Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. И. Мохов, Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 3, 85–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm19>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.23.180.231

26 апреля 2023 г., 17:16:04

УДК 517.9+514.7+515.16

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ И ПУАССОНОВЫ СТРУКТУРЫ НА ПРОСТРАНСТВАХ ПЕТЕЛЬ ГЛАДКИХ МНОГООБРАЗИЙ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

О. И. Мохов

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	86
Глава 1. Дифференциальная геометрия симплектических структур на пространствах петель гладких многообразий	88
§ 1.1. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий. Основные определения	88
§ 1.2. Однородные симплектические структуры первого порядка на пространствах петель псевдоримановых многообразий и двумерные нелинейные сигма-модели с кручением	104
§ 1.3. Симплектические и пуассоновы структуры вырожденных лагранжевых систем	110
§ 1.4. Однородные симплектические структуры второго порядка на пространствах петель почти симплектических и симплектических многообразий и симплектические связности	116
§ 1.5. Комплексы однородных форм на пространствах петель гладких многообразий и их группы когомологий	119
Глава 2. Локальные и нелокальные пуассоновы структуры дифференциально-геометрического типа	122
§ 2.1. Риманова геометрия многомерных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа	122
§ 2.2. Гамильтоновы системы гидродинамического типа и метрики постоянной римановой кривизны	130
§ 2.3. Неоднородные гамильтоновы системы гидродинамического типа ...	137
§ 2.4. Бивекторы Киллинга–Пуассона на пространствах постоянной римановой кривизны и бигамильтонова структура обобщенных магнетиков Гейзенберга	144
§ 2.5. Однородные пуассоновы структуры дифференциально-геометрического типа	148
Глава 3. Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля и недиагонализуемые интегрируемые системы гидродинамического типа	152
§ 3.1. Уравнения ассоциативности как недиагонализуемые интегрируемые однородные системы гидродинамического типа	152
§ 3.2. Пуассоновы и симплектические структуры уравнений ассоциативности	161

§3.3. Теорема о каноническом гамильтоновом представлении ограничения произвольной эволюционной системы на множество стационарных точек ее невырожденного интеграла и ее приложения к уравнениям ассоциативности и системам гидродинамического типа	170
Список литературы	186

Введение

Бесконечномерная симплектическая и пуассонова геометрия тесно связана с современной математической физикой и теорией интегрируемых систем уравнений в частных производных. Так, изучаемые в статье симплектические и пуассоновы структуры специального дифференциально-геометрического типа на пространствах петель многообразий порождают гамильтоновы представления ряда важных нелинейных систем математической физики и теории поля, например, таких как системы гидродинамического типа (возникающие не только в эйлеровой гидродинамике, но и, в частности, при применении процедуры усреднения Уизема к уравнениям теории солитонов [31], [33]), уравнения ассоциативности топологической теории поля [147], [148], [17], [27], [28] (играющие также одну из ключевых ролей в разрабатываемой в настоящее время теории инвариантов Громова–Виттена, теории квантовых когомологий и некоторых классических задачах алгебраической геометрии [135], [69], [70]), нелинейные сигма-модели, магнетики Гейзенберга, уравнения Монжа–Ампера и др. Это позволяет эффективно использовать при исследовании этих систем дифференциально-геометрические, гамильтоновы и бигамильтоновы методы, изучить интегрируемые классы таких систем и выяснить дифференциально-геометрическую и бигамильтонову природу интегрируемых случаев.

Изучение пуассоновых структур специального дифференциально-геометрического типа было начато в работах Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [31], [32], где был развит общий гамильтонов формализм систем гидродинамического типа в связи с изучением уравнений Уизема, описывающих эволюцию медленно промодулированных многофазных решений систем нелинейных уравнений. Пуассоновы структуры, введенные и исследованные Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым, порождаются плоскими псевдоримановыми метриками и приводятся к постоянному виду локальными заменами координат на многообразии. На основе этого гамильтонова подхода С. П. Царевым [140] была разработана дифференциально-геометрическая теория интегрирования диагонализуемых гамильтоновых (а также полугамильтоновых) систем гидродинамического типа, в частности, уравнений Уизема, получаемых при усреднении уравнения Кортевега–де Вриза. В работах автора статьи и Е. В. Ферапонтова ([111], см. также [105], [36], [112]) найдено нелокальное обобщение пуассоновых структур Дубровина–Новикова, порождаемое произвольными метриками постоянной римановой кривизны (при этом результаты Дубровина–Новикова соответствуют метрикам нулевой кривизны) и играющее важную роль в теории систем гидродинамического типа, в частности, в теории уравнений Уизема. В гамильтоновой теории многомер-

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 96-01-01623), РФФИ, программа поддержки ведущих научных школ (грант № 96-15-96027) и INTAS (грант № 96-0770).

ных систем гидродинамического типа возникают новые дифференциально-геометрические задачи об описании препятствий к приведению локальных многомерных пуассоновых структур гидродинамического вида к постоянному виду и о классификации таких структур, эквивалентной классификации бесконечномерных алгебр Ли специального вида [32], [33], [89], [99] (полный набор тензорных соотношений на препятствия и полная классификация при малом числе компонент получены в работах автора [89], [99]). Теория неоднородных пуассоновых структур гидродинамического типа, имеющая важные приложения, в частности, в теории магнетиков Гейзенберга, уравнения Кортевега–де Вриза, уравнений N -волн и других неоднородных систем гидродинамического типа, приводит к теории бивекторов Киллинга–Пуассона на многообразиях постоянной римановой кривизны, построенной в [99], [112]. Общие локальные однородные пуассоновы структуры произвольных порядков были впервые рассмотрены в [32], где была поставлена задача их классификации, которая на данный момент далека от своего полного решения. Полностью классифицированы только однородные пуассоновы структуры нулевого (G. Darboux), первого (Б. А. Дубровин, С. П. Новиков [31]) и второго (Г. В. Потемин [131], [132], P. W. Doyle [26]) порядков. Для однородных пуассоновых структур третьего порядка получены только частичные классификационные результаты (Г. В. Потемин [131], P. W. Doyle [26]). Однородные пуассоновы структуры третьего порядка играют важную роль (в частности, участвуют в бигамильтоновых представлениях) в теории уравнений Монжа–Ампера (O. I. Mokhov, Y. Nutku [114]) и в теории уравнений ассоциативности в двумерной топологической теории поля (E. V. Ferapontov, C. A. P. Galvão, O. I. Mokhov, Y. Nutku [46]).

Однородные симплектические структуры на пространствах петель гладких многообразий были введены и изучены в работах автора [93], [94], [101], [108], [110], их рассмотрение имеет естественные мотивировки, связанные с нелинейными сигма-моделями, теорией струн и соответствующей геометрией пространств петель. Как показано автором в [93], уравнения движения двумерных нелинейных сигма-моделей с кручением, определяющих, в частности, классическое действие бозонных струн, обладают гамильтоновыми представлениями, порождаемыми однородными симплектическими структурами первого порядка на пространствах петель псевдоримановых многообразий, т.е. вида

$$\omega(\xi, \eta)[\gamma] = \int_{\gamma} \langle \xi, \nabla_{\dot{\gamma}} \eta \rangle,$$

где $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij} \xi^i \eta^j$ – скалярное произведение на $T_{\gamma(x)}M$, задаваемое псевдоримановой метрикой $g_{ij}(u)$ на многообразии M , а $\nabla_{\dot{\gamma}}$ – ковариантное дифференцирование вдоль петли γ на M . В работах автора [93], [94] полностью решена задача описания однородных симплектических (предсимплектических) форм первого и второго порядков на пространствах петель гладких многообразий (симплектические формы нулевого порядка классифицируются классической теоремой Дарбу конечномерной симплектической геометрии). В частности, симплектические структуры первого порядка задаются аффинными связностями на псевдоримановом многообразии, согласованными с метрикой и обладающими тензором кручения, определяющим замкнутую 3-форму на этом псевдоримановом многообразии [93], [108], а симплектические структуры второго порядка порождаются симплектическими связностями на почти симплектических многообразиях [94], [108]. В [98], [100] автором определены и изучены общие

однородные k -формы произвольных порядков на пространствах петель гладких многообразий, построены комплексы $(\Omega_{[m]}, d)$ однородных форм произвольного порядка m и в ряде случаев найдены их группы когомологий. Особое внимание в статье уделяется симплектическим и пуассоновым структурам, а также k -формам, инвариантным относительно группы $\text{Diff}^+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию S^1 , т.е. структурам на пространствах петель, не зависящим от параметризации петли. Кроме того, несомненный интерес представляют согласованные симплектические и пуассоновы структуры, порождающие, как стало известно после работ F. Magri [78], [79], интегрируемые бигамильтоновы нелинейные системы. Изучение условия согласованности для симплектических и пуассоновых структур на пространствах петель многообразий приводит к новым интересным и нетривиальным дифференциально-геометрическим задачам, решение которых позволяет существенно продвинуться в исследовании свойств интегрируемости соответствующих нелинейных систем уравнений в частных производных.

