Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин, Неизгибаемость квадрильяжа тора, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm187>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.67.100

26 апреля 2023 г., 17:12:01

НЕИЗГИБАЕМОСТЬ КВАДРИЛЬЯЖА ТОРА

Н. П. Долбилин, М. А. Штанько, М. И. Штогрин

Основные понятия и определения, использованные ниже, даны в работе [1], в которой была доказана неизгибаемость квадрильяжа сферы и сформулирована следующая гипотеза: квадрильяжное вложение сферы $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^3$ является решеточным.

ТЕОРЕМА. Пусть $\mathbb{Q}^2$ – произвольный квадрильяж сферы или тора. Тогда любое квадрильяжное вложение $f: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, если оно существует, является решеточным.

При вложении $f: \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ для удобства прообраз $\mathbb{Q}^2$ отождествим с образом $f(\mathbb{Q}^2)$.

СЛЕДСТВИЕ. Квадрильяжное вложение сферы или тора $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^3$ неизгибаемо.

Граф стыковки. Рассмотрим нерешеточное вложение $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^3$. Ребро из $\mathbb{Q}^2$ назовем *стыковочным*, если смежные по нему два квадрата из $\mathbb{Q}^2 \subset \mathbb{R}^3$ образуют двугранный угол, не равный ни $\frac{\pi}{2}$, ни π . Все квадраты из $\mathbb{Q}^2$, сходящиеся в вершине O , составляют звезду $St\ O$. Выясним сколько радиусов звезды $St\ O$ могут быть стыковочными ребрами.

1. *Вершина не может быть концом ровно одного стыковочного ребра.* В самом деле, обходя всю звезду $St\ O$ вокруг O , начиная с радиуса i , получим один сектор (O, i, i) . Если все внутренние радиусы сектора не являются стыковочными ребрами, то весь он вложен в одну кубическую решетку и, следовательно, один радиус i не может быть стыковочным ребром.

2. *В вершине не могут сойтись ровно два максимально укрупненные стыковочные ребра.* В самом деле, пусть в вершине сходятся всего лишь два стыковочных ребра. Они разрезают звезду $St\ O$ на два сектора, каждый из которых вложен в свою кубическую решетку. Вместе с каждым сектором оба ребра принадлежат обеим решеткам. Если они не коллинеарны, то они перпендикулярны друг другу, составляя пару вида (i, j) . Тогда оба сектора (O, i, j) и (O, j, i) звезды $St\ O$ вложены в одну кубическую решетку, и поэтому радиусы i и j не могут быть стыковочными ребрами. Остается единственная возможность: стыковочные ребра коллинеарны, имея вид $i, -i$ (одно ребро лежит на продолжении другого), ввиду вложения $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^3$. Укрупним их до стыковочного диаметра звезды $St\ O$. Переходя от стыковочных ребер к максимально укрупненным стыковочным ребрам, мы избавимся от всех вершин, в которых сходятся точно два стыковочных ребра.

3. *В вершине не могут сойтись ровно 3 стыковочные ребра.* В самом деле, пусть в вершине O сходятся ровно 3 стыковочных ребра. Они разбивают звезду на 3 сектора, каждый из которых вложен в свою кубическую решетку. Каждая пара радиусов составляет угол $\frac{\pi}{2}$ или π . Среди трех углов, составленных тремя парами этих радиусов, не может быть двух углов равных π , иначе тройка радиусов не была бы вложена в $\mathbb{R}^3$. Значит, тройка углов имеет вид $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ или $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi)$. В первом случае тройка стыковочных ребер составляет ортонормированный репер (i, j, k) , все 3 сектора (O, i, j) , (O, j, k) , (O, k, i) вложены в одну кубическую решетку, ни одно из трех ребер j, k, i не является стыковочным. Во втором случае стыковочные ребра составляют тройку вида $(i, j, -i)$, два сектора (O, i, j) и $(O, j, -i)$ вложены в одну кубическую решетку, разделяющее их ребро j не является стыковочным (радиусы $-i$ и i сектора $(O, -i, i)$ в общем случае задают стыковочный диаметр звезды $St\ O$). Следовательно, в вершине не может быть ровно 3 стыковочных ребра.

4. *Если в вершине сходятся ровно 4 стыковочных ребра, то они составляют циклическую последовательность вида $(i, j, -j, -i)$.* В самом деле, 4 стыковочных ребра разделяют звезду $St\ O$ на 4 сектора. Угол между радиусами одного сектора равен либо $\frac{\pi}{2}$, либо π . Среди этих углов не может быть подряд двух углов равных π , в силу вложения $\mathbb{Q}^2$ в $\mathbb{R}^3$. Следовательно, для циклической последовательности из 4 углов между радиусами секторов имеются всего 3 возможности $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \pi)$, $(\frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{2}, \pi)$.

