Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Белокурова, Характеристические классы проективных модулей над комплексными полупростыми алгебрами, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm182>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.27.143

26 апреля 2023 г., 14:04:51

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ ПРОЕКТИВНЫХ МОДУЛЕЙ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ПОЛУПРОСТЫМИ АЛГЕБРАМИ

Е. В. БЕЛОКУРОВА

В работе показано, что характеристические классы конечнопорожденных проективных модулей над комплексными полупростыми алгебрами равны нулю.

Рассмотрим комплексную ассоциативную алгебру A с единицей. Пусть Z – подалгебра, лежащая в центре алгебры A , D – подалгебра алгебры Ли $\text{Der}(A)$, замкнутая относительно действия Z , V – некоторый Z -модуль, на котором действует алгебра D и $\tau: A \rightarrow V$ – отображение следа, являющееся гомоморфизмом Z -модулей и D -модулей и удовлетворяющее соотношению $\tau(ab) = \tau(ba)$.

Группы когомологий $H_Z^*(D, V)$ определим как когомологии комплекса $\Omega(D, V)$:

$$V \xrightarrow{\delta_0} \text{Hom}_Z(\Lambda_Z^1(D), V) \xrightarrow{\delta_1} \text{Hom}_Z(\Lambda_Z^2(D), V) \xrightarrow{\delta_2} \dots,$$

где дифференциал δ_n определяется стандартным образом.

Возьмем конечнопорожденный проективный правый A -модуль E . Связностью на модуле E называется такое $\mathbb{C}$ -линейное отображение $\nabla: E \rightarrow \text{Hom}_Z(D, E)$, что $\nabla_{\partial}(\xi a) = \nabla_{\partial}(\xi)a + \xi \partial(a)$, где $\xi \in E$, $\partial \in D$, $a \in A$ и $\nabla_{\partial}(\xi) = \nabla(\xi)(\partial)$. Форма кривизны связности $\Theta(\partial_1, \partial_2) = [\nabla_{\partial_1}, \nabla_{\partial_2}] - \nabla_{[\partial_1, \partial_2]} \in \text{End}_A(E)$.

Грассманова связность ∇^0 имеет вид $\nabla_{\partial}^0(\xi) = P\partial(\xi)$, $\xi \in E$, P – проектор такой, что $\text{Im } P = E$.

Справедлива формула [1]:

$$(1) \quad \Theta^0(\partial_1, \partial_2)\xi = P(\partial_1 P)(\partial_2 P)\xi - P(\partial_2 P)(\partial_1 P)\xi.$$

Отображение следа $\tau: A \rightarrow V$ индуцирует гомоморфизм коцепных комплексов $\tau: \Omega(D, A) \rightarrow \Omega(D, V)$ и продолжается на кольцо $\text{End}_A(E)$.

Положим

$$\sigma_k(\nabla, E) = \tau(\underbrace{\Theta \wedge \dots \wedge \Theta}_{k \text{ раз}}).$$

Справедливы утверждения [1], [2].

- 1) $\sigma_k(\nabla, E)$ является коциклом степени $2k$ в комплексе $\Omega(D, V)$.
- 2) Классы когомологий $\text{ch}_k(E)$ форм $\sigma_k(\nabla, E)$ не зависят от выбора связности на модуле E . Они называются характеристическими классами Чженя модуля E .

