Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Джалилов, Сингулярные инвариантные меры гомеоморфизмов окружности с изломами, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm188>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.89.56.158

26 апреля 2023 г., 03:33:12

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ ГОМЕОМОРФИЗМОВ ОКРУЖНОСТИ С ИЗЛОМАМИ

А. А. Джалилов

В настоящей работе изучаются гомеоморфизмы окружности с особенностями типа излома. Пусть $T_f x = \{f(x)\}$, $x \in S^1 = [0, 1)$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть числа, а функция $f(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

- a) $f(x)$ – непрерывная строго возрастающая функция и $0 < f(0) < 1$;
- b) $f(x+1) = f(x) + 1$ для любого $x \in \mathbb{R}^1$;
- c) $f \in C^{2+\varepsilon}(S^1 \setminus \{x_0\})$, $\varepsilon > 0$, $f'(x) > \text{const} > 0 \ \forall x \in S^1 \setminus \{x_0\}$;
- d) $\exists f'(x_0 - 0)$, $\exists f'(x_0 + 0)$ и $f'(x_0 - 0)/f'(x_0 + 0) = c \neq 1$.

Обозначим через ρ_f число вращения T_f : $\rho_f = \lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x)/n$, здесь $f^n(x)$ означает n -ю итерацию функции f . Всюду в дальнейшем мы будем предполагать, что число вращения ρ_f является иррациональным. Отсюда следует, что T_f является строго эргодическим, т.е. для T_f существует единственная инвариантная мера μ . Из теоремы Данжуа [1], [2] следует, что гомоморфизм T_f топологически сопряжен с линейным поворотом T_ρ , $T_\rho x = \{x + \rho\}$, т.е. существует сопрягающий гомеоморфизм T_φ такой, что $T_\varphi(T_f x) = T_\rho(T_\varphi x) \ \forall x \in S^1$. Хорошо известно, что $T_\varphi x = \mu([0, x])$, $x \in S^1$. Если диффеоморфизм $T_f \in C^{2+\varepsilon}(S^1)$, $\varepsilon > 0$, то для типичных чисел вращения $T_\varphi \in C^{1+\delta}(S^1)$, $0 < \delta < \varepsilon$ [3]. Отсюда следует, что инвариантная мера μ является абсолютно непрерывной относительно меры Лебега λ . Если гомеоморфизм имеет точку излома, результат будет диаметрально противоположным. А именно, если поднятие $f(x)$ гомеоморфизма T_f удовлетворяет условиям а)–d) и число вращения иррационально, то инвариантная мера μ является сингулярной относительно меры Лебега λ (см. [4]).

Обозначим $\underline{\tau}(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \mu([x, x + \varepsilon]) / \ln |\varepsilon|$, $\bar{\tau}(x) = \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \mu([x, x + \varepsilon]) / \ln |\varepsilon|$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Функции $\bar{\tau}(x)$ и $\underline{\tau}(x)$ называются соответственно верхним и нижним показателем сингулярности для меры μ .

Из инвариантности функций $\underline{\tau}(x)$, $\bar{\tau}(x)$ относительно T_f и эргодичности меры μ следует, что они являются постоянными на множестве полной μ -меры. Эти постоянные обозначим через $\underline{\tau}(\mu)$ и $\bar{\tau}(\mu)$ соответственно. Используя соображения, аналогичные тем, что были использованы в [1] для диффеоморфизмов, нетрудно показать, что гомеоморфизмы рассматриваемого нами класса являются эргодическими относительно меры Лебега. Отсюда следует, что $\underline{\tau}(x)$ и $\bar{\tau}(x)$ – почти постоянные функции по мере Лебега, обозначим их через $\underline{\tau}(\lambda)$ и $\bar{\tau}(\lambda)$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть поднятие $f(x)$ гомеоморфизма T_f удовлетворяет условиям а)–d), число вращения $\rho(f)$ иррационально и коэффициенты разложения $\rho(f)$ в непрерывную дробь ограничены. Тогда справедливы следующие неравенства: а) $0 < \underline{\tau}(\mu) \leq \bar{\tau}(\mu) < 1$; б) $1 < \underline{\tau}(\lambda) \leq \bar{\tau}(\lambda) < \infty$.

Аналогичная теорема для критических гомеоморфизмов из класса C^3 была доказана в [5].

Приведем пример, когда нижний и верхний показатели сингулярности совпадают. Рассмотрим множество X непрерывных, строго возрастающих пар $(f(x), x \in [-1, 0]; g(x), x \in [0, \alpha])$, удовлетворяющих следующим условиям:

- 1) $f(0) = \alpha$, $\alpha > 0$, $g(0) = -1$, $f(\alpha) = g(1)$; 2) $f(-1) < 0$, $f^{(2)}(-1) > 0$.

При помощи (f, g) из X можно построить гомеоморфизм окружности: $Tx = f(x)$ при $-1 \leq x < 0$; $Tx = g(x)$ при $0 \leq x < \alpha$. Обозначим через X_0 подмножество X , состоящее из таких пар (f, g) , что число вращения соответствующих гомеоморфизмов окружности равно “золотому сечению”, т.е. $\rho_0 = (\sqrt{5} - 1)/2$. На X_0 определим преобразование ренормгруппы: $R_1(f(x), -1 \leq x < 0; g(x), 0 \leq x < \alpha) = (f'(x), -1 \leq x < 0; g'(x), 0 \leq x < \alpha')$, где $f'(x) = -\alpha^{-1}f(g(-\alpha x))$, $g'(x) = -\alpha^{-1}f(-\alpha x)$, $\alpha' = -\alpha^{-1}f(-1)$.

