int_{F_j^k} d\mu_j \neq 0.$$

В силу сказанного выше все дуги системы $\{L_i\}$, не попавшие в $\{L_i^k\}$, лежат внутри области аналитичности $f(z)$, не приближаясь к множествам F_j^k , $j = 1, \dots, s$. Поэтому в соответствии с (5.15) можно найти такое число $M < 1$, что $Mf(z)$ входит не только в $E_\delta^1\{L_i^k\}$, но и в $L_\delta^1\{L_i\}$. Кроме того, $\Gamma_{\Pi^k} \subset \Gamma_\Pi$ и поэтому $Mf(z) \in E_\delta^1\{L_i\} \cap \Gamma_\Pi$. Но тогда (5.17) говорит, что $\tilde{\gamma}(\Pi, \delta) \neq 0$, а это противоречит условию. Итак, при всех $k = 1, \dots, t$ имеет место (5.16).

Фиксируем номер k и определим пространство

$$(5.18) \quad Z_k = C(F_1^k) \times \cdots \times C(F_s^k).$$

Выделим в нем подпространство U_k с преднормой $p_k(u)$, $u \in U_k$, построенной по формулам (5.3), (5.5), (5.6), в которых теперь контуры L_i заменены на L_i^k , функции β_i приобретают верхний индекс k : β_i^k . Пусть ω_j^k – сужение вектора ω_j на Φ^k ; ω_j^k – элемент Z_k . В силу (5.6) и предложения 5.1 получаем, что

$$(5.19) \quad \tilde{p}_k(\omega_j^k) = 0, \quad j = 1, \dots, s.$$

Это означает, что каждый из векторов ω_j^k в пространстве Z_k является $o(p_k)$ -аппроксимируемым подпространством U_k . Но тогда и любая линейная комбинация элементов ω_j^k , $j = 1, \dots, s$, $o(p_k)$ -аппроксимируема в Z_k элементами U_k . Если φ^k – вектор, являющийся сужением на Φ^k вектора φ , то в силу того, что колебание всякой компоненты φ на Φ^k не превосходит заданного ε , мы можем подобрать вектор Ω^k , являющийся линейной комбинацией ω_j^k (т.е. имеющий в качестве каждой координаты некоторую постоянную) такой, что

$$(5.20) \quad \|\varphi^k - \Omega^k\|_{Z_k} < \varepsilon.$$

В силу сказанного выше вектор Ω^k $o(p_k)$ -аппроксимируем в Z_k подпространством U_k . Это в силу определения преднормы p_k означает, что найдется элемент $u^k \in U_k$ такой, что

$$(5.21) \quad \|\varphi^k - u^k\| \leq \|\varphi^k - \Omega^k\| + \|\Omega^k - u^k\| < 2\varepsilon,$$

$$(5.22) \quad \begin{cases} u^k = \sum_1^{N_k} B_i^k \beta_i^k, & \beta_i^k \in L_\Delta(L_i^k), \\ B_i^k \beta_i^k = \left(\int_{L_i^k} (\zeta - z)^{-n_1} \beta_i^k(z) dz, \dots, \int_{L_i^k} (\zeta - z)^{-n_s} \beta_i^k(z) dz \right), \end{cases}$$

$$(5.23) \quad p_k(u^k) = \sum_1^{N_k} \|\beta_i^k\| < \varepsilon \rho^{n_s} t^{-1}.$$

Из формулы (5.22), определения норм β_i и выбора $\rho < 1$ следует, что при $\zeta \in \Phi^l$, $l \neq k$, имеет место оценка:

$$(5.24) \quad \|B_i^k \beta_i^k(\zeta)\|_{Z_l} \leq \|\beta_i^k\| \rho^{-n_s}.$$

Здесь Z_l – пространства, построенные для Π^l аналогично Z_k . Рассмотрим теперь в пространстве X аппроксимацию вектора φ суммой $u = \sum_1^t u^l$, где u^l при $l \neq k$ построены аналогично тому, как был построен элемент u^k . Берем произвольную точку

$\zeta \in F$. Пусть $\zeta \in \Phi^k$. С использованием (5.23) и (5.24), в которых k заменено на произвольное $l \neq k$, получаем:

$$(5.25) \quad \begin{aligned} \|\varphi - u\| &= \left\| \varphi - \sum_1^t u^l \right\| \leq \max_k \left[\|\varphi^k - u^k\| + \sum_{\substack{l \neq k \\ \zeta \in \Phi^k}} \|u^l(\zeta)\| \right] \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon \rho^{n_s} t^{-1} \rho^{-n_s} (t-1) < 3\varepsilon, \end{aligned}$$

$$(5.26) \quad p(u) = \sum_{k,i} \|\beta_i^k\| < \varepsilon \rho^{n_s} t^{-1} t < \varepsilon.$$