Проблема классификации или эффективного описания согласованных пуассоновых структур гидродинамического типа пока не решена (см. [27], [43]), хотя в двухкомпонентном случае эта задача сведена автором данной статьи к интегрированию любой недиагонализующей четырехкомпонентной однородной системы гидродинамического типа, для которой, в частности, построены интегрируемые двухкомпонентные редукции [102], а в общем N -компонентном случае также всегда имеется естественная редукция к специальным решениям уравнений ассоциативности [27], [103] (глубокая связь некоторых специальных классов согласованных пуассоновых структур гидродинамического типа с уравнениями ассоциативности и теорией фробениусовых многообразий открыта Б. А. Дубровиным [27]).

Отметим также, что в бесконечномерной симплектической и пуассоновой геометрии, вообще говоря, нет аналога общей теоремы Дарбу, поэтому важной и актуальной задачей является изучение возможности приведения соответствующих бесконечномерных симплектических и пуассоновых структур к канонической постоянной форме, что позволяет, в частности, эффективно применять в дальнейшем методы теории возмущений при исследовании данной гамильтоновой системы уравнений в частных производных.

В настоящей статье формулы нумеруются по параграфам. В тексте при ссылке на формулу из другого параграфа указывается номер этого параграфа, например, (1.2.3) – это формула (3) из параграфа 1.2 главы 1.

Глава 1.

Дифференциальная геометрия симплектических структур на пространствах петель гладких многообразий

§ 1.1. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий. Основные определения

Пусть M – гладкое N -мерное многообразие с локальными координатами $u^1, \dots, u^N$. Петлей γ на многообразии M называется произвольное гладкое параметризованное отображение окружности S^1 в M , $\gamma: S^1 \rightarrow M$, $\gamma(x) = \{u^i(x), 1 \leq i \leq N\}$, $x \in S^1$.

Под *пространством петель* ΩM многообразия M мы всегда будем понимать пространство всех гладких параметризованных отображений γ окружности S^1 в M . Касательное пространство $T_\gamma \Omega M$ пространства петель ΩM в точке (петле) γ состоит из всех гладких векторных полей $\xi = \{\xi^i, 1 \leq i \leq N\}$, определенных вдоль петли γ , причем $\xi(\gamma(x)) \in T_{\gamma(x)} M, \forall x \in S^1$, где $T_{\gamma(x)} M$ – касательное пространство многообразия M в точке $\gamma(x)$.

Введем обозначение $A^k, k \geq 0$, для линейного пространства кососимметрических k -форм $\omega^k(\xi_1, \dots, \xi_k)[\gamma]$ на пространстве петель ΩM , т.е. определенных в каждой точке (петле) $\gamma \in \Omega M$ полилинейных отображений

$$\omega^k[\gamma]: \underbrace{T_\gamma \Omega M \times \dots \times T_\gamma \Omega M}_{k \text{ экземпляров}} \rightarrow \mathbb{R},$$

удовлетворяющих условию кососимметричности

$$\omega^k(\xi_{\sigma(1)}, \dots, \xi_{\sigma(k)})[\gamma] = \text{sgn } \sigma \omega^k(\xi_1, \dots, \xi_k)[\gamma],$$

где σ – произвольная перестановка k символов, $\text{sgn } \sigma = \prod_{1 \leq i < j \leq k} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \pm 1$ – знак перестановки σ , $\xi_i \in T_\gamma \Omega M$, $\xi_i = (\xi_i^1, \dots, \xi_i^N)$, $1 \leq i \leq k$. Отметим, что линейное пространство A^0 (пространство 0-форм на ΩM) определяется как пространство функционалов ω^0 на пространстве петель ΩM :

$$\omega^0: \Omega M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Дифференциал d на линейном пространстве $A^k, k \geq 0$, определяется следующей формулой (естественное обобщение обычного дифференциала для k -форм на алгебре Ли векторных полей на многообразии):

$$(1) \quad (d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1})[\gamma] = \sum_{i=1}^{k+1} \sum_{s=1}^N (-1)^{i-1} \int_{S^1} \xi_i^s \frac{\delta \omega(\xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \xi_{k+1})[\gamma]}{\delta u^s} dx + \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([\xi_i, \xi_j], \xi_1, \dots, \widehat{\xi}_i, \dots, \widehat{\xi}_j, \dots, \xi_{k+1})[\gamma],$$

где в общем случае коммутатор векторных полей определяется через производные Га-то одного векторного поля вдоль другого:

$$(2) \quad [\xi, \eta] = \eta'_u \xi - \xi'_u \eta,$$

$$(3) \quad \xi'_u \eta = \left(\frac{d}{d\varepsilon} \xi[u + \varepsilon \eta] \right) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Для произвольных гладких векторных полей локального типа

$$\eta = \eta(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(p)}) \quad \text{и} \quad \zeta = \zeta(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(r)})$$

это определение коммутатора приводит к формуле

$$(4) \quad [\eta, \zeta]^j = \eta_{(s)}^i \frac{\partial \zeta^j}{\partial u_{(s)}^i} - \zeta_{(s)}^i \frac{\partial \eta^j}{\partial u_{(s)}^i},$$

где $f_{(s)} = d^s f / dx^s$, $d/dx = \partial/\partial x + u_x \partial/\partial u + u_{xx} \partial/\partial u_x + \dots$, — полная s -я производная по независимой переменной x .

Дифференциал d является линейным отображением $d: A^k \rightarrow A^{k+1}$, $k \geq 0$, причем $d^2 = 0$. Таким образом, мы имеем комплекс кососимметрических форм на пространстве петель ΩM :

$$(5) \quad 0 \xrightarrow{d} A^0 \xrightarrow{d} A^1 \xrightarrow{d} A^2 \xrightarrow{d} \dots$$

1. Симплектические структуры. В данной статье нас, в первую очередь, будут интересовать замкнутые кососимметрические 2-формы $\omega(\xi, \eta)[\gamma]$ на пространстве петель ΩM , т.е. для каждой петли γ и произвольных векторных полей ξ, η, ζ , определенных вдоль этой петли, должны быть выполнены следующие условия:

$$(6) \quad \omega(\xi, \eta)[\gamma] = -\omega(\eta, \xi)[\gamma] \quad (\text{кососимметричность}),$$

$$(7) \quad (d\omega)(\xi, \eta, \zeta)[\gamma] = 0 \quad (\text{замкнутость}).$$

В соответствии с (1) дифференциал кососимметрической 2-формы $\omega(\xi, \eta)[\gamma]$ определяется формулой

$$(8) \quad (d\omega)(\xi, \eta, \zeta)[\gamma] = \sum_{(\xi, \eta, \zeta)} \left\{ \int_{S^1} \xi^i \frac{\delta \omega(\eta, \zeta)[\gamma]}{\delta u^i} dx - \omega([\xi, \eta], \zeta)[\gamma] \right\},$$

где $\xi, \eta, \zeta \in T_\gamma \Omega M$, а знак $\sum_{(\xi, \eta, \zeta)}$ здесь и всюду далее в данной статье обозначает суммирование по всем циклическим перестановкам элементов (ξ, η, ζ) .

Рассмотрим билинейную форму $\omega(\xi, \eta)[\gamma]$ на пространстве петель ΩM :

$$(9) \quad \omega(\xi, \eta)[\gamma] = \int_{S^1} \xi^i M_{ij} \eta^j dx,$$

где $\xi, \eta \in T_\gamma \Omega M$, $\xi = (\xi^1, \dots, \xi^N)$, $\eta = (\eta^1, \dots, \eta^N)$, $M = (M_{ij})$ — линейный оператор, зависящий от петли $\gamma \in \Omega M$:

$$M[\gamma]: T_\gamma \Omega M \rightarrow T_\gamma^* \Omega M.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Если выполнены условия (6) и (7), то оператор M_{ij} называется *симплектическим*, а 2-форма ω называется *предсимплектической формой* (или *предсимплектической структурой*) на пространстве петель ΩM .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. В бесконечномерном случае предсимплектические структуры, возникающие в теории интегрируемых уравнений математической физики и теории поля, обычно называют симплектическими даже в том случае, если 2-форма ω порождена на ΩM , т.е. существует ненулевое гладкое векторное поле ξ вдоль петли γ такое, что $\omega(\xi, \eta)[\gamma] = 0$ для всех $\eta \in T_\gamma \Omega M$. Мы также будем придерживаться в данной статье этого соглашения. Введение в общую теорию симплектических и пуассоновых структур на бесконечномерных функциональных пространствах в рамках формального вариационного исчисления, общепринятую терминологию, основные понятия, в частности, определение комплекса k -форм и дифференциала d , а также общие

условия симплектичности и гамильтоновости дифференциальных операторов в формальном вариационном исчислении и необходимые ссылки см., например, в [20], [23], а также в [60], [62], [63], [24], [54], [50].