В первом случае четверка радиусов имеет вид $(k, i, -k, i \cos \alpha + j \sin \alpha)$, где $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$. Два сектора (O, k, i) и $(O, i, -k)$ лежат в одной кубической решетке, их общее ребро i не является

ребром стыковки. Другие два сектора $(O, -\mathbf{k}, i \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha)$ и $(O, i \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha, \mathbf{k})$ также лежат в одной кубической решетке, их общее ребро $i \cos \alpha + \mathbf{j} \sin \alpha$ не является ребром стыковки. Стыковочными ребрами могут быть лишь радиусы $\mathbf{k}$ и $-\mathbf{k}$ при $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, и после укрупнения O будет внутренней точкой укрупненного стыковочного ребра.

Во втором случае 4 радиуса имеют вид $(i, \mathbf{j}, \mathbf{k}, -i)$. Три сектора $(O, i, \mathbf{j})$, $(O, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, $(O, \mathbf{k}, -i)$ находятся в одной кубической решетке, и поэтому радиусы $\mathbf{j}, \mathbf{k}$ не являются стыковочными ребрами. Два радиуса $-i$ и i сектора $(O, -i, i)$ в общем случае дают стыковочный диаметр.

В третьем случае 4 радиуса имеют вид $(i, \mathbf{j}, -\mathbf{j}, -i)$. Они разбивают звезду $St O$ на 4 сектора $(O, i, \mathbf{j})$, $(O, \mathbf{j}, -\mathbf{j})$, $(O, -\mathbf{j}, -i)$, $(O, -i, i)$. Только в этом случае все 4 радиуса могут быть стыковочными ребрами.

ПРИМЕЧАНИЕ. В последнем случае мы имеем вершину, в которой сходятся 4 максимально укрупненные стыковочные ребра, хотя каждое стыковочное ребро лежит на продолжении другого. Если в вершине сходятся не менее 4 стыковочных ребер, в окрестности этой вершины стыковочные ребра мы никогда не укрупняем, число стыковочных ребер в такой вершине всегда остается прежним.

5. *Существует вершина, в которой сходится не менее 5 стыковочных ребер.* В самом деле, в силу свойств 1, 2, 3 и замкнутости поверхности $\mathbb{Q}^2$ максимально укрупненное стыковочное ребро имеет два конца, в каждом из которых сходится не меньше 4 стыковочных ребер. Если бы в каждой вершине сходилась ровно 4 стыковочных ребра, то прямая, на которой лежит одно стыковочное ребро, в силу свойства 4 продолжалась бы до бесконечности, что невозможно в силу замкнутости поверхности $\mathbb{Q}^2$. Итак, существует вершина, в которой сходится не менее 5 стыковочных ребер.

6. Граф, составленный из максимально укрупненных стыковочных ребер, назовем *графом стыковки*. После удаления из $\mathbb{Q}^2$ графа стыковки поверхность распадется на *связные компоненты*, край каждой из которых содержит не менее четырех ребер (так как край вместе с компонентой вложен в одну и ту же кубическую решетку, а в ней угол между выходящими из одного узла двумя ребрами равен $\frac{\pi}{2}$ или π), где под ребром понимается максимально укрупненное стыковочное ребро, т.е. ребро графа стыковки. В каждой вершине графа стыковки сходится не менее четырех его ребер. Связную компоненту впредь будем называть *гранью*.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Обозначим число вершин графа стыковки через v , число ребер через p , число граней через z , эйлерову характеристику поверхности $\mathbb{Q}^2$ через χ . Тогда по формуле Эйлера имеем $v - p + z \geq \chi$ (равенство достигается тогда, когда каждая грань гомеоморфна диску). Так как каждая грань имеет не менее 4 сторон, а в каждой вершине сходится не менее 4 граней, то $v = v_4 + v_5 + v_6 + \dots$, $2p = 4v_4 + 5v_5 + 6v_6 + \dots$, $z = z_4 + z_5 + z_6 + \dots$, $2p = 4z_4 + 5z_5 + 6z_6 + \dots$, где v_q — число вершин, в которых сходятся по q ребер, z_n — число граней, ограниченных n сторонами. Умножая эти равенства соответственно на 4, -1 , 4, -1 и складывая их вместе, получим $4(v - p + z) = -v_5 - z_5 - 2v_6 - 2z_6 - 3v_7 - 3z_7 - \dots$, или

$$4\chi \leq -v_5 - z_5 - 2v_6 - 2z_6 - 3v_7 - 3z_7 - \dots$$

Это соотношение не может быть удовлетворено при $\chi = 2$ и (с учетом свойства 5) при $\chi = 0$. Следовательно, в случае сферы или тора граф стыковки пуст. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Теорема справедлива не только в случае квадрильяжного вложения, но и в случае квадрильяжного отображения, при котором реберный остов квадрильяжа $\mathbb{Q}^2$ гомеоморфного сфере или тору, погружен в $\mathbb{R}^3$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Долбилин Н. П., Штанько М. А., Штогрин М. И. // Докл. АН. 1997. Т. 354. № 4. С. 443–445.