Второе утверждение теоремы установлено, а первое следует теперь из соотношения (2.14) теоремы двойственности 2.6; можно также прямо сослаться на следствие 2.9 этой теоремы. Обратное утверждение содержится в предложении 5.1 и определении (5.13).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. М.: ИЛ, 1962.
- [2] Ahlfors L. Bounded analytic functions // Duke Math. J. 1947. V. 14. №1. P. 1–11.
- [3] Painlevé P. Sur les lignes singulières de fonctions analytiques. Thèse. // Ann. Fac. Sci. Toulouse. 1888. V. 2. P. 1–130.
- [4] Painlevé P. Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles professées à Stockholm. Paris: Hermann, 1897.
- [5] Коллингвуд Э., Ловатер А. Теория предельных множеств. М.: Мир, 1971.
- [6] Хавинсон С. Я. Множества устранимых особенностей аналитических функций. М.: МИСИ им. В. В. Куйбышева, факультет повышения квалификации, 1982.
- [7] Голузин Г. М. Геометрическая теория функции комплексного переменного. М.: Наука, 1966.
- [8] Ahlfors L., Beurling A. Conformal invariants and function-theoretic null sets // Acta Math. 1950. V. 83. №1. P. 101–129.
- [9] Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств и некоторые ее свойства // Докл. АН СССР. 1958. Т. 123. №5. С. 778–781.
- [10] Garabedian P. R. Schwarz's lemma and the Szegő kernel function // Trans. Amer. Math. Soc. 1949. V. 67. №1. P. 1–35.
- [11] Garabedian P. R. The classes L_p and conformal mapping // Trans. Amer. Math. Soc. 1950. V. 69. №3. P. 392–415.
- [12] Хавинсон С. Я. Об аналитической емкости плоских множеств, о некоторых классах аналитических функций и об экстремальной функции в лемме Шварца для произвольных областей // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. №5. С. 896–898.
- [13] Хавинсон С. Я. Аналитическая емкость множеств и распределения масс // Докл. АН СССР. 1959. Т. 128. №6. С. 1129–1131.
- [14] Хавинсон С. Я. Об аналитической емкости множеств, совместной нетривиальности различных классов аналитических функций и лемме Шварца в произвольных областях // Матем. сб. 1961. Т. 54. №1. С. 3–50.
- [15] Хавинсон С. Я. Об аппроксимации на множествах аналитической емкости нуль // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. №1. С. 44–46.
- [16] Витушкин А. Г. Аналитическая емкость множеств в задачах теории приближений // УМН. 1967. Т. 22. №6. С. 141–199.
- [17] Zalcman L. Analytic Capacity and Rational Approximation. Berlin: Springer-Verlag, 1968. (Lecture Notes in Math. V. 50.)