При локальной замене координат $u^i = u^i(\tilde{u})$ на многообразии M симплектический оператор $M_{ij}[u(x)]$ преобразуется следующим образом:

$$(10) \quad \widetilde{M}_{sk}[\tilde{u}] = \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s} M_{ij}[u(\tilde{u})] \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^k}.$$

Это элементарное следствие закона преобразования векторных полей на многообразии и требования инвариантности для симплектической формы:

$$(11) \quad \omega(\xi, \eta)[\gamma] = \int_{S^1} \xi^i[u] M_{ij}[u] \eta^j[u] dx = \int_{S^1} \tilde{\xi}^s[\tilde{u}] \widetilde{M}_{sk}[\tilde{u}] \tilde{\eta}^k[\tilde{u}] dx,$$

$$\xi^i[u(\tilde{u})] = \tilde{\xi}^s[\tilde{u}] \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s}, \quad \eta^j[u(\tilde{u})] = \tilde{\eta}^k[\tilde{u}] \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^k}.$$

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать симплектические операторы как соответствующие дифференциально-геометрические объекты относительно локальных замен координат на многообразии M .

Отметим, что всякая симплектическая форма $\Omega_{ij}(u) du^i \wedge du^j$ на симплектическом многообразии M задает очевидную невырожденную симплектическую структуру

$$(12) \quad \omega(\xi, \eta)[\gamma] = \int_{S^1} \xi^i(x) \Omega_{ij}(u(x)) \eta^j(x) dx$$

на ΩM . Симплектические структуры вида

$$(13) \quad \omega(\xi, \eta)[\gamma] = \int_{S^1} \xi^i(x) \omega_{ij}(u(x)) \eta^j(x) dx$$

на пространстве петель называются *ультралокальными*. Очевидно, что все ультра-локальные симплектические структуры на пространстве петель ΩM гладкого многообразия M порождаются замкнутыми 2-формами $\omega_{ij}(u)$ на многообразии M . В этом случае условия симплектичности (6) и (7) эквивалентны хорошо известным соотношениям классической конечномерной симплектической геометрии

$$(14) \quad \omega_{ij}(u) = -\omega_{ji}(u) \quad (\text{кососимметричность})$$

и

$$(15) \quad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial \omega_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial u^j} = 0 \quad (\text{замкнутость}).$$

Вообще говоря, симплектический оператор, определяющий симплектическую структуру на пространстве петель, может зависеть не только от функций $u^i(x)$, как в ультралокальном случае, но и, в частности, от производных этих функций по x .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Симплектическая структура ω на пространстве петель ΩM называется *локальной*, если она определяется матричным дифференциальным симплектическим оператором M_{ij} , коэффициенты которого являются функциями от x , $u^i(x)$ и конечного числа производных $u_{(k)}^i(x)$.

Рассмотрим произвольную локальную симплектическую структуру, определяемую матричным дифференциальным оператором

$$(16) \quad M_{ij} = \sum_{k=0}^n a_{ij}^k(x, u(x), u_x, \dots) \frac{d^k}{dx^k}.$$

Порядком локальной симплектической структуры называется порядок n соответствующего дифференциального симплектического оператора M_{ij} . Очевидно, что свойство локальности и порядок локальной симплектической структуры инвариантны относительно локальных замен координат на многообразии.

Кососимметричность соответствующей локальной билинейной формы (9), (16) эквивалентна соотношению

$$(17) \quad \sum_k a_{ij}^k \frac{d^k}{dx^k} = \sum_k (-1)^{k+1} \frac{d^k}{dx^k} \circ a_{ji}^k.$$

Знак $\circ$ обозначает операторное умножение: $(A \circ B)(f) = A(B(f))$.

Замкнутость кососимметрической локальной билинейной формы (9), (16), (17) дает:

$$\begin{aligned} (d\omega)(\xi, \eta, \zeta)[\gamma] &= \int \xi^i(x) (-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \left(\eta^j(x) \frac{\partial a_{jk}^r}{\partial u_{(s)}^i} \zeta_{(r)}^k(x) \right) dx \\ &\quad - \int \xi^i(x) \eta_{(s)}^j(x) \frac{\partial a_{ik}^r}{\partial u_{(s)}^j} \zeta_{(r)}^k(x) dx + \int \xi^i(x) \zeta_{(s)}^k(x) \frac{\partial a_{ij}^r}{\partial u_{(s)}^k} \eta_{(r)}^j(x) dx \equiv 0, \end{aligned}$$

т.е. для произвольных гладких вектор-функций $\eta(x)$ и $\zeta(x)$ должно выполняться тождество:

$$(18) \quad (-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \left(\frac{\partial a_{jk}^r}{\partial u_{(s)}^i} \eta^j(x) \zeta_{(r)}^k(x) \right) - \frac{\partial a_{ik}^r}{\partial u_{(s)}^j} \eta_{(s)}^j(x) \zeta_{(r)}^k(x) + \frac{\partial a_{ij}^r}{\partial u_{(s)}^k} \eta_{(r)}^j(x) \zeta_{(s)}^k(x) \equiv 0.$$

В качестве первого нетривиального примера найдем полное описание всех локальных матричных симплектических структур нулевого порядка на пространстве петель ΩM , т.е. симплектических структур, задаваемых оператором умножения на матричную функцию $\omega_{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)})$:

$$(19) \quad \omega(\xi, \eta)[\gamma] = \int_{S^1} \xi^i \omega_{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)}) \eta^j dx.$$

Это естественное обобщение классических симплектических структур $\omega_{ij}(u)$ на многообразии.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2. В дальнейшем мы обычно будем опускать символ петли γ при обозначении симплектической структуры $\omega(\xi, \eta)$, рассматриваемой в некоторой произвольной точке (петле) $\gamma = \{u^i(x), 1 \leq i \leq N, x \in S^1\} \in \Omega M$.

ЛЕММА 1.1. *Оператор $\omega_{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)})$ является симплектическим тогда и только тогда, когда*

- 1) $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ (кососимметричность);
- 2) для произвольных двух гладких вектор-функций $\eta(x) = (\eta^1(x), \dots, \eta^N(x))$ и $\zeta(x) = (\zeta^1(x), \dots, \zeta^N(x))$ выполняется тождество (условие замкнутости)

$$(20) \quad (-1)^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u_{(n)}^s} \eta^i(x) \zeta^j(x) \right) + \frac{\partial \omega_{si}}{\partial u_{(n)}^j} \eta^i(x) \zeta_{(n)}^j(x) - \frac{\partial \omega_{sj}}{\partial u_{(n)}^i} \eta_{(n)}^i(x) \zeta^j(x) \equiv 0.$$

Лемма 1.1 следует из общих соотношений (17) и (18).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1 [108], [99]. *Оператор $\omega_{ij}(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)})$, не зависящий явно от независимой переменной x (трансляционно-инвариантный), задает симплектическую (предсимплектическую) форму (19) на ΩM тогда и только тогда, когда*

$$(21) \quad \omega_{ij}(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)}) = T_{ijk}(u) u_x^k + \Omega_{ij}(u),$$

где $T_{ijk}(u)$ – произвольная замкнутая 3-форма на многообразии M , а $\Omega_{ij}(u)$ – произвольная замкнутая 2-форма на M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.2 [108], [99]. *В общем случае произвольный локальный матричный оператор нулевого порядка $\omega_{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)})$ задает симплектическую (предсимплектическую) форму (19) на ΩM тогда и только тогда, когда*

$$(22) \quad \omega_{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)}) = \left(\int_0^x (d\Omega)_{ijk}(z, u(x)) dz + S_{ijk}(u(x)) \right) u_x^k + \Omega_{ij}(x, u(x)),$$

