Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. В. Богачев, С. М. Зарбалиев, Предельные теоремы для одного класса случайных выпуклых ломаных, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm183>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 16:22:49

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СЛУЧАЙНЫХ ВЫПУКЛЫХ ЛОМАНЫХ

Л. В. БОГАЧЕВ, С. М. ЗАРБАЛИЕВ

1. Введение. Мы будем рассматривать целочисленные выпуклые ломаные Γ с вершинами в точках $\mathbb{Z}_+^2$, выходящие из начала координат и такие, что угол наклона каждого звена неотрицателен и не превосходит $\pi/2$. Выпуклость означает, что наклон последовательных звеньев ломаной строго возрастает. Обозначим через $\mathcal{L}$ множество всех таких конечных ломаных, а через $\mathcal{L}_n$ – множество ломаных $\Gamma \in \mathcal{L}$ с фиксированным правым концом $n = (n_1, n_2)$.

Известно [1]–[3], что при $n_1 = n_2 \rightarrow \infty$ и скейлинге $\mathbb{Z}_+^2 \mapsto n_1^{-1}\mathbb{Z}_+^2$ ансамбль $\mathcal{L}_n$ подчиняется закону больших чисел (относительно равномерного распределения вероятностей P_n), причем предельная кривая γ_0 задается уравнением $\sqrt{1-u_1} + \sqrt{u_2} = 1$. Метод работы [3] основан на представлении меры P_n как условного распределения, индуцированного на $\mathcal{L}_n$ подходящей мерой Q , заданной на $\mathcal{L} = \bigcup_n \mathcal{L}_n$. В настоящей заметке этот подход применяется для изучения статистических свойств $\mathcal{L}_n$ относительно одного нового класса распределений P_n , которые вводятся так, что $P_n(\Gamma)$ зависит от количества целых точек, лежащих на звеньях ломаной Γ .

2. Построение меры P_n . Положим $X := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \text{н.о.д.}(x_1, x_2) = 1\}$, и пусть $\mathcal{F}$ – пространство функций $f: X \rightarrow \mathbb{Z}_+$. Заметим (см. [3]), что $\mathcal{L}$ эквивалентно множеству *финитных* функций $\mathcal{F}_0 := \{f \in \mathcal{F} : \#(f(x) > 0) < \infty\}$; при этом точке $x \in X$ с $f(x) > 0$ отвечает звено, задаваемое вектором $(x_1 f(x), x_2 f(x))$. (Функции $f(x) \equiv 0$ сопоставляется “тривиальная” ломаная с совпадающими концами.) Введем на $\mathcal{F}$ вероятностную меру $Q = Q_z$ как распределение случайного поля $\nu = \nu(\cdot)$ на X с независимыми значениями, причем

$$(1) \quad Q_z\{\nu(x) = k\} := g_k z^{kx} / G(z^x), \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\{g_k\}$ – положительная последовательность (не ограничивая общность, можно считать, что $g_0 = 1$), $G(u) := \sum_{k=0}^{\infty} g_k u^k$, $u \in [0, 1]$, – ее производящая функция, $z = (z_1, z_2)$, $0 < z_1, z_2 < 1$, и $z^{kx} := z_1^{kx_1} z_2^{kx_2}$. Корректность нормировки в (1) обеспечивается условием $\prod_{x \in X} G(z^x) < \infty$, откуда следует $\sum_{x \in X} (1 - 1/G(z^x)) < \infty$ и, по лемме Бореля–Кантелли, $Q_z\{\nu(\cdot) \in \mathcal{F}_0\} = 1$.

Будем далее рассматривать класс мер $\{Q_z\}$, который задается как выпуклая оболочка (симплекс Шоке), натянутая на семейство “крайних точек” $Q_z^{(r)}$ с $g_k = C_{k+r-1}^k = (r+k-1) \times (r+k-2) \cdots r/k!$, $0 < r < \infty$. В частности, если $r = 1$, то $g_k \equiv 1$ и случайная величина $\nu(x)$ имеет геометрическое распределение с параметром $q = z^x$ (ср. [3]). В общем случае $Q_z^{(r)}$ задает отрицательное биномиальное распределение $\nu(x)$ с параметрами r и $q = z^x$ (см. [4; VI.8]).

Обозначим через $\xi_i := \sum_x x_i \nu(x)$ ($i = 1, 2$) координаты правого конца ломаной Γ и рассмотрим условное распределение

$$P_n(\Gamma) = \frac{Q_z(\Gamma)}{Q_z\{\xi_1 = n_1, \xi_2 = n_2\}}, \quad \Gamma \in \mathcal{L}_n.$$

Из (1) вытекает, что P_n не зависит от z_1, z_2 ; в частности, при $g_k \equiv 1$ распределение P_n оказывается равномерным (ср. [3]). Подчиним z_1, z_2 условиям $\lim_{n \rightarrow \infty} n_i^{-1} E z \xi_i = 1$ ($i = 1, 2$). Здесь и ниже подразумевается предельный переход $n \rightarrow \infty$ такой, что $0 < c \leq \liminf c_n \leq \limsup c_n \leq C < \infty$, где $c_n := n_2/n_1$. Полагая $z_i = \exp(-\delta_i n_i^{-1/3})$, находим $\delta_1 = (6\rho_1/\pi^2)^{1/3} c_n^{1/3}$, $\delta_2 = \delta_1 c_n^{-2/3}$, где $\rho_1 := \int_0^\infty t \ln G(e^{-t}) dt$.

