Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. А. Ковалева, Об одном свойстве индекса нелокальных эллиптических задач,
УМН, 1999, том 54, выпуск 4, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm189>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 16:39:32

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ИНДЕКСА НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

О. А. КОВАЛЕВА

Рассматриваются эллиптические уравнения порядка $2m$ в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ с границей ∂Q и нелокальными условиями, связывающими следы решения и его производных на $(n-1)$ -мерных гладких многообразиях Γ_i ($\bigcup_i \bar{\Gamma}_i = \partial Q$) с их значениями на некотором компакте $\Omega \subset \bar{Q}$. В случае $\Omega \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$ мы сформулируем теоремы об устойчивости индекса нелокальных задач в весовых пространствах $V_{p,a}^{k+2m}(Q)$, где $\mathcal{K}_1 = \bigcup_j (\bar{\Gamma}_j \setminus \Gamma_j)$. Для $p = 2$ эти результаты были получены в [1]. Отметим, что вопрос о сохранении нулевого индекса для некоторых классов нелокальных возмущений задачи Дирихле для эллиптических уравнений второго порядка в других функциональных пространствах изучался в [2], [3].

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область с границей $\partial Q = \bigcup_i \bar{\Gamma}_i$ ($i = 1, \dots, N_0$), где Γ_i суть $(n-1)$ -мерные многообразия класса C^∞ , открытые в топологии ∂Q . Будем предполагать, что некоторая окрестность каждой точки $g \in \partial Q \setminus \bigcup_i \Gamma_i$ диффеоморфна двугранному углу $\mathcal{D}_g = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : |\varphi| < b, z \in \mathbb{R}^{n-2}\}$, $n \geq 3$; или плоскому углу $K_g = \{x = y \in \mathbb{R}^2 : |\varphi| < b\}$, $n = 2$. Здесь $0 < b < \pi$, (r, φ) – полярные координаты на плоскости $\{y\}$. Введем множество $\mathcal{K}$ по формуле $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \mathcal{K}_3$, где $\mathcal{K}_1 = \partial Q \setminus \bigcup_i \Gamma_i = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{1\nu}$, $\mathcal{K}_2 = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{2\nu} \subset \bigcup_i \Gamma_i$, $\mathcal{K}_3 = \bigcup_\nu \mathcal{K}_{3\nu} \subset Q$; $\mathcal{K}_{j\nu}$ ($j = 1, 2, 3$; $\nu = 1, \dots, N_j$) – непересекающиеся замкнутые $(n-2)$ -мерные многообразия класса C^∞ . В случае $n = 2$ $\mathcal{K}_{j\nu}$ – изолированные точки и $N_0 = N_1$.

Пусть в Q существует функция $\rho = \rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{K})$, значения которой в некоторой окрестности множества $\mathcal{K}$ совпадают с расстоянием от точки $x \in Q$ до $\mathcal{K}$, а вне этой окрестности $\rho(x) \geq c > 0$. Введем пространство $V_{p,a}^k(Q)$ как пополнение множества $\dot{C}^\infty(\bar{Q} \setminus \mathcal{K})$ по норме

$$\|u\|_{V_{p,a}^k(Q)} = \left\{ \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q \rho^{p(a-k+|\alpha|)} |D^\alpha u|^p dx \right\}^{1/p},$$

где $a \in \mathbb{R}$, $\dot{C}^\infty(\bar{Q} \setminus \mathcal{K})$ – множество бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями в $\bar{Q} \setminus \mathcal{K}$. Через $V_{p,a}^{k-1/p}(\Gamma)$ обозначим пространство следов на $(n-1)$ -мерном гладком многообразии $\Gamma \subset \bar{Q}$ с нормой

$$\|\psi\|_{V_{p,a}^{k-1/p}(\Gamma)} = \inf \|u\|_{V_{p,a}^k(Q)} \quad (u \in V_{p,a}^k(Q) : u|_\Gamma = \psi).$$

Рассмотрим задачу

- (1) $Au = A_0 u + A_1 u = f_0(x) \quad (x \in Q \setminus \mathcal{K}),$
- (2) $B_{i\mu} u = B_{i\mu}^0 u|_{\Gamma_i} + B_{i\mu}^1 u + B_{i\mu}^2 u = f_{i\mu}(x) \quad (x \in \Gamma_i; i = 1, \dots, N_0; \mu = 1, \dots, m).$

Здесь

$$A_0(x, D) = \sum_{|\alpha|=2m} a_\alpha(x) D^\alpha, \quad B_{i\mu}^0(x, D) = \sum_{|\alpha|=m_{i\mu}} b_{i\mu 0\alpha}(x) D^\alpha;$$

$$a_\alpha, b_{i\mu 0\alpha} \in C^\infty(\mathbb{R}^n), \quad f = \{f_0, f_{i\mu}\} \in \mathcal{V}_{p,a}^k(Q, \partial Q) = V_{p,a}^k(Q) \times \prod_i \prod_\mu V_{p,a}^{k+2m-m_{i\mu}-\frac{1}{p}}(\Gamma_i)$$

– комплекснозначные функции.

Предположим, что выполняются следующие условия.

1. Оператор $A_0(x, D)$ – правильно эллиптический для всех $x \in \bar{Q}$.
2. Система операторов $B_{i\mu}^0(x, D)$, $\mu = 1, \dots, m$, удовлетворяет условию Лопатинского по отношению к оператору $A_0(x, D)$ для всех $i = 1, \dots, N_0$ и $x \in \bar{\Gamma}_i$.