где $S_{ijk}(u)$ – произвольная замкнутая 3-форма на многообразии M , а $\Omega(z, u)$ – произвольное однопараметрическое семейство 2-форм на M , дифференциал d в (22) определен стандартной формулой

$$(23) \quad (d\Omega)_{ijk}(z, u(x)) = \frac{\partial \Omega_{ij}(z, u(x))}{\partial u^k} + \frac{\partial \Omega_{ki}(z, u(x))}{\partial u^j} + \frac{\partial \Omega_{jk}(z, u(x))}{\partial u^i}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что существуют такие i, j, s и $m \geq 2$, для которых $\partial \omega_{ij} / \partial u_{(m)}^s \neq 0$. Пусть $R = \max\{r : \exists p, q, l, \text{ для которых } \partial \omega_{pq} / \partial u_{(r)}^l \neq 0\}$. По предположению $R \geq 2$. Коэффициент при $\eta_x^i \zeta_{(R-1)}^j$ в тождестве (20) равен $(-1)^R R \partial \omega_{ij} / \partial u_{(R)}^s$, и в силу тождества (20) он обязан быть равен нулю, т.е. $\partial \omega_{ij} / \partial u_{(R)}^s \equiv 0$ при всех i, j, s . Таким образом, доказано, что $R \leq 1$, и, следовательно,

$\omega_{ij} = \omega_{ij}(x, u, u_x)$ – функции, зависящие только от x , $u^i(x)$ и производных первого порядка $u_x^i(x)$. В этом случае тождество (20) приобретает вид:

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u^s} \eta^i \zeta^j - \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial u_x^s} \eta^i \zeta^j \right)_x + \frac{\partial \omega_{si}}{\partial u^j} \eta^i \zeta^j + \frac{\partial \omega_{sj}}{\partial u_x^i} \eta^i \zeta^j - \frac{\partial \omega_{sj}}{\partial u^i} \eta^i \zeta^j - \frac{\partial \omega_{sj}}{\partial u_x^i} \eta_x^i \zeta^j \equiv 0,$$

откуда, рассматривая коэффициент при $u_{xx}^r(x) \eta^i \zeta^j$, немедленно получаем, что

$$\frac{\partial^2 \omega_{ij}}{\partial u_x^s \partial u_x^r} \equiv 0,$$

т.е.

$$(24) \quad \omega_{ij} = T_{ijk}(x, u(x)) u_x^k + \Omega_{ij}(x, u(x)).$$

Таким образом, локальные матричные симплектические операторы нулевого порядка, т.е. вида $\omega_{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)})$, не зависят от производных порядка старше первого и линейны по первым производным.

Для операторов ω_{ij} вида (24) кососимметричность и тождество (20) эквивалентны следующим соотношениям на $T_{ijk}(x, u(x))$ и $\Omega_{ij}(x, u(x))$:

$$(25) \quad T_{ijk} = -T_{jik},$$

$$(26) \quad \Omega_{ij} = -\Omega_{ji},$$

$$(27) \quad T_{ijk} = T_{kij},$$

$$(28) \quad \frac{\partial T_{ijk}}{\partial u^s} - \frac{\partial T_{ijs}}{\partial u^k} + \frac{\partial T_{jsk}}{\partial u^i} - \frac{\partial T_{isk}}{\partial u^j} = 0,$$

$$(29) \quad \frac{\partial T_{ijs}}{\partial x} = \frac{\partial \Omega_{ij}}{\partial u^s} + \frac{\partial \Omega_{si}}{\partial u^j} + \frac{\partial \Omega_{js}}{\partial u^i}.$$

Соотношения (25)–(29) эквивалентны следующим дифференциально-геометрическим условиям: $\Omega_{ij}(x, u)$ – однопараметрическое семейство кососимметрических 2-форм на многообразии M , параметризованных окружностью S^1 (здесь $x \in S^1$ – формальный параметр),

$$(30) \quad T_{ijk}(x, u) = \int_0^x (d\Omega)_{ijk}(z, u) dz + S_{ijk}(u),$$

где $S_{ijk}(u)$ – произвольная замкнутая 3-форма на многообразии M (кососимметричная по всем парам индексов),

$$(31) \quad (d\Omega)_{ijk}(z, u) = \frac{\partial \Omega_{ij}(z, u)}{\partial u^k} + \frac{\partial \Omega_{ki}(z, u)}{\partial u^j} + \frac{\partial \Omega_{jk}(z, u)}{\partial u^i},$$

т.е. $T_{ijk}(x, u)$ – однопараметрическое семейство замкнутых 3-форм на многообразии M , определяемое формулой (30). Наиболее простой дифференциально-геометрический смысл эти условия имеют в трансляционно-инвариантном случае, когда функции ω_{ij} не зависят явно от независимой переменной x . В этом случае

$$(32) \quad \omega_{ij}(u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)}) = T_{ijk}(u) u_x^k + \Omega_{ij}(u),$$

где $T_{ijk}(u)$ – произвольная замкнутая 3-форма на многообразии M , а $\Omega_{ij}(u)$ – произвольная замкнутая 2-форма на M . Отметим, что невырожденность оператора ω_{ij} в предложениях 1.1 и 1.2 не предполагается.

Элементарным следствием предложения 1.1 является следующее утверждение: *на пространстве петель любого двумерного многообразия любая локальная трансляционно-инвариантная симплектическая структура нулевого порядка является ультралокальной.*

СЛЕДСТВИЕ 1.1 [99]. *Все локальные симплектические (предсимплектические) формы нулевого порядка на ΩM , т.е. вида (19), инвариантные относительно группы $\text{Diff}^+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию S^1 , имеют вид*

$$(33) \quad \omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \xi^i T_{ijk}(u(x)) u_x^k \eta^j dx,$$

где $T_{ijk}(u)$ – произвольная замкнутая 3-форма на многообразии M , и всегда являются вырожденными замкнутыми 2-формами на ΩM , так как $\det(T_{ijk}(u)u_x^k) \equiv 0$. В частности, векторное поле скорости $\nu = \{u_x^i\}$ петли $\gamma = \{u^i(x)\}$ всегда лежит в нулевом пространстве 2-формы (33).

Действительно,

$$T_{ijk} u_x^k u_x^j = -T_{ikj} u_x^k u_x^j = -T_{ijk} u_x^j u_x^k,$$

т.е. $T_{ijk} u_x^k u_x^j \equiv 0$ и, следовательно, $\{u_x^j\} \in \text{Ker}(T_{ijk} u_x^k)$.

В теории интегрируемых систем важную роль играют обратимые симплектические операторы, так как соответствующие обратные операторы порождают пуассоновы структуры (не обязательно определенные при этом на всем пространстве петель ΩM). В частности, если замкнутая 2-форма $\Omega_{ij}(u)$ – невырожденная (т.е. является симплектической формой на многообразии M), то для любой замкнутой 3-формы $T_{ijk}(u)$ на многообразии M всегда $\det(T_{ijk}(u)u_x^k + \Omega_{ij}(u)) \neq 0$ и, следовательно, формально существует обратный оператор, определенный, вообще говоря, не на всем пространстве петель ΩM .

Пусть теперь $\Omega_{ij}(u)$ – произвольная 2-форма на многообразии M . Тогда формула (22) определяет многозначный симплектический оператор нулевого порядка на ΩM :

$$(34) \quad \omega_{ij}(x, u, u_x) = [(x + 2m\pi)(d\Omega)_{ijk}(u(x)) + S_{ijk}(u(x))]u_x^k + \Omega_{ij}(u(x)), \quad m \in \mathbb{Z},$$

где $S_{ijk}(u)$ – произвольная замкнутая 3-форма на многообразии M .

Если $\Omega_{ij}(u)$ – невырожденная 2-форма ($\det \Omega_{ij}(u) \neq 0$), т.е. многообразие (M, Ω_{ij}) – почти симплектическое, то многозначная симплектическая структура (34) формально обратима ($\det \omega_{ij}(x, u, u_x) \neq 0$) для любой замкнутой 3-формы $S_{ijk}(u)$ (в частности, для нулевой) на многообразии M . Можно построить и однозначные формально обратимые симплектические структуры на пространстве петель почти симплектического многообразия. Произвольная гладкая (возможно, многозначная) функция на окружности $f(x)$, $x \in S^1$, не являющаяся постоянной ни на одном из интервалов на

этой окружности, и любая замкнутая 3-форма $S_{ijk}(u)$ на почти симплектическом многообразии (M, Ω_{ij}) порождают формально обратимую симплектическую структуру на пространстве петель ΩM :

$$(35) \quad \omega_{ij}(x, u, u_x) = [f(x)(d\Omega)_{ijk}(u(x)) + S_{ijk}(u)]u_x^k + f'(x)\Omega_{ij}(u(x)).$$

В частности,

$$\omega_{ij}(x, u, u_x) = \sin x (d\Omega)_{ijk}(u(x))u_x^k + \cos x \Omega_{ij}(u(x))$$

– пример формально обратимой симплектической структуры на пространстве петель произвольного почти симплектического многообразия (M, Ω_{ij}) . Формально обратимые симплектические структуры, построенные нами на пространствах петель почти симплектических многообразий, не являются трансляционно-инвариантными.