3. Основные результаты. Удобно перейти к параметризации, связанной с наклоном звеньев ломаной. Положим $X(s) := \{x \in X : x_2/x_1 \leq s c_n\}$, $s \in [0, \infty]$, и обозначим через $\xi_i(s) := \sum_{x \in X(s)} x_i \nu(x)$ ($i = 1, 2$) координаты “текущей” вершины ломаной Γ .

ТЕОРЕМА 1. Обозначим $u_1(s) := 1 - (1+s)^{-2}$, $u_2(s) := s^2(1+s)^{-2}$. Тогда при каждом $s \in [0, \infty]$ имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} E[n_i^{-1} \xi_i(s)] = u_i(s)$ ($i = 1, 2$), и для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \infty} |n_i^{-1} \xi_i(s) - u_i(s)| \leq \varepsilon \right\} = 1, \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что функции $u_1(s)$, $u_2(s)$ параметрически задают кривую γ_0 (см. п. 1). Пусть $\tilde{\Gamma}_n$ – ломаная, получающаяся из Γ при сжатии $(x_1, x_2) \mapsto (x_1/n_1, x_2/n_2)$. Из теоремы 1 вытекает

СЛЕДСТВИЕ. При всех $\varepsilon > 0$ справедливо равенство $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \{d(\tilde{\Gamma}_n, \gamma_0) \leq \varepsilon\} = 1$, где $d(\cdot, \cdot)$ – метрика Хаусдорфа на множестве компактов в $\mathbb{R}^2$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Согласно следствию из теоремы 1 предельная кривая γ_0 оказывается *одинаковой* для всех распределений P_n из рассматриваемого класса. Это подтверждает высказанную Ю. В. Прохоровым гипотезу о возможной устойчивости предельной формы выпуклых ломаных.

Пусть $\eta_n(s)$, $s \in [0, \infty]$, – двумерный случайный процесс с компонентами

$$\eta_{1n}(s) := c_n^{1/6} n_1^{-2/3} [\xi_1(s) - E_z \xi_1(s)], \quad \eta_{2n}(s) := c_n^{-1/6} n_2^{-2/3} [\xi_2(s) - E_z \xi_2(s)].$$

Имеет место следующая центральная предельная теорема.

ТЕОРЕМА 2. В смысле сходимости конечномерных распределений относительно P_n процесс $\eta_n(s)$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к двумерному гауссовскому процессу $\eta^0(s)$ с нулевым средним и ковариационной матрицей $\text{Cov}(\eta^0(s), \eta^0(s+h)) = B(s) - B(s)B^{-1}(s)B(s+h)$, где $B(s)$ – матрица с элементами

$$B_{ij}(s) = 6 \left(\frac{\pi^2}{6\rho_1} \right)^{1/3} \int_0^s \frac{\tau^{i+j-2} d\tau}{(1+\tau)^4}, \quad i, j \in \{1, 2\}.$$

Перейдем к изучению статистики количества целых точек и количества вершин на ломаной Γ . Рассмотрим соответствующие случайные процессы

$$\chi_\Gamma(s) := \sum_{x \in X(s)} \nu(x) \quad \text{и} \quad \vartheta_\Gamma(s) := \sum_{x \in X(s)} I\{\nu(x) > 0\}, \quad s \in [0, \infty].$$

Напомним, что ρ_1 определено в конце п. 2, и обозначим

$$\rho_0 := \int_0^\infty \ln G(e^{-t}) dt, \quad \sigma_1 := \int_0^\infty t(1 - 1/G(e^{-t})) dt.$$

ТЕОРЕМА 3. Для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \infty} \left| \frac{\chi_\Gamma(s)}{(n_1 n_2)^{1/3}} - \rho_0 \left(\frac{\rho_1^2 \pi^2}{6} \right)^{-1/3} \frac{s}{1+s} \right| \leq \varepsilon \right\} = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n \left\{ \sup_{0 \leq s \leq \infty} \left| \frac{\vartheta_\Gamma(s)}{(n_1 n_2)^{1/3}} - \sigma_1 \left(\frac{\rho_1^2 \pi^2}{6} \right)^{-1/3} \frac{s}{1+s} \right| \leq \varepsilon \right\} = 1.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема 3 показывает, что предельная доля целых точек, приходящихся на одно звено, равна ρ_0/σ_1 . В случае, когда распределение P_n индуцировано мерой $Q_z^{(r)}$ (см. п. 2), эта доля возрастает по r . При $r = 1$ (равномерное распределение на $\mathcal{L}_n$) указанное отношение равно $\pi^2/6$, что совпадает с плотностью множества X пар взаимно простых целых чисел среди всех точек $\mathbb{Z}_+^2$. Отметим еще, что предельные функции, фигурирующие в теореме 3, становятся линейными в параметризации $z = s/(1+s)$, отвечающей переходу к аффинной кривизне для кривой γ_0 (ср. [1]).

Авторы выражают благодарность Я. Г. Синаю за внимание к работе и А. В. Булинскому за полезные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Вершик А. М. // Функции. анализ и его прил. 1994. Т. 28. № 1. С. 16–25. [2] Bárány I. // Discrete Comput. Geom. 1995. V. 13. P. 279–295. [3] Синай Я. Г. // Функции. анализ и его прил. 1994. Т. 28. № 2. С. 41–48. [4] Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. М.: Мир, 1984.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова;
Международный институт теории прогноза землетрясений
и математической геофизики РАН
E-mail: lvb@mech.math.msu.su, sakhavet@mitp.ru

Принято редколлегией
21.07.1999