ТЕОРЕМА. *Характеристические классы конечнопорожденных проективных модулей над комплексными полупростыми алгебрами равны нулю.*

Для доказательства теоремы рассмотрим алгебру $A_0 = M_n(\mathbb{C})$. Возьмем базис алгебры A_0 , состоящий из единичной матрицы и $(n^2 - 1)$ эрмитовой матрицы E_k с нулевым следом. Базис алгебры Ли $D = \text{Der}(A_0)$ состоит из $n^2 - 1$ элемента ∂_k :

$$\partial_k E_l = \text{ad}(iE_k)E_l = i[E_k, E_l] = 2C_{kl}^m E_m.$$

Дуальный базис 1-форм состоит из форм

$$\theta^k: D \rightarrow A_0, \quad k = 1, \dots, n^2 - 1; \quad \theta^k(\partial_l) = \delta_l^k I.$$

Центр алгебры A_0 $Z \simeq \mathbb{C}$. Пусть $V = \mathbb{C}$, $\partial v = 0$ для любых $\partial \in D$, $v \in V$. Положим $\tau(a) = \frac{1}{n} \text{tr } a$.

Так как алгебра A_0 полупроста, то любой конечнопорожденный проективный A_0 -модуль является прямой суммой неприводимых A_0 -модулей. Единственным с точностью до изоморфизма

неприводимым конечнопорожденным проективным правым A_0 -модулем является $E = \mathbb{C}^n$ [3]. Пусть E – это подмножество A_0 , состоящее из матриц, у которых ненулевая только верхняя строка. Тогда $P = e_{1,1}$ – матричная единица,

$$\begin{aligned}\Theta^0 &= -4iP(\theta^n \wedge \theta^{n+1} + \theta^{n+2} \wedge \theta^{n+3} + \dots + \theta^{3n-4} \wedge \theta^{3n-3}), \\ \sigma_1(\nabla^0, E) &= \tau(\Theta^0) = -\frac{4i}{n}(\theta^n \wedge \theta^{n+1} + \theta^{n+2} \wedge \theta^{n+3} + \dots + \theta^{3n-4} \wedge \theta^{3n-3}).\end{aligned}$$

Заметим, что $\sigma_1(\nabla^0, E) = \delta\left(\frac{2i}{n}(\theta^1 + \dots + \theta^{n-1})\right)$. Поэтому класс когомологий $\text{ch}_1(E)$ равен нулю. Ясно, что все $\text{ch}_k(E) = 0$ при $k \geq 1$. Таким образом, характеристические классы модулей над алгеброй $M_n(\mathbb{C})$ равны нулю.

Любая конечномерная комплексная полупростая алгебра A изоморфна прямой сумме $M_{n_1}(\mathbb{C}) \oplus \dots \oplus M_{n_r}(\mathbb{C})$ [4], при этом $\text{Der}(A) = \text{Der}(M_{n_1}(\mathbb{C})) \oplus \dots \oplus \text{Der}(M_{n_r}(\mathbb{C}))$. Составим базисы алгебр A и $\text{Der}(A)$ из описанных выше базисов $M_{n_i}(\mathbb{C})$ и $\text{Der}(M_{n_i}(\mathbb{C}))$. Центр алгебры A $Z \simeq \mathbb{C}^r$. Возьмем $V = \mathbb{C}^r$, $\partial v = 0$ для любых $\partial \in \text{Der}(A)$, $v \in V$. Положим $\tau(a) = \left(\frac{1}{n_1} \text{tr } a_1, \dots, \frac{1}{n_r} \text{tr } a_r\right)$ для $a = (a_1, \dots, a_r) \in A$.

С точностью до изоморфизма существуют r неприводимых конечнопорожденных правых A -модулей [3] (i -й модуль состоит из элементов алгебры A , у которых на i -м месте стоит матрица с ненулевой только верхней строкой, а на остальных местах стоят нули). Повторяя для каждого модуля те же вычисления, что и для неприводимого $M_n(\mathbb{C})$ -модуля, получаем доказательство теоремы.

Выражаю глубокую благодарность Ю. П. Соловьеву за постановку задачи и полезные консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Жураев Ю. Й. Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1988. [2] Жураев Ю. Й., Мищенко А. С., Соловьев Ю. П. // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 1986. № 1. С. 75–76. [3] Шафаревич И. Р. Итоги науки и техн. Совр. пробл. матем. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1986. [4] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
21.07.1999