2. Пуассоновы структуры. Для произвольного функционала I на пространстве петель ΩM вариационная производная этого функционала определяется, как и в классическом вариационном исчислении, равенством

$$(36) \quad \delta I \equiv I[u + \delta u] - I[u] = \int_{S^1} \frac{\delta I}{\delta u^k} \delta u^k dx + o(\delta u).$$

В частности, для *локальных функционалов*, т.е. функционалов вида

$$(37) \quad I = \int_{S^1} L(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(n)}) dx,$$

вариационная производная имеет вид

$$(38) \quad \frac{\delta I}{\delta u^k} = E(L) \equiv \frac{\partial L}{\partial u^k} - \frac{d}{dx} \frac{\partial L}{\partial u_x^k} + \frac{d^2}{dx^2} \frac{\partial L}{\partial u_{xx}^k} - \dots + (-1)^r \frac{d^r}{dx^r} \frac{\partial L}{\partial u_{(r)}^k} + \dots$$

Линейный оператор E называется *оператором Эйлера*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Линейный оператор $K = (K^{ij})$, зависящий от петли $\gamma \in \Omega M$:

$$(39) \quad K[\gamma]: T_\gamma^* \Omega M \rightarrow T_\gamma \Omega M,$$

называется *гамильтоновым оператором* или *гамильтоновой (пуассоновой) структурой* на пространстве петель ΩM , если он определяет на ΩM скобку Пуассона

$$(40) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = K^{ij}[u(x)]\delta(x - y),$$

т.е. для произвольных функционалов F, G и H на пространстве петель ΩM

$$(41) \quad \{F, G\} = \int_{S^1} \frac{\delta F}{\delta u^i} K^{ij}[u(x)] \frac{\delta G}{\delta u^j} dx,$$

причем скобка (41) кососимметрична:

$$(42) \quad \{F, G\} = -\{G, F\},$$

и удовлетворяет тождеству Якоби

$$(43) \quad \{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0.$$

Для скобки (41) автоматически выполняется тождество Лейбница:

$$(44) \quad \{f(u(x))g(u(y)), h(u(z))\} = f(u(x))\{g(u(y)), h(u(z))\} + g(u(y))\{f(u(x)), h(u(z))\}$$

или

$$(45) \quad \{FG, H\} = F\{G, H\} + G\{F, H\}.$$

Мы часто будем пользоваться теоретико-полевым представлением (40) для скобки Пуассона (41), заданной на точечных функционалах $F[u] = u^i(x)$, $G[u] = u^j(y)$. Если определять скобку Пуассона только на точечных функционалах формулой (40), то необходимо требовать выполнения на произвольных точечных функционалах кососимметричности, тождества Якоби и тождества Лейбница. Для гамильтоновости произвольного кососимметрического оператора достаточно требовать выполнения тождества Якоби на всех линейных функционалах вида

$$(46) \quad I = \int f_i(x) u^i(x) dx,$$

где $f_i(x)$ – произвольные функции (см. [85]–[87]). В [86] автором было показано, что это условие эквивалентно хорошо известному критерию гамильтоновости кососимметрического оператора – равенству нулю его скобки Схоутена (см. [61]).

При локальной замене координат $u^i = u^i(\tilde{u})$ на многообразии M гамильтонов оператор $K^{ij}[u(x)]$ преобразуется следующим образом:

$$\tilde{K}^{sk}[\tilde{u}] = \frac{\partial \tilde{u}^s}{\partial u^i} K^{ij}[u(\tilde{u})] \frac{\partial \tilde{u}^k}{\partial u^j}.$$

Это элементарное следствие закона преобразования вариационных производных и требования инвариантности скобки Пуассона:

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \int_{S^1} \frac{\delta F}{\delta u^i} K^{ij}[u] \frac{\delta G}{\delta u^j} dx = \int_{S^1} \frac{\delta F}{\delta \tilde{u}^s} \tilde{K}^{sk} \frac{\delta G}{\delta \tilde{u}^k} dx, \\ \frac{\delta F}{\delta \tilde{u}^s} &= \frac{\delta F}{\delta u^i} \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s}, \quad \frac{\delta G}{\delta \tilde{u}^s} = \frac{\delta G}{\delta u^i} \frac{\partial u^i}{\partial \tilde{u}^s}. \end{aligned}$$

В дальнейшем мы всегда будем рассматривать гамильтоновы операторы как соответствующие дифференциально-геометрические объекты относительно локальных замен координат на многообразии M .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пуассонова структура называется *локальной*, если задающий ее гамильтонов оператор является дифференциальным оператором с коэффициентами, зависящими от переменной x , полевых переменных $u^i(x)$ и конечного числа их производных $u_{(k)}^i(x)$, и *ультралокальной*, если гамильтонов оператор имеет вид $K^{ij} = \omega^{ij}(u(x))$. *Порядком локальной пуассоновой структуры* называется порядок соответствующего дифференциального оператора.

Свойство локальности и порядок локальной пуассоновой структуры инвариантны относительно локальных замен координат на многообразии. Ультралокальные пуассоновы структуры на пространстве петель ΩM – это, в точности, классические пуассоновы структуры на конечномерном многообразии M .

В конечномерном случае, если $\det(\omega_{ij}) \neq 0$ всюду на многообразии M , то $\omega_{ij}(u)$ – симплектическая структура на M тогда и только тогда, когда обратная матрица $\omega^{ij}(u)$, $\omega^{is}(u)\omega_{sj}(u) = \delta_j^i$, задает на многообразии M пуассонову структуру $\omega^{ij}(u)$:

$$(47) \quad \{u^i, u^j\} = \omega^{ij}(u).$$

Напомним, что тензор $\omega^{ij}(u)$ на многообразии M задает *пуассонову структуру* (или *бивектор Пуассона*), если на пространстве гладких функций на многообразии определена следующая билинейная операция (*скобка Пуассона*):

$$(48) \quad \{f(u), g(u)\} = \omega^{ij}(u) \frac{\partial f}{\partial u^i} \frac{\partial g}{\partial u^j},$$

которая кососимметрична

$$(49) \quad \{f, g\} = -\{g, f\}$$

и удовлетворяет тождеству Якоби

$$(50) \quad \{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$$

для произвольных гладких функций $f(u), g(u), h(u)$ на многообразии.

На многообразии M бивектор Пуассона $\omega^{ij}(u)$ определяется соотношениями

$$(51) \quad \omega^{ij} = -\omega^{ji} \quad (\text{кососимметричность}),$$

$$(52) \quad \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s} \omega^{sk} + \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} \omega^{si} + \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial u^s} \omega^{sj} = 0 \quad (\text{тождество Якоби}).$$

В бесконечномерном случае, если оператор M_{ij} – обратим, то точно так же, как и в конечномерном случае, справедливо общее утверждение: M_{ij} – симплектический оператор тогда и только тогда, когда оператор K^{ij} , обратный к оператору M_{ij} , т.е. $K^{ij}M_{jk} = \delta_k^i$, является гамильтоновым и определяет скобку Пуассона (пуассонову структуру) вида (41).

Пусть оператор M_{ij} – обратимый, $K^{ij}M_{jk} = \delta_k^i$. Рассмотрим векторные поля ξ, η и ζ вида $\xi^i = K^{is}f_s(x)$, $\eta^j = K^{js}g_s(x)$, $\zeta^r = K^{rs}h_s(x)$, где $f_s(x), g_s(x)$ и $h_s(x)$ – произвольные функции. Тогда условие, что на векторных полях такого типа $(d\omega)(\xi, \eta, \zeta) = 0$,

для кососимметрической билинейной формы (9) эквивалентно тождеству Якоби на произвольных линейных функционалах

$$I_f = \int f_i(x) u^i(x) dx, \quad I_g = \int g_i(x) u^i(x) dx \quad \text{и} \quad I_h = \int h_i(x) u^i(x) dx$$

для скобки

$$\{F, G\}_K = \int_{S^1} \frac{\delta F}{\delta u^i} K^{ij} \frac{\delta G}{\delta u^j} dx,$$