3. Если $n \geq 3$, то $m_{i\mu} \leq 2m - 1$ и система операторов $B_{i\mu}^0(x, D)$, $\mu = 1, \dots, m$, является нормальной для всех $x \in \bar{\Gamma}_i$ и $i = 1, \dots, N_0$.

4. Операторы

$$\begin{aligned} A_1 &: V_{p,a}^{k+2m-1}(Q) \rightarrow V_{p,a}^k(Q), \\ B_{i\mu}^1 &: V_{p,a}^{k+2m-1}(Q) \rightarrow V_{p,a}^{k+2m-m_{i\mu}-\frac{1}{p}}(\Gamma_i), \\ B_{i\mu}^2 &: V_{p,a}^{k+2m}(Q) \rightarrow V_{p,a}^{k+2m-m_{i\mu}-\frac{1}{p}}(\Gamma_i) \end{aligned}$$

— ограниченные, и существуют числа ε, σ такие, что для всех $u \in V_{p,a}^{k+2m}(Q)$

$$(3) \quad \|B_{i\mu}^2 u\|_{V_{p,a}^{k+2m-m_{i\mu}-\frac{1}{p}}(\Gamma_i)} \leq c_1 \|u\|_{V_{p,a}^{k+2m}(Q \setminus S_{2\varepsilon}(\mathcal{K}_1))},$$

$$(4) \quad \|B_{i\mu}^2 u\|_{V_{p,a}^{k+2m-m_{i\mu}-\frac{1}{p}}(\Gamma_i \setminus S_\varepsilon(\mathcal{K}_1))} \leq c_2 \|u\|_{V_{p,a}^{k+2m}(Q_\sigma)},$$

где $S_\delta(\mathcal{K}_1) = \{x \in \mathbb{R}^n : \rho(x, \mathcal{K}_1) \leq \delta\}$.

Определим операторы $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}: V_{p,a}^{k+2m}(Q) \rightarrow \mathcal{V}_{p,a}^k(Q, \partial Q)$ по следующим формулам $\mathcal{L}_0 = \{A_0 u, B_{i\mu}^0 u|_{\Gamma_i}\}$, $\mathcal{L} u = \{A u, B_{i\mu} u\}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть выполняются условия 1–4 и оператор $\mathcal{L}_0$ — фредгольмов. Тогда $\mathcal{L}$ — фредгольмов и $\text{ind } \mathcal{L}_0 = \text{ind } \mathcal{L}$.

Отметим, что достаточные условия фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_0$ для плоских областей с угловыми точками и пространственных областей с коническими точками были получены в [4]. Используя методы, предложенные в [5], можно получить достаточные условия фредгольмовости оператора $\mathcal{L}_0$ в нашем случае.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{aligned} (5) \quad & \Delta u = f_0(x) \quad (x \in Q \setminus \mathcal{K}), \\ (6) \quad & u(x)|_{\Gamma_1} + \alpha(x)u(\omega(x))|_{\Gamma_1} = f_1(x) \quad (x \in \Gamma_1), \\ (7) \quad & u(x)|_{\Gamma_2} = f_2(x) \quad (x \in \Gamma_2). \end{aligned}$$

Здесь область $Q \in \mathbb{R}^2$ с границей $\partial Q \in C^\infty$, $\partial Q = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \mathcal{K}_1$; Γ_i — открытые дуги ($i = 1, 2$), множество $\mathcal{K}_1$ состоит из точек g_1, g_2 , которые являются концами дуг Γ_i ; ω — невырожденное бесконечно дифференцируемое преобразование, отображающее некоторую окрестность γ дуги $\bar{\Gamma}_1$ на $\omega(\gamma)$ так, что $\omega(\Gamma_1) \subset Q$ и $\omega(\Gamma_1) \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$; $\alpha \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — комплекснозначная функция. Множество $\mathcal{K} = \mathcal{K}_1 \cup \omega(\mathcal{K}_1) \cup \omega(\mathcal{K}_1 \cap \Gamma_1)$. Очевидно, из условия $\omega(\bar{\Gamma}_1) \cap \mathcal{K}_1 = \emptyset$ следует выполнение неравенств (3), (4), в которых $B_{11}^2 u = \alpha(x)u(\omega(x))|_{\Gamma_1}$, $m_{i\mu} = 0$, $m = 1$, $2\varepsilon < \rho(\omega(\bar{\Gamma}_1), \mathcal{K}_1)$, $\sigma < \rho(\omega(\bar{\Gamma}_1 \setminus S_\varepsilon(\mathcal{K}_1)), \partial Q)$.

Автор благодарит А. Л. Скубачевского за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Skubachevskii A. L. // J. Math. Anal. Appl. 1991. V. 160. № 2. P. 323–341. [2] Кишкис К. Ю. // Дифференц. уравнения. 1988. Т. 24. № 1. С. 105–110. [3] Гушин А. К., Михайлов В. П. // Матем. сб. 1994. Т. 185. № 1. С. 121–160. [4] Кондратьев В. А. // Труды ММО. 1967. Т. 16. С. 209–292. [5] Мазья В. Г., Пламеневский Б. А. // Труды ММО. 1978. Т. 37. С. 49–93.