Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. И. Буфетов, Эргодические теоремы для действий нескольких отображений,
УМН, 1999, том 54, выпуск 4, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm185>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 07:49:29

ЭРГОДИЧЕСКИЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДЕЙСТВИЙ НЕСКОЛЬКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

А. И. БУФЕТОВ

Пусть (X, B_X, ν) – пространство Лебега, $f_1, \dots, f_m: X \rightarrow X$ – измеримые отображения, сохраняющие меру ν . Пусть F_i – оператор, действующий на измеримую функцию φ на пространстве X по формуле $F_i\varphi = \varphi \circ f_i$. Обозначим через W_m множество всех конечных слов $w = w_1 \dots w_n$, $w_i = 1, \dots, m$. Длину слова $w \in W_m$ обозначим через $|w|$. Для всякого $w \in W_m$, $w = w_1 \dots w_n$, введем оператор

$$(1) \quad Fw = F_{w_n} F_{w_{n-1}} \dots F_{w_1}.$$

Рассмотрим пространство Ω_m односторонних бесконечных последовательностей из символов $1, \dots, m$. Для $w \in W_m$ пусть $C(w) \subset \Omega_m$ есть множество последовательностей, начинающихся словом w . Для произвольной меры μ на Ω_m обозначим $\mu(w) = \mu(C(w))$. Если $w = w_1 \dots w_n$, то вместо $\mu(w)$ будем иногда писать $\mu(w_1 \dots w_n)$.

Пусть μ – стационарная марковская мера на Ω_m . Сопоставим мере μ неориентированный граф Γ_μ с вершинами $1, \dots, m$, в котором вершины i и j соединены ребром, если найдется $l \in \{1, \dots, m\}$ такое, что $\mu(il) > 0$, $\mu(jl) > 0$. Мере μ будем называть *сильно связной*, если отвечающая ей цепь неразложима, а граф Γ_μ связан.

Далее, пусть μ – стационарная марковская мера порядка $k \geq 1$ на Ω_m . Любой марковской цепи порядка k с состояниями $1, \dots, m$ стандартным образом ставится в соответствие марковская цепь порядка 1 с множеством состояний $\{w \in W_m, |w| = k\}$. Тем самым, мере μ соответствует марковская мера $\tilde{\mu}$ порядка 1 на Ω_{m^k} ; мы называем меру μ *сильно связной*, если цепь, отвечающая мере $\tilde{\mu}$, неразложима, а граф $\Gamma_{\tilde{\mu}}$ имеет ровно m^{k-1} компонент связности.

Всюду далее μ – стационарная марковская мера на Ω_m порядка k . Обозначим

$$(2) \quad s_l^\mu(F_1, \dots, F_m) = \sum_{|w|=l} \mu(w) Fw,$$

$$(3) \quad c_n^\mu(F_1, \dots, F_m) = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-1} s_l^\mu(F_1, \dots, F_m).$$

Пусть φ – измеримая функция на X . Величины $c_n^\mu(F_1, \dots, F_m)\varphi$ – аналоги временных средних функции φ в случае нескольких отображений. Для них имеет место аналог эргодической теоремы фон Неймана.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi \in L_2(X, \nu)$. Найдется функция $\bar{\varphi} \in L_2(X, \nu)$ такая, что $c_n^\mu(F_1, \dots, F_m)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ в $L_2(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$. Если мера μ сильно связна, то $F_j\bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, $j = 1, \dots, m$.

Теорема 1 обобщается на случай произвольных сжатий в гильбертовом пространстве (напомним, что линейный оператор на банаховом пространстве называется *сжатием*, если его норма не превосходит 1). Итак, пусть H – гильбертово пространство, $T_1, \dots, T_m: H \rightarrow H$ – сжатия. Операторы T_w , $s_l^\mu(T_1, \dots, T_m)$, $c_n^\mu(T_1, \dots, T_m)$ определяются по аналогии с (1), (2) и (3).