задаваемой кососимметрическим оператором K^{ij} :

$$\begin{aligned} (d\omega)(\xi, \eta, \zeta) &= \sum_{(\xi, \eta, \zeta)} \left\{ \int_{S^1} \xi^i \frac{\delta \omega(\eta, \zeta)}{\delta u^i} dx - \omega([\xi, \eta], \zeta) \right\} \\ &= \sum_{(f, g, h)} \left\{ \int_{S^1} (K^{is} f_s) \frac{\delta \int_{S^1} (K^{jl} g_l) M_{jr} (K^{rp} h_p) dx}{\delta u^i} dx \right. \\ &\quad \left. - \sum_{(\xi, \eta, \zeta)} \omega(\eta'_u \xi - \xi'_u \eta, \zeta) \right\} \\ &= \sum_{(f, g, h)} \left\{ \int_{S^1} (K^{is} f_s) \frac{\delta \int_{S^1} (K^{jl} g_l) h_j dx}{\delta u^i} dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_{S^1} (K^{jl} [u^i + \varepsilon (K^{is} f_s)] g_l) M_{jr} (K^{rp} h_p) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{S^1} (K^{is} [u^j + \varepsilon (K^{jl} g_l)] f_s) M_{ir} (K^{rp} h_p) dx \right] \right|_{\varepsilon=0} \Big\} \\ &= \sum_{(f, g, h)} \left\{ \int_{S^1} (K^{is} f_s) \frac{\delta \{I_h, I_g\}_K}{\delta u^i} dx \right. \\ &\quad \left. - \frac{d}{d\varepsilon} \left[\int_{S^1} h_j (K^{jl} [u^i + \varepsilon (K^{is} f_s)] g_l) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{S^1} h_i (K^{is} [u^j + \varepsilon (K^{jl} g_l)] f_s) dx \right] \right|_{\varepsilon=0} \Big\} \\ &= \sum_{(f, g, h)} \left\{ \{ \{I_h, I_g\}_K, I_f \}_K \right. \\ &\quad \left. - \left[\int_{S^1} \frac{\delta \int_{S^1} h_j (K^{jl} g_l) dx}{\delta u^i} (K^{is} f_s) dx \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_{S^1} \frac{\delta \int_{S^1} h_j (K^{js} f_s) dx}{\delta u^i} (K^{il} g_l) dx \right] \right\} \\ &= \sum_{(f, g, h)} \{ \{I_h, I_f\}_K, I_g \}_K. \end{aligned}$$

Таким образом, предложение 1.2 при дополнительном условии невырожденности оператора $\omega_{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)})$: $\det(\omega_{ij}) \neq 0$, – дает также полное описание всех

невырожденных локальных матричных гамильтоновых операторов нулевого порядка, т.е. вида

$$(53) \quad K^{ij} = \omega^{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)}), \quad \det(\omega^{ij}) \neq 0.$$

Кроме того, из предложений 1.1 и 1.2 немедленно получаем важные следствия.

СЛЕДСТВИЕ 1.2 [108], [99]. *Любая замкнутая 3-форма $T_{ijk}(u) du^i \wedge du^j \wedge du^k$ на симплектическом многообразии (M, Ω_{ij}) задает пуассонову структуру вида*

$$(54) \quad \{F, G\} = \int_{S^1} \frac{\delta F}{\delta u^i(x)} \omega^{ij}(u, u_x) \frac{\delta G}{\delta u^j(x)} dx, \quad \omega^{si}(u, u_x)(T_{ijk}(u)u_x^k + \Omega_{ij}(u)) = \delta_j^s,$$

F и G – произвольные функционалы на ΩM .

СЛЕДСТВИЕ 1.3 [99]. *Пусть $T_{ijk}(u) = \text{const}$ и $\Omega_{ij} = \text{const}$ – произвольные кососимметричные по всем парам индексов тензоры, постоянные в данной локальной системе координат $u^1, \dots, u^N$ на многообразии M . Тогда в формуле (54) $\omega^{si} = \omega^{si}(u_x)$, и после преобразования $v^i = u_x^i$, $i = 1, \dots, N$, скобка Пуассона (54) приобретает вид*

$$(55) \quad \{v^i(x), v^j(y)\} = -\frac{d}{dx} \omega^{ij}(v(x)) \frac{d}{dx} \delta(x-y), \quad \omega^{si}(v(x))(T_{ijk}v^k(x) + \Omega_{ij}) = \delta_j^s,$$

т.е. становится локальной однородной скобкой Пуассона второго порядка.

Как доказано в [131], [26], к виду (55) локальной заменой координат на многообразии приводится произвольная однородная пуассонова структура второго порядка (см. § 2.5 гл. 2). Таким образом, следствие 1.3 показывает, что все локальные однородные пуассоновы структуры второго порядка порождены специальными локальными симплектическими структурами нулевого порядка. Этот любопытный факт остался незамеченным в работах [131], [132], [26] по классификации однородных пуассоновых структур второго порядка.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3. Если $v^i(x) = u_x^i(x)$, то для произвольного функционала H справедливо соотношение

$$(56) \quad \frac{\delta H}{\delta u^i} = -\frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta v^i}.$$

СЛЕДСТВИЕ 1.4. *Любая замкнутая 3-форма $S_{ijk}(u) du^i \wedge du^j \wedge du^k$ (в частности, нулевая) на почти симплектическом многообразии (M, Ω_{ij}) задает нетривиальные пуассоновы структуры, определяемые обратимыми симплектическими структурами (34) и (35).*

Задача о классификации невырожденных гамильтоновых операторов вида (53) рассматривалась также в [145], [6]. В [6] для них получена локальная классификация относительно преобразований Ли, но их явное описание и общий вид не рассматривались (в [145] ошибочно утверждалось, что гамильтоновы операторы вида (53) не могут зависеть от производных полевых переменных $u^i(x)$). Более сложной и пока

нерешенной является задача дифференциально-геометрического описания вырожденных скобок Пуассона, задаваемых локальным матричным гамильтоновым оператором нулевого порядка, т.е. вида

$$(57) \quad K^{ij} = \omega^{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)}), \quad \det(\omega^{ij}) = 0.$$

Нетрудно показать, что локальный гамильтонов оператор вида (57) может зависеть, в отличие от симплектических операторов этого же вида, от производных любого порядка, но описание таких операторов, т.е. хотя бы структура возможной зависимости от производных полевых переменных $u^i(x)$, даже в простейшем случае, когда $N = 3$, и оператор имеет вид:

$$(\omega^{ij}(x, u, u_x, u_{xx}, \dots)) = \begin{pmatrix} 0 & \omega^1 & \omega^2 \\ -\omega^1 & 0 & \omega^3 \\ -\omega^2 & -\omega^3 & 0 \end{pmatrix},$$

пока не получено.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Система уравнений называется *гамильтоновой*, если она может быть представлена в виде

$$(58) \quad u_t^i = K^{ij}[u(x)] \frac{\delta H}{\delta u^j} \equiv \{u^i(x), H\},$$

где K^{ij} – гамильтонов оператор, $\{\cdot, \cdot\}$ – соответствующая скобка Пуассона, задаваемая оператором K^{ij} , H – некоторый функционал (*гамильтониан* системы). Соответственно, система уравнений называется *симплектической*, если она может быть представлена в виде

$$(59) \quad M_{ij} u_t^j = \frac{\delta H}{\delta u^i},$$

где M_{ij} – симплектический оператор, H – гамильтониан, или, что эквивалентно, в виде

$$(60) \quad \omega(\delta u, u_t) = \delta H,$$

где ω – соответствующая симплектическая структура на пространстве петель, и соотношение (60) выполняется для произвольных вариаций $\delta u^i(x)$ петли $\gamma = \{u^i(x)\}$ на многообразии M , H – функционал на пространстве петель ΩM .

3. Лагранжево описание локальных симплектических структур нулевого порядка. Вернемся к симплектическим структурам (21). Локально, в каждой координатной окрестности на многообразии, любые матричные локальные трансляционно-инвариантные симплектические структуры нулевого порядка могут быть представлены в следующем виде (применяя в формуле (21) классическую лемму Пуанкаре для замкнутых дифференциальных форм на многообразии):

$$(61) \quad \omega_{ij} = \left(\frac{\partial a_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j} \right) u_x^k + \frac{\partial b_j}{\partial u^i} - \frac{\partial b_i}{\partial u^j}.$$

Интересно, что все симплектические структуры вида (61) задают гамильтоновы (или симплектические) представления для уравнений движения нелинейных сигма-моделей с чисто кососимметрическими метриками.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.3 [108], [99]. *Лагранжевы системы $\delta S/\delta u^i = 0$, задаваемые действием вида*

$$(62) \quad S = \int (a_{ij}(u)u_x^i u_t^j + b_i(u)u_t^i + U(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)})) dx dt,$$

где $a_{ij}(u)$ – произвольный бивектор на многообразии, т.е. кососимметрический тензор $a_{ij} = -a_{ji}$, $b_i(u)$ – произвольный ковектор, $U(x, t, u, u_x, u_{xx}, \dots, u_{(k)})$ – произвольная функция, являются симплектическими (гамильтоновыми) по отношению к симплектическим структурам вида (61). Верно и обратное, любая гамильтонова система с симплектической структурой вида (61) и гамильтонианом $H = -\int U dx$ является лагранжевой системой, задаваемой действием вида (62).