- [18] Гончар А. А., Мергелян С. Н. Теория приближений функций комплексного переменного // История отечественной математики. Т. 4. М.: АН СССР, АН УССР, 1970. С. 112–193.
- [19] Витушкин А. Г. Равномерные приближения голоморфными функциями // Современные проблемы математики (Итоги науки). Т. 4. М.: ВИНТИ, 1975. С. 5–13.
- [20] Мельников М. С., Синанян С. О. Вопросы теории приближений функций одного комплексного переменного // Современные проблемы математики (Итоги науки). Т. 4. М.: ВИНТИ, 1975. С. 143–250.
- [21] Гамелин Т. Равномерные алгебры. М.: Мир, 1973.
- [22] Garnett J. Analytic Capacity and Measure. Berlin: Springer-Verlag, 1968. (Lecture Notes in Math. V. 297.)
- [23] Витушкин А. Г. Пример множества положительной длины, но нулевой аналитической емкости // Докл. АН СССР. 1959. Т. 127. № 2. С. 246–249.
- [24] Garnett J. Positive length but zero analytic capacity // Proc. Amer. Math. Soc. 1970. V. 24. № 4. P. 696–699.
- [25] Иванов Л. Д. Вариации множеств и функций. М.: Наука, 1975.
- [26] Хавинсон С. Я. О представлении и приближении функций на редких множествах // Современные проблемы теории аналитических функций. М.: Наука, 1966. С. 314–318.
- [27] Хавин В. П. Об аналитических функциях, представимых интегралом типа Коши–Стилтьеса // Вестн. Ленингр. ун-та. 1958. № 1. С. 66–79.
- [28] Хавин В. П. О пространстве ограниченных регулярных функций // Докл. АН СССР. 1960. Т. 131. № 1. С. 40–43.
- [29] Хавин В. П. О пространстве ограниченных регулярных функций // Сиб. матем. журн. 1961. Т. 2. № 4. С. 622–638.
- [30] Хавинсон С. Я. Об аппроксимации с учетом величин коэффициентов аппроксимирующих агрегатов // Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1961. Т. 60. С. 304–324.
- [31] Murai T. A Real Variable Method for the Cauchy Transform, and Analytic Capacity. Berlin: Springer-Verlag, 1988. (Lecture Notes in Math. V. 1307.)
- [32] Эйдерман В. Я. Мера Хаусдорфа и емкость, ассоциированная с потенциалами Коши // Матем. заметки. 1998. Т. 63. № 6. С. 923–934.
- [33] Marshall D. E. Removable sets for bounded analytic functions // Уч. зап. научн. семин. ЛОМИ. 1978. Т. 81. С. 202–205.
- [34] Хавин В. П., Хавинсон С. Я. Некоторые оценки аналитической емкости // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 4. С. 789–792.
- [35] Calderon A. P. Cauchy integrals on Lipschitz curves and related operators // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1977. V. 74. P. 1324–1327.
- [36] Хавинсон С. Я. Дополнительные вопросы теории устранимых особенностей аналитических функций. М.: МИСИ им. В. В. Куйбышева, факультет повышения квалификации, 1982.
- [37] Мельников М. С. Аналитическая емкость: дискретный подход и кривизна меры // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 6. С. 57–76.
- [38] Голубев В. В. Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек. Дисс. М.: Московский университет, 1916.
- [39] Голубев В. В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М.: Физматгиз, 1961.
- [40] Хавин В. П. Об одной задаче В. В. Голубева // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. № 3. С. 511–513.
- [41] Хавин В. П. Один аналог ряда Лорана // Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1961. С. 121–131.
- [42] Хавин В. П. Ряды Голубева и аналитичность в окрестности континуума // Уч. зап. научн. семин. ЛОМИ. 1978. Т. 81. С. 33–35.
- [43] Витушкин А. Г. Об одной задаче Данжуа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1964. Т. 28. № 4. С. 745–746.
- [44] Вальский Р. Э. Несколько замечаний об ограниченных функциях, представимых интегралом типа Коши–Стилтьеса // Сиб. матем. журн. 1966. Т. 7. № 2. С. 252–260.