Обозначим $c = f'(-0)/f'(0)$. В работе [2] доказано, что при фиксированном c , $c \neq 1$, преобразование R_1 в X_0 имеет единственную периодическую траекторию $\{(f_i, g_i), i = 1, 2\}$ периода 2. Функции $f_i(x)$, $g_i(x)$, $i = 1, 2$, являются дробно-линейными функциями. Обозначим через

T_1 гомеоморфизм окружности $[-1, \alpha_1]$, отвечающий (f_1, g_1) (пара (f_2, g_2) изучается аналогичным образом). Ясно, что $\rho(T_1) = \rho_0$. Хорошо известно, что разложение ρ_0 в непрерывную дробь имеет вид $\rho_0 = [1, 1, \dots, 1, \dots]$. Обозначим p_n/q_n n -ю подходящую дробь ρ_0 . Числа q_n удовлетворяют следующему рекуррентному соотношению: $q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$, $n \geq 1$, $q_0 = q_1 = 1$. Обозначим $x_i = T_1^i x_0$, $i \geq 1$, $x_0 = 0$, и $\Delta_0^{(n)}$ – замкнутый отрезок, соединяющий точки x_0 и x_{q_n} . Положим $\Delta_i^{(n)} = T_1^i x_0$, $i \geq 1$.

ЛЕММА (см. [6]). Для каждого n системы отрезков $\Delta_i^{(n-1)}$, $0 \leq i < q_n$; $\Delta_j^{(n)}$, $0 \leq j < q_{n-1}$, не пересекаются (за исключением концевых точек) и образуют разбиение окружности.

Полученное разбиение обозначим ξ_{n-1} . При переходе от ξ_{n-1} к ξ_n происходит следующее. Все отрезки $\Delta_j^{(n)}$, $0 \leq j < q_{n-1}$, сохраняются, а каждый из отрезков $\Delta_i^{(n-1)}$, $0 \leq i < q_n$, распадается на два отрезка: $\Delta_i^{(n-1)} = \Delta_i^{(n+1)} \cup \Delta_{i+q_{n-1}}^{(n)}$.

Теперь, используя последовательность разбиений, построим символическое представление для всех точек $x \in S \setminus \{x_i, i \geq 0\}$. Положим $a_n = a$, если $x \in \Delta_i^{(n)}$, $0 \leq i < q_n$, и $a_n = 1$, если $x \in \Delta_{i+q_{n-1}}^{(n)}$. Если $x \in \Delta_i^{(n+1)}$, то $a_n = 0$. Таким образом, мы получили взаимно однозначное соответствие: $x \leftrightarrow (a_0, a_1, \dots, a_n, \dots) = \vec{a}$, где $a_0 = a$, $0; a_n = a, 0, 1$, $n \geq 1$; (легко видеть, что $a_n = a$, если и только если $a_{n-1} = 0$). Множество всех таких слов обозначим A .

ТЕОРЕМА 2. Существует функция $U: A \rightarrow R_1$, обладающая следующими свойствами:

- 1) функция $U(\vec{a})$ является непрерывной (в тихоновской топологии), и существуют константы $c_i < 0$, $i = 1, 2$, такие, что для любого $\vec{a} \in A$ $c_1 \leq U(\vec{a}) \leq c_2$;
- 2) пусть $\vec{a}, \vec{b} \in A$ и $a_i = b_i$, $0 \leq i \leq k$, тогда $|U(\vec{a}) - U(\vec{b})| \leq \text{const } q^k$, где константа q , $0 < q < 1$, не зависит от k , $\vec{a}$ и $\vec{b}$;
- 3) пусть $\Delta_s^{(n)} \subset \Delta_m^{(n-k)}$ и этим отрезкам соответствуют слова $(a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{n-1})$ и $(a_0, a_1, \dots, a_{n-k-1})$, тогда

$$|\Delta_m^{(n)}| = |\Delta_m^{(n-k)}| \exp \left\{ \sum_{s=n-k}^{n-1} U(a_s, a_{s-1}, \dots, a_0, \vec{v}) \right\} (1 + \psi(\vec{a})),$$

где $\vec{v}$ – такой вектор, что $(a_0, \vec{v}) \in A$, и $|\psi(\vec{a})| \leq \text{const } q^k$.

Пусть $x \in [-1, \alpha_1]$ и $\Delta^{(n)}(x)$ – отрезок разбиения ξ_n , содержащий x . Обозначим $\Delta_n = |q_n \rho - p_n|$, т.е. Δ_n – длина отрезка n -го ранга при линейном повороте на угол ρ .

ТЕОРЕМА 3. Для почти всех x по мере Лебега (по мере μ) существует конечный предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \Delta_n / \ln |\Delta^{(n)}(x)| = \gamma(\lambda)$ ($\gamma(\mu)$) и $\underline{\lambda} = \bar{\lambda} = \gamma(\lambda)$, $\underline{\mu} = \bar{\mu} = \gamma(\mu)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Корнфельд И. П., Синай Я. Г., Фомин С. В. Эргодическая теория. М.: Наука, 1980. [2] Khanin K. M., Vul E. B. // Adv. Soviet Math. 1991. V. 3. P. 57–98. [3] Синай Я. Г., Ханин К. М. // УМН. 1989. Т. 44. № 1. С. 57–82. [4] Джалилов А. А., Ханин К. М. // Функц. анализ и его прил. 1998. Т. 32. № 3. С. 11–21. [5] Graczyk J., Swiatek G. // Comm. Math. Phys. 1993. V. 157. № 2. P. 213–230. [6] Синай Я. Г. Современные проблемы эргодической теории. М.: Физматлит, 1995.