Действительно, это утверждение следует из явного вида вариационной производной действия (62):

$$(63) \quad \frac{\delta S}{\delta u^i} = \omega_{ij} u_t^j - \frac{\delta H}{\delta u^i} = \left[\left(\frac{\partial a_{ji}}{\partial u^k} + \frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j} \right) u_x^k + \frac{\partial b_j}{\partial u^i} - \frac{\partial b_i}{\partial u^j} \right] u_t^j - \frac{\delta H}{\delta u^i},$$

где $H = -\int U dx$ – гамильтониан.

Таким образом, все симплектические структуры вида (21) локально имеют лагранжево происхождение. Общие локальные симплектические структуры нулевого порядка (22) также связаны с действиями типа (62), но явно зависящими от переменной x (отметим, что это верно только локально).

В следующем параграфе мы рассмотрим симплектические структуры, связанные с уравнениями движения общих двумерных нелинейных сигма-моделей и примеры их бигамильтоновых представлений дифференциально-геометрического типа.

4. Согласованные пуассоновы и симплектические структуры.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Два гамильтоновых оператора M и K называются *согласованными*, если любая их линейная комбинация $\lambda M + \mu K$, где λ и μ – произвольные константы, также является гамильтоновым оператором. Соответственно, две пуассоновы структуры (скобки Пуассона) согласованы, если они заданы согласованными гамильтоновыми операторами. Обратимые симплектические операторы и соответствующие симплектические структуры называются *согласованными*, если согласованы порождаемые ими гамильтоновы операторы.

Согласованные пуассоновы структуры впервые были рассмотрены Ф. Магри [78], выяснившим их важную роль в теории интегрируемых систем.

Для любого кососимметрического тензора ω^{ij} на многообразии M левая часть соотношения (52) является трехвалентным тензором с верхними индексами, который называется *скобкой Стоутена бивектора* ω^{ij} :

$$[\omega, \omega]^{ijk} = \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s} \omega^{sk} + \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} \omega^{si} + \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial u^s} \omega^{sj}.$$

Скобкой Схоутена двух кососимметрических бивекторов ω^{ij} и f^{ij} называется трехвалентный тензор

$$(64) \quad [\omega, f]^{ijk} = \sum_{(i,j,k)} \left(\frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s} f^{sk} + \frac{\partial f^{ij}}{\partial u^s} \omega^{sk} \right).$$

Равенство нулю скобки Схоутена (64) эквивалентно согласованности конечномерных пуассоновых структур ω^{ij} и f^{ij} . Обобщение скобки Схоутена на бесконечномерный случай произвольных кососимметрических дифференциальных операторов M^{ij} и K^{ij} и доказательство соответствующих критериев: кососимметрический дифференциальный оператор гамильтонов тогда и только тогда, когда его скобка Схоутена равна нулю, а пара гамильтоновых дифференциальных операторов согласована тогда и только тогда, когда скобка Схоутена этих операторов равна нулю, – см. в [61], [62], [20].

Система уравнений называется *бигамильтоновой*, если она может быть представлена в гамильтоновом виде (58) с помощью двух различных (линейно независимых), но согласованных, гамильтоновых операторов $K = (K^{ij})$ и $L = (L^{ij})$:

$$(65) \quad u_t^i = K^{ij}[u(x)] \frac{\delta H_1}{\delta u^j} = L^{ij}[u(x)] \frac{\delta H_2}{\delta u^j},$$

где H_1 и H_2 – соответствующие гамильтонианы.

Приведем здесь кратко схему Магри, связанную с бигамильтоновыми системами (см. также [78]–[80], [60], [62], [20], [54], [127]).

Если хотя бы один из гамильтоновых операторов K и L обратим (мы для определенности будем считать, что оператор L обратим), то оператор $R = (R_s^i) = (K^{ij}(L^{-1})_{js})$ является оператором рекурсии для системы (65), т.е. переводит симметрии системы в симметрии, и, более того, этот оператор рекурсии R порождает иерархию коммутирующих гамильтоновых систем ($t = t_0$)

$$(66) \quad u_{t_n}^i = (R^n L)^{ij} \frac{\delta H_2}{\delta u^j},$$

где оператор $R^n L$ является гамильтоновым оператором при любом n . Кроме того, имеет место следующая рекуррентная формула для законов сохранения (интегралов) H_m системы (65):

$$(67) \quad L^{ij}[u(x)] \frac{\delta H_m}{\delta u^j} = K^{ij}[u(x)] \frac{\delta H_{m-1}}{\delta u^j}.$$

При этом при любом m функционал H_m является законом сохранения (интегралом) для любой системы из иерархии (66), все эти интегралы H_m находятся в инволюции относительно пуассоновых структур, порождаемых гамильтоновыми операторами L и K :

$$\int \frac{\delta H_m}{\delta u^i} L^{ij} \frac{\delta H_r}{\delta u^j} dx = \int \frac{\delta H_m}{\delta u^i} K^{ij} \frac{\delta H_r}{\delta u^j} dx = 0.$$

Любая система из иерархии (66) является бигамильтоновой и представляется в следующем виде:

$$(68) \quad u_{t_n}^i = L^{ij} \frac{\delta H_{n+2}}{\delta u^j} = K^{ij} \frac{\delta H_{n+1}}{\delta u^j}.$$

Фактически любая бигамильтонова система является n -гамильтоновой для любого n , так как все уравнения иерархии (66) являются гамильтоновыми относительно гамильтонова оператора $(R^n L)$, и все эти гамильтоновы операторы согласованы между собой – любая линейная комбинация операторов $(R^n L)$ при различных n является всегда гамильтоновым оператором. Вообще говоря, интегралы H_m могут быть линейно зависимыми, но обычно оператор рекурсии изменяет порядок системы, и при этом изменяется порядок старшей производной плотности гамильтониана (после максимального его понижения с помощью добавления к плотности гамильтониана полных производных по переменной x), что обычно позволяет в конкретных примерах устанавливать их независимость. Рекуррентную процедуру (67) обычно называют также схемой Ленарда–Магри, так как в случае уравнения Кортевега–де Вриза рекуррентное соотношение типа (66) для интегралов Крускала было впервые найдено, по-видимому, А. Ленардом, но без всякой связи с гамильтоновыми операторами (см. [57], [77]). Все утверждения схемы Магри доказываются в рамках формального вариационного исчисления в предположении, что на каждом шаге рекуррентное соотношение $L\xi_m = K\xi_{m-1}$, где $(\xi_1)_j = \delta H_1/\delta u^j$, $(\xi_2)_j = \delta H_2/\delta u^j$, разрешается относительно ξ_m .

§ 1.2. Однородные симплектические структуры первого порядка на пространствах петель псевдоримановых многообразий и двумерные нелинейные сигма-модели с кручением

Рассмотрим симплектические операторы, порождаемые произвольными невырожденными однородными обыкновенными дифференциальными операторами первого порядка, т.е. вида

$$(1) \quad M_{ij} = g_{ij}(u) \frac{d}{dx} + b_{ijk}(u) u_x^k, \quad \det(g_{ij}(u)) \neq 0.$$

Введем коэффициенты $\Gamma_{jk}^i(u)$ по формуле

$$(2) \quad b_{ijk}(u) = g_{is}(u) \Gamma_{jk}^s(u).$$

При локальных заменах координат $u^i = u^i(\tilde{u})$ на многообразии M коэффициент $g_{ij}(u)$ ведет себя как метрика на M , а коэффициент $\Gamma_{jk}^s(u)$ – как символы Кристоффеля аффинной связности на M (см. формулы (1.1.10) и (1.1.11) предыдущего параграфа для преобразования симплектических операторов):

$$(3) \quad \tilde{g}_{ij}(\tilde{u}) = \frac{\partial u^k}{\partial \tilde{u}^i} g_{ks}(u(\tilde{u})) \frac{\partial u^s}{\partial \tilde{u}^j},$$

$$(4) \quad \tilde{\Gamma}_{jk}^i(\tilde{u}) = \Gamma_{sr}^p(u(\tilde{u})) \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^p} \frac{\partial u^s}{\partial \tilde{u}^j} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^k} + \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^p} \frac{\partial^2 u^p}{\partial \tilde{u}^j \partial \tilde{u}^k}.$$

ЛЕММА 1.2 [93]. *Симплектические структуры на пространстве петель ΩM , задаваемые невырожденными однородными симплектическими операторами первого порядка (1), имеют вид*

$$(5) \quad \omega(\xi, \eta) = \int_{\gamma} \langle \xi, \nabla_{\dot{\gamma}} \eta \rangle,$$

где $\xi = \xi(u(x))$, $\eta = \eta(u(x))$ – гладкие векторные поля вдоль петли γ , $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij} \xi^i \eta^j$ – скалярное произведение на $T_{\gamma(x)}M$, определяемое псевдоримановой метрикой $g_{ij}(u)$, а $\nabla_{\dot{\gamma}}$ – ковариантное дифференцирование вдоль петли γ на M , порождаемое аффинной связностью $\Gamma_{jk}^i(u)$ и удовлетворяющее некоторым дополнительным условиям. Все такие формы (5) инвариантны относительно группы $\text{Diff}^+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию, т.е. не зависят от параметризации петли γ .