ТЕОРЕМА 2. Для всякого $h \in H$ найдется вектор $\bar{h}$ такой, что $c_n^\mu(T_1, \dots, T_m)h \rightarrow \bar{h}$ в H при $n \rightarrow \infty$. Если мера μ сильно связна, то $T_j\bar{h} = \bar{h}$, $j = 1, \dots, m$.

Для средних (3) верна также индивидуальная эргодическая теорема. Мы ограничиваемся здесь случаем пространства конечной меры.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\nu(X) < \infty$, $\varphi \in L_1(X, \nu)$. Найдется функция $\bar{\varphi} \in L_1(X, \nu)$ такая, что $c_n^\mu(F_1, \dots, F_m)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ ν -почти всюду и в $L_1(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$. При этом $\int_X \varphi = \int_X \bar{\varphi}$.

Если мера μ сильно связна, то $F_j \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть I_X — σ -алгебра $f_1, \dots, f_m$ -инвариантных подмножеств X . Из теоремы 3 видно, что если мера μ сильно связна, то $\bar{\varphi} = E(\varphi | I_X)$ — условное математическое ожидание функции φ относительно σ -алгебры I_X .

Теорема 3 обобщается на случай произвольных положительных $L_1 - L_\infty$ -сжатий.

ТЕОРЕМА 4. Пусть $\nu(X) < \infty$, $T_1, \dots, T_m: L_1(X, \nu) \rightarrow L_1(X, \nu)$ — положительные $L_1 - L_\infty$ -сжатия. Пусть $\varphi \in L_1(X, \nu)$. Найдется функция $\bar{\varphi} \in L_1(X, \nu)$ такая, что $c_n^\mu(T_1, \dots, T_m)\varphi \rightarrow \bar{\varphi}$ ν -почти всюду и в $L_1(X, \nu)$ при $n \rightarrow \infty$.

Если мера μ сильно связна, то $T_j \bar{\varphi} = \bar{\varphi}$, $j = 1, \dots, m$.

Теоремы 1, 3 обобщают эргодические теоремы для действий свободных групп, полученные Р.И. Григорчуком [1], [2] и независимо А. Нево и Э.М. Стайном [3], а также эргодические теоремы для действий свободных полугрупп, принадлежащие Р.И. Григорчуку [2]. Чтобы получить теоремы Григорчука для действий свободных полугрупп сохраняющими меру отображениями, возьмем в качестве μ меру Бернулли. Чтобы получить теоремы из [1]–[3] для действия свободной группы с l образующими, положим $m = 2l$, пусть $g_1, \dots, g_l$ — образующие в группе, $g_{l+i} = g_i^{-1}$, а сильно связная мера Маркова порядка 1 задается матрицей переходных вероятностей (a_{ij}) , $i, j = 1, \dots, m$, где $a_{i, i+l} = a_{i+l, i} = 0$ при $1 \leq l$, $a_{ij} = 1/(m-1)$ при $|i-j| \neq l$ (иными словами, запрещены переходы из образующего в его обратный и, наоборот, все прочие переходы равновероятны).

Теоремы 1, 3 могут также быть использованы для получения эргодических теорем для действий полугрупп с соотношениями. Полугруппу G с образующими $g_1, \dots, g_m$ будем называть *полугруппой конечного типа*, если найдется такой набор запретных слов в алфавите $g_1, \dots, g_m$, что всякий элемент полугруппы однозначно записывается словом, не содержащим запретных. Для полугрупп конечного типа можно так выбрать меру μ , что каждый элемент полугруппы будет учтен не более одного раза в эргодических средних (3), и теоремы 1, 3 дадут тогда эргодические теоремы для действий таких полугрупп.

Я глубоко благодарен Д.В. Аносову, Р.И. Григорчуку, Б.М. Гуревичу, Ю.С. Ильяшенко, В.И. Оселдцу, В.А. Тиморину и А.Ю. Фишкину за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Григорчук Р. И. Индивидуальная эргодическая теорема для действий свободных групп // Тезисы Тамбовской школы по теории функций, 1986. [2] Григорчук Р. И. // Матем. заметки. 1999. Т. 65. № 5. С. 779–783. [3] Nevo A., Stein E. M. // Acta Math. 1994. V. 173. P. 135–154.