- [45] Хавинсон С. Я. О представлении аналитических функций потенциалом и ряды Голубева // Проблемы математики и механики сплошной среды. М.: МИСИ им. В. В. Куйбышева, 1979. С. 105–113.
- [46] Чацкая Е. Ш. Об одновременной аппроксимации непрерывных функций рациональными дробями и их производными на некоторых замкнутых множествах комплексной плоскости // Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. 1964. Т. 176. № 4. С. 9–22.
- [47] Чацкая Е. Ш. Некоторые вопросы аппроксимации на множествах комплексной плоскости // Докл. АН СССР. 1965. Т. 162. № 1. С. 30–32.
- [48] Davis Ph., Fan K. Complete sequences and approximations in normed linear spaces // Duke Math. J. 1957. V. 24. № 2. P. 183–192.
- [49] Хавинсон С. Я. Об одном классе экстремальных задач для полиномов // Докл. АН СССР. 1960. Т. 130. № 5. С. 997–1000.
- [50] Хавинсон С. Я. О двух классах экстремальных задач для полиномов и моментов // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1961. Т. 25. № 4. С. 557–590.
- [51] Хавинсон С. Я. Некоторые вопросы полноты систем // Докл. АН СССР. 1961. Т. 137. № 4. С. 793–796.
- [52] Хавинсон С. Я. Некоторые теоремы о приближении с учетом величин коэффициентов приближающих многочленов // Докл. АН СССР. 1971. Т. 196. № 6. С. 1283–1286.
- [53] Хавинсон С. Я. О понятии полноты, учитывающем величины коэффициентов аппроксимирующих полиномов // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1971. Т. 6. № 2–3. С. 221–234.
- [54] Хавинсон С. Я. О полных системах в банаховых пространствах // Изв. АН АрмССР. Сер. матем. 1985. Т. 20. № 2. С. 89–111.
- [55] Kothe G. Die Randverteilungen analytischer Funktionen // Math. Z. 1952. V. 58. № 1. P. 13–33.
- [56] Тумаркин Г. Ц. Об интегралах типа Коши–Стилтьеса // УМН. 1956. Т. 11. № 4. С. 163–166.
- [57] Хавинсон С. Я. Несколько замечаний об интегралах типа Коши–Стилтьеса // Литов. матем. сб. 1962. Т. II. № 2. С. 281–288.
- [58] Маркушевич Л. А., Тумаркин Г. Ц. Критерий представимости аналитических функций в многосвязных областях интегралами типа Коши–Стилтьеса // Вопросы математики, механики сплошных сред и применения математических методов в строительстве. М.: МГСУ, 1997. С. 36–44.
- [59] Наймарк М. А. Нормированные кольца. М.: ГТТИ, 1956.
- [60] Лаврентьев М. А. Sur les fonctions de variable complexe representables par des séries de polynomes // Actualités Sci. Indust. 1936. V. 441. P. 1–62.
- [61] Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. М.: ГТТИ, 1950.
- [62] Bishop E. Simultaneous approximation by a polynomial and its derivatives // Proc. Amer. Math. Soc. 1959. V. 10. № 5–6. P. 77–88.
- [63] Bishop E. Approximation by a polynomial and its derivatives on certain closed sets // Proc. Amer. Soc. 1958. V. 9. № 6. P. 946–953.
- [64] Koch H. Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes // Acta Math. 1906. V. 30. № 1. P. 145–174.
- [65] Макаров Н. Г. Вероятностные методы в теории конформных отображений // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1. № 1. С. 3–59.
- [66] Singer I. Best approximation in normed linear spaces by elements of linear subspaces. Berlin: Springer-Verlag, 1970.
- [67] Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976.
- [68] Никольский С. М. Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами в среднем // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1946. Т. 10. № 2. С. 207–256.
- [69] Крейн М. Г. L -проблема в абстрактном линейном нормированном пространстве // Стаття IV в кн.: Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г. О некоторых вопросах теории множеств. Харьков: ГОНТИ, 1938.
- [70] Гаркави А. Л. Теоремы двойственности для приближений посредством элементов выпуклых множеств // УМН. 1961. Т. 16. № 4. С. 141–145.

- [71] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: МГУ, 1976.
- [72] Хавинсон С. Я., Чапкая Е. Ш. Соотношения двойственности и критерии элементов наилучшего приближения. М.: МИСИ им. В. В. Куйбышева, факультет повышения квалификации, 1976.
- [73] Fan K. Existence theorems and extreme solutions for inequalities concerning convex functions or linear transformation // *Math. Z.* 1957. V. 68. P. 205–216.
- [74] Кочетков А. Н. Экстремальные задачи с несимметричными дополнительными условиями в некоторых классах аналитических функций // *Докл. АН АрмССР.* 1965. Т. 41. № 3. С. 135–139.
- [75] Bergman S. The Kernel Functions and Conformal Mapping. New York: Amer. Math. Soc., 1950.
- [76] Murai T. Analytic capacity and the Szegő kernel functions // *Linear and Complex Analysis Problem. Book 3.* V. 2. Berlin: Springer-Verlag, 1994. 158–160. (Lecture Notes in Math. V. 1574.)
- [77] Murai T. Construction of H^1 functions concerning the estimate of analytic capacity // *Bull. London Math. Soc.* 1986. V. 19. P. 154–160.
- [78] Хавинсон С. Я. Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений. М.: МИСИ им. В. В. Куйбышева, факультет повышения квалификации, 1982.
- [79] Александров П. С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука, 1976.
- [80] Привалов И. И. Граничные свойства аналитических функций. М.: ГТТИ, 1950.
- [81] Duren P. L. Theory of H^p spaces. New York: Academic Press, 1970.
- [82] Гарнетт Дж. Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
- [83] Кусис П. Введение в теорию пространств H_p . М.: Мир, 1984.
- [84] Тумаркин Г. Ц., Хавинсон С. Я. Классы аналитических функций в многосвязных областях // *Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного.* М.: Физматгиз, 1960. С. 45–77.
- [85] Хавинсон С. Я. Факторизация аналитических функций в конечносвязных областях. М.: МИСИ им. В. В. Куйбышева, факультет повышения квалификации, 1981.