Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Артамонов, Тело рациональных квантовых функций, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm181>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.172.240.79

26 апреля 2023 г., 15:25:34

ТЕЛО РАЦИОНАЛЬНЫХ КВАНТОВЫХ ФУНКЦИЙ

В. А. АРТАМОНОВ

Пусть D – тело с заданным множеством автоморфизмов $\alpha_1, \dots, \alpha_n, n \geq 2$. Предположим, что заданы также элементы $q_{ij} \in D^*, i, j = 1, \dots, n$, удовлетворяющие условиям

$$q_{ii} = q_{ij}q_{ji} = Q_{ijr}Q_{jri}Q_{rij} = 1, \quad \alpha_i(\alpha_j(d)) = q_{ij}\alpha_j(\alpha_i(d))q_{ji},$$

где $Q_{ijr} = q_{ij}\alpha_j(q_{ir})$ и $d \in D$. Положим

$$Q = (q_{ij}) \in \text{Mat}(n, D) \text{ и } \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n).$$

Элементы q_{ij} матрицы Q называются *системой мультипараметров*. Обозначим через

$$(1) \quad \Lambda = D_{Q, \alpha}[X_1, \dots, X_n]$$

ассоциативное кольцо, порожденное элементами тела D и элементами

$$X_1, \dots, X_n$$

с определяющими соотношениями

$$(2) \quad \begin{aligned} X_i d &= \alpha_i(d)X_i, \quad d \in D, \quad i = 1, \dots, n; \\ X_i X_j &= q_{ij} X_j X_i, \quad 1 \leq i, j \leq n. \end{aligned}$$

Кольцо (2) называется *кольцом квантовых многочленов*. В случае, когда D – поле с тождественными автоморфизмами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, алгебра Λ возникает в некоммутативной алгебраической геометрии как координатное кольцо $\mathcal{O}_Q(\mathbb{A}^n)$ квантового аффинного пространства $\mathbb{A}^n$ размерности n [1]. Обзор результатов по квантовым многочленам можно найти в [2].

В работах [3]–[5] рассматривается тело частных $k_q(X, Y)$ алгебры $k_q[X, Y]$, где $q \in k^*$ не является корнем из 1. Алгебра $k_q[X, Y]$ является частным случаем кольца Λ , когда $D = k$ – поле с тождественными автоморфизмами α_1, α_2 и $q = q_{12}$. В этих работах обобщаются результаты В. И. Исковских [6] о строении группы автоморфизмов поля рациональных функций $k(X, Y)$ на случай тела $k_q(X, Y)$. Кроме того, в [5] показано, что централизатор любого элемента из $k_q(X, Y) \setminus k$ коммутативен и поэтому является подполем в $k_q(X, Y)$. В [4] изучаются инварианты конечных групп автоморфизмов тела $k_q(X, Y)$ и связи с квантовыми алгебрами Вейля $A_1^q(k)$.

Кольцо Λ из (1) является нётеровым слева и справа областью с телом частных

$$F = D_{Q, \alpha}(X_1, \dots, X_n).$$

Обозначим через $\mathcal{Z}$ множество $\mathbb{Z}^n$ с дополнительным элементом ∞ . Тогда $\mathcal{Z}$ является аддитивным абелевым моноидом, в котором $a + \infty = \infty$ для всех $a \in \mathcal{Z}$. Лексикографический порядок в $\mathbb{Z}^n$ продолжается в $\mathcal{Z}$, причем $a < \infty$ для всех $a \in \mathbb{Z}^n$. Зададим *нормирование* $f \mapsto \|f\|$ мультипликативной полугруппе кольца Λ со значением в аддитивном абелевом моноиде $\mathcal{Z}$ следующим образом. Пусть $f \in \Lambda$ – ненулевой многочлен с младшим одночленом

$$\mu X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}, \quad \mu \in D^*, \quad l_1, \dots, l_n \geq 0,$$

в смысле лексикографического порядка в $\mathbb{Z}^n$. Полагаем $\|f\| = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$. Если $f = 0$, то полагаем $\|f\| = \infty$. Это нормирование продолжается до нормирования $F = D_{Q, \alpha}(X_1, \dots, X_n) \rightarrow \mathcal{Z}$, именно, если $f, g \in \Lambda \setminus 0$, то

$$\|f^{-1}g\| = -\|f\| + \|g\|, \quad \text{и} \quad \|0\| = \infty.$$

Приведем мальцевскую конструкцию тела $\mathcal{F}$ квантовых лорановских рядов [7]. Обозначим через $\mathcal{F}$ множество, состоящее из нуля и всех формальных рядов

$$f = \sum_{l \in \mathbb{Z}^n} f(l) X_l,$$

где $X^l = X_1^{l_1} \dots X_n^{l_n}$, если $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{Z}^n$. При этом предполагается, что носитель $\text{supp } f$, т.е. множество всех таких $l \in \mathbb{Z}^n$, что $f(l) \neq 0$, является артиновым в смысле лексикографического порядка в $\mathbb{Z}^n$. Множество $\mathcal{F}$ является кольцом относительно покомпонентного сложения и относительно умножения, индуцированного умножением одночленов в соответствии с (2).

