Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Группы полиномиальных преобразований прямой, неформальные симплектические многообразия и алгебра Ландвебера–Новикова, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm186>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.187.58

26 апреля 2023 г., 13:11:14

**ГРУППЫ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ПРЯМОЙ,
НЕФОРМАЛЬНЫЕ СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ
И АЛГЕБРА ЛАНДВЕБЕРА–НОВИКОВА**

В. М. БУХШТАБЕР

В настоящей работе мы даем явную конструкцию неформальных симплектических многообразий, введенных в работе [1] и, следуя [2], устанавливаем связь их когомологий с когомологиями алгебры Ландвебера–Новикова.

Пусть k – некоторое коммутативное кольцо с единицей. Обозначим через $V_n(k)$ пространство всех полиномов над k вида

$$(1) \quad P_x(t) = t + \sum_{i=1}^n x_i t^{i+1}.$$

Относительно операции подстановки $\text{mod } t^{n+2}$

$$P_x * P_y(t) = P_y(P_x(t)) \text{ mod } t^{n+2}$$

пространство $V_n(k)$ является алгебраической группой. отождествим $V_n(k)$ с k^n , сопоставляя полиному $P_x(t)$ вектор $x = (x_1, \dots, x_n)$. Таким образом мы получим в k^n структуру алгебраической группы с умножением $x * y = z$, которое линейно по y и нелинейно по x .

Пусть $\mathbb{R}$ – поле вещественных чисел и $\mathbb{Z}$ – кольцо целых чисел. Группу $V_n := V_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n$ будем называть группой полиномиальных преобразований прямой, а $V_n(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^n$ – канонической решеткой Γ_n в V_n .

Обозначим через M^n факторпространство группы V_n по правому действию ее подгруппы Γ_n . Как будет показано ниже, эти многообразия дают серию неформальных симплектических многообразий из [1].

В качестве кольца функций на $V_n(k)$ возьмем кольцо полиномов $k[x_1, \dots, x_n]$. Введем, как обычно, оператор правого сдвига на группе $V_n(k)$:

$$R_x^y f(x) = f(x * y) = \sum \mathcal{D}_I(f(x)) y^I,$$

где $I = (i_1, \dots, i_n)$ – мультииндекс и $y^I = y_1^{i_1} \dots y_n^{i_n}$. Тогда алгебра $A(k)$, порожденная всеми операторами $\mathcal{D}_I$ является алгеброй всех линейных дифференциальных операторов на $k[x_1, \dots, x_n]$, инвариантных относительно левого сдвига $L_x^y f(x) = f(y * x)$ на группе $V_n(k)$.

ЛЕММА 1. *Алгебра $A(k)$ мультипликативно порождается операторами*

$$\xi_i = \partial_i + \sum_{q=i+1}^n a_{iq}(x) \partial_q, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $\partial_i = \partial/\partial x_i$ и $a_{iq}(x)$ – коэффициент при t^{q+1} у полинома $P_x(t)^{i+1}$. Эти операторы связаны коммутационными соотношениями: $[\xi_i, \xi_j] = (j-i)\xi_{i+j}$, где ξ_q полагается равным нулю при $q > n$.

В случае $k = \mathbb{R}$ операторы $\{\xi_i\}$ задают базис в алгебре Ли левоинвариантных векторных полей на группе V_n , причем оператору ξ_m соответствует однопараметрическая группа $\varphi_m(s)$ полиномов $\{t(1 - mst^m)^{-1/m} \text{ mod } t^{n+2}\}$.

Пусть $\omega_1, \dots, \omega_n$ – левоинвариантные дифференциальные 1-формы на V_n , и $\omega = \sum_{i=1}^n \omega_i \xi_i$ – соответствующая каноническая левоинвариантная 1-форма со значениями в алгебре Ли (форма

Маурера–Картана). Уравнение Маурера–Картана $d\omega = -\frac{1}{2}[\omega, \omega]$ в нашем случае принимает вид

$$(2) \quad d\omega_q = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{q-1} (q-2i)\omega_i \wedge \omega_{q-i}.$$

Заметим, что $d\omega_1 = d\omega_2 = 0$ и формула (2) не зависит от n .

Для каждого n имеет место функториальная по k точная последовательность групп

$$0 \longrightarrow k \longrightarrow V_{n+1}(k) \longrightarrow V_n(k) \longrightarrow 0.$$

Из этой последовательности получаем, что для каждого n имеет место гладкое расслоение $\pi_n: M^{n+1} \rightarrow M^n$ со слоем окружность S^1 .

ЛЕММА 2. Для формы кривизны Ω_n формы связности ω_{n+1} расслоения π имеет место соотношение

$$(3) \quad \pi^* \Omega_n = d\omega_{n+1}.$$

ТЕОРЕМА 1. Многообразие M^n с формой Ω_n является симплектическим (в случае нечетных n это означает, что форма Ω_n имеет максимально возможный ранг $(n-1)$).

Доказательство вытекает из сопоставления формул (2) и (3), а также непосредственной проверки того, что 2-форма в левой части формулы (2) имеет максимально возможный ранг.

Многообразие M^n является пространством Эйленберга–Маклейна $K(\Gamma_n, 1)$ и классифицирующим пространством $B\Gamma_n$ группы Γ_n .

Используя технику B -резольвенты [3], получаем, что имеет место

$$\text{ТЕОРЕМА 2. } H^*(M^n, \mathbb{Z}) = H^*(\Gamma_n, \mathbb{Z}) = \text{Ext}_{A_n(\mathbb{Z})}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}).$$

Как показано в [2], алгебра Ландвебера–Новикова S в комплексных кобордизмах изоморфна алгебре $\varprojlim A_n(\mathbb{Z})$, где обратный предел соответствует обратной последовательности групп $\cdots \rightarrow \Gamma_{n+1} \rightarrow \Gamma_n \rightarrow \cdots$. Таким образом, для каждого n мы получаем гомоморфизмы

$$\lambda_{q,n}: H^q(M^n, \mathbb{Z}) \rightarrow \text{Ext}_{\mathbb{Z}}^q(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = H^q(S).$$

Известно, что $H^q(S) \otimes \mathbb{Q} = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}$ для всех q (см. [4]), умножение в кольце $H^*(S) \otimes \mathbb{Q}$ тривиально, и все элементы представляют собой произведения Масси от двух образующих группы $H^1(S)$ (см. [5]). Заметим, что $\lambda_{1,n}$ является изоморфизмом при $n \geq 2$. Неформальность многообразий M^{2n} , $n \geq 2$ была доказана в [5] как следствие того, что в кольце когомологий $H^*(M^{2n}, \mathbb{Q})$ имеются нетривиальные произведения Масси.

Естественно распространить описанные в данной работе конструкции на случай групп полиномиальных преобразований евклидовых пространств $\mathbb{R}^m$. Уже в случае $m = 2$ мы получаем нетривиальный аналог S^2 алгебры Ландвебера–Новикова S для новой теории кобордизмов, которую естественно назвать $2D$ – теорией комплексных кобордизмов. Алгебра S^2 содержит в качестве подалгебры квантовый дубль алгебры S , описанный в [6]. Этим результатам мы посвятим дальнейшие публикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Babenko I. K., Taimanov I. A. On nonformal simply connected symplectic manifolds // Sfb 288 Preprint № 358. [2] Бухштабер В. М., Шокур А. В. // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 3. С. 1–11. [3] Маклейн С. Гомология. М.: Мир, 1966. [4] Гончарова Л. В. // Функц. анализ и его прил. 1973. Т. 7. № 2. С. 6–14. [5] Feigin B. L., Fuchs D. B., Retakh V. S. Topology and Geometry Rokhlin Seminar // Lecture Notes in Math. V. 1346, 1988. P. 13–31. [6] Buchstaber V. M. // Topics in Topology and Mathematical Physics / ed. S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 9–31.