Работа частично поддержана грантом INTAS 93-436, грантами Российского фонда фундаментальных исследований 99-01-00382, 96-15-96050, программой “Университеты России”-5527.

ТЕОРЕМА 1. $\mathcal{F}$ является телом с нормированием

$$\|f\| = \begin{cases} \min(\text{supp } f) \in \mathcal{Z}, & \text{если } f \neq 0, \\ 0 \in \mathcal{Z}, & \text{если } f = 0. \end{cases}$$

Существует вложение колец $\phi: F \rightarrow \mathcal{F}$, сохраняющее нормирования.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть N – подгруппа в мультипликативной группе D^* тела D , порожденная коммутантом $[D^*, D^*]$ и всеми элементами вида $z^{-1}\alpha_i(z)$, где $z \in D^*$ и $i = 1, \dots, n$. Кольцо Λ (тело F) является кольцом общих квантовых многочленов (телом общих рациональных квантовых функций), если образы всех мультипараметров q_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, независимы в мультипликативной группе D^*/N .

Всюду в дальнейшем предполагается, что F – тело общих квантовых рациональных функций.

ТЕОРЕМА 3. Пусть γ – автоморфизм тела F , действующий тождественно на D . Тогда существуют такие элементы $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in D^*$, $u_1, \dots, u_n \in F$ и такое целое число $\varepsilon = \pm 1$, что

$$(3) \quad \gamma(X_i) = \gamma_i X_i^\varepsilon + u_i, \quad \|u_i\| > \varepsilon \|X_i\|, \quad i = 1, \dots, n.$$

При этом отображение $\theta: F \rightarrow F$, при котором

$$\theta(X_i) = \gamma_i X_i^\varepsilon, \quad \gamma_i \in D^*, \quad \varepsilon = \pm 1$$

для любых $i = 1, \dots, n$ и $\theta(d) = d$ для любого $d \in D$, является автоморфизмом тела F .

ТЕОРЕМА 4. Предположим, что каждый мультипараметр q_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, лежит в центре тела D и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ действуют тождественным образом на D . Пусть γ – автоморфизм тела F , действующий тождественно на теле D и имеющий вид (3) с $\varepsilon = 1$. Тогда существует такой элемент $z \in \mathcal{F}$, что $\|z\| > 0$ и $\gamma(X_i) = \gamma_i(1-z)^{-1} \times X_i(1-z)$ для каждого $i = 1, \dots, n$.

ТЕОРЕМА 5. Предположим, что каждый мультипараметр q_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$, лежит в центре тела D и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ действуют тождественным образом на D . Пусть G – конечная группа автоморфизмов тела F , действующая тождественно на теле D и имеющая вид (3) с $\varepsilon = 1$. Тогда группа G абелева.

ТЕОРЕМА 6. Предположим, что $D = k$ – поле нулевой характеристики с тождественными автоморфизмами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Пусть γ – автоморфизм тела F , действующий тождественно на теле D и имеющий вид (3) с $\varepsilon = 1$. Тогда существует такой элемент $z \in \mathcal{F}$, что $\|z\| > 0$ и $\gamma = \text{Ad}(1-z) \cdot \theta \cdot \text{Ad}(1-z)^{-1}$, где $\text{Ad}(1-w)$ – внутренний автоморфизм $\mathcal{F}$ сопряжения с помощью $1-z$, т.е. $\text{Ad}(1-z)(f) = (1-z)f(1-z)^{-1}$ для всех $f \in \mathcal{F}$.

ТЕОРЕМА 7. Пусть элемент $f \in \mathcal{F}$ перестановочен с $X_1, \dots, X_n$ с каждым элементом из D . Тогда $f \in D$, причем f является центральным элементом тела $\mathcal{F}$. В частности, центр тела $\mathcal{F}$ содержится в D .

ТЕОРЕМА 8. Пусть D – поле нулевой характеристики и $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ тождественны на D . Предположим, что $f \in \mathcal{F} \setminus D$. Тогда централизатор элемента f в $\mathcal{F}$ коммутативен.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Демидов Е. Е. Квантовые группы. М.: Факториал, 1998. [2] Артамонов В. А. // УМН. 1998. Т. 53. № 4. С. 3–76. [3] Alev J., Dumas F. // Collect. Math. 1995. V. 46. № 1–2. P. 1–9. [4] Alev J., Dumas F. // Comm. Algebra. 1997. V. 25. № 5. P. 1655–1672. [5] Artamonov V. A., Cohn P. M. On the skew field of rational functions on the quantum plane // Kurosh Algebraic Conference'98, Abstracts of Talks. Moscow: Moscow Univ., 1998. P. 28–29. [6] Исковских В. А. // Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем., мех. 1983. № 5. С. 43–48. [7] Мальцев А. И. // Докл. АН СССР. 1948. Т. 60. С. 1499–1501.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: artamon@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
21.07.1999