ТЕОРЕМА 1.1 [93]. Пусть (M, g_{ij}) – произвольное риманово или псевдориманово многообразие. Связность $\Gamma_{jk}^i(u)$ на M определяет на ΩM симплектическую структуру (5) тогда и только тогда, когда

1) связность $\Gamma_{jk}^i(u)$ согласована с метрикой $g_{ij}(u)$, т.е.

$$(6) \quad \nabla_k g_{ij} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - g_{is} \Gamma_{jk}^s - g_{js} \Gamma_{ik}^s = 0;$$

2) кручение связности

$$(7) \quad T_{ijk} = g_{is} T_{jk}^s, \quad T_{jk}^i = \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i,$$

является замкнутой 3-формой на многообразии M .

СЛЕДСТВИЕ 1.5 [93]. Для произвольного псевдориманова многообразия (M, g_{ij}) однородные замкнутые 2-формы первого порядка (5) на пространстве петель ΩM находятся во взаимнооднозначном соответствии с замкнутыми 3-формами на многообразии M .

Произвольная 3-форма $T_{ijk} du^i \wedge du^j \wedge du^k$ на любом псевдоримановом многообразии M всегда порождает единственную связность $\Gamma_{jk}^i(u)$, согласованную с псевдоримановой метрикой $g_{ij}(u)$ и имеющую тензор кручения $T_{ijk}(u)$, определяемый этой замкнутой 3-формой:

$$(8) \quad b_{sjk}(u) = g_{si} \Gamma_{jk}^i(u) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{sk}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{js}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial u^s} + T_{sjk}(u) \right).$$

Таким образом, на пространстве петель всякого риманового или псевдориманового многообразия (M, g_{ij}) однородных симплектических структур первого порядка (5) ровно столько, сколько различных замкнутых 3-форм на многообразии M . Этот факт позволил автору предположить, что таким способом можно найти когомологии комплекса однородных форм на пространстве петель гладкого многообразия через когомологии де Рама самого многообразия. Эта идея осуществлена автором в статье [98].

СЛЕДСТВИЕ 1.6 [93]. Для произвольного псевдориманова многообразия (M, g_{ij}) определена симплектическая структура вида (5) на ΩM , порождаемая связностью Леви-Чивита (симметричной и согласованной с метрикой g_{ij}).

Тривиальным следствием теоремы 1.1 является то, что на всяком двумерном псевдоримановом многообразии (M, g_{ij}) существует единственная симплектическая структура вида (5) на ΩM (она порождается связностью Леви-Чивита).

Очевидно также, что симплектические (предсимплектические) формы (5) всегда вырождены на ΩM : нулевое пространство 2-формы (5) состоит из параллельных векторных полей вдоль петли γ . В частности, векторное поле скорости $\nu = \{u_x^i\}$ петли $\gamma = \{u^i(x)\}$ принадлежит нулевому пространству 2-формы (5) тогда и только тогда, когда γ является замкнутой геодезической на многообразии M .

Теорема 1.1 дает полное описание локальных невырожденных однородных симплектических операторов первого порядка (1).

Локально, используя лемму Пуанкаре о точности замкнутых форм в координатной окрестности на многообразии, получаем, что все симплектические операторы (1) для произвольной симметричной матричной функции $g_{ij}(u)$ определяются по формулам (1) и (8) произвольной кососимметрической матричной функцией $f_{ij}(u)$:

$$(9) \quad f_{ij}(u) = -f_{ji}(u),$$

$$(10) \quad T_{ijk}(u) = \frac{\partial f_{ij}}{\partial u^k} + \frac{\partial f_{jk}}{\partial u^i} + \frac{\partial f_{ki}}{\partial u^j}.$$

Рассмотрим вопрос о связи наших симплектических структур (5) на ΩM с конечномерными симплектическими структурами, т.е. о редукциях формы (5) на конечномерные многообразия.

ПРИМЕР 1.1 [93]. Для N -мерных римановых многообразий (M, g_{ij}) , геодезические которых периодичны и имеют одинаковую длину, геодезический поток порождает свободное действие группы $S^1 \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ на расслоении UM единичных касательных векторов, и, следовательно, факторпространство UM/S^1 является $(2N - 2)$ -мерным многообразием – многообразием геодезических CM . Симплектическая структура на CM (симплектическая форма Роба [133], [134]) задается формой кривизны S^1 -связности в главном расслоении над CM единичных касательных векторов UM многообразия (M, g_{ij}) (см. [133], [134], [146], [9]). Касательное пространство $T_\gamma CM$ многообразия геодезических CM в точке γ изоморфно пространству нормальных якобиевых полей вдоль геодезической γ на многообразии M . В работе автора [93] были рассмотрены симплектические структуры (5) на пространстве петель ΩM такого риманова многообразия M и изучены ограничения этих симплектических структур на конечномерное многообразие CM замкнутых геодезических на нем. В частности, в [93] доказано, что ограничение симплектической структуры (5), определяемой на пространстве петель ΩM многообразия M связностью Леви-Чивита, на конечномерное подпространство нормальных якобиевых полей вдоль геодезической γ совпадает с формой Роба – замкнутой невырожденной 2-формой, задающей на CM конечномерную симплектическую структуру. Примерами таких римановых многообразий, все геодезические на которых периодичны и имеют одинаковую длину, являются евклидовы сферы, проективные пространства $\mathbb{CP}^n$ ($\mathbb{K}$ – поле вещественных чисел $\mathbb{R}$, комплексных чисел $\mathbb{C}$ или тело кватернионов $\mathbb{H}$), плоскость Кэли CaP^2 (все эти многообразия рассматриваются с канонической римановой метрикой и являются компактными симметрическими пространствами ранга один), а также многообразия Пулля (см. [9]).

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4. Полного явного описания или классификации всех локальных симплектических и пуассоновых структур первого порядка пока не найдено. Хорошо

изучен лишь случай скалярных (однокомпонентных) операторов, т.е. случай $N = 1$. Локальные скалярные симплектические операторы первого порядка имеют вид [22]:

$$(11) \quad I = 2p \frac{d}{dx} + p_x,$$

$$(12) \quad p = \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial G}{\partial u_{xx}} \right) - \frac{\partial G}{\partial u_x},$$

где $G = G(x, u, u_x, u_{xx})$ – произвольная функция. Полностью описаны также локальные однокомпонентные гамильтоновы операторы до пятого порядка включительно. В частности, локальные однокомпонентные гамильтоновы операторы первого порядка имеют вид ([145], см. также [87]):

$$(13) \quad L = \pm \frac{1}{\frac{\delta A}{\delta u}} \frac{d}{dx} \circ \frac{1}{\frac{\delta A}{\delta u}},$$

где $A = \int a(x, u, u_x) dx$, $a = a(x, u, u_x)$ – произвольная функция. Контактным преобразованием все гамильтоновы операторы первого порядка (13) приводятся к каноническому виду $\pm \frac{d}{dx}$ ([5], см. также [6]). Отметим, что однокомпонентный случай $N = 1$ является существенно особым – в этом случае основную роль эффективно играет контактная геометрия. Задачи, связанные с контактной теорией однокомпонентных пуассоновых структур и гамильтоновых уравнений, остались за рамками данной статьи и будут рассмотрены в отдельном обзоре (см. [5], [6], [15], [16], [85]–[87], [90], [91], [95], [104], [106]).

Рассмотрим теперь уравнения движения общих двумерных нелинейных сигма-моделей с кручением, задаваемых действиями вида

$$(14) \quad S = \int \left(\frac{1}{2} (g_{ij}(u) + f_{ij}(u)) u_x^i u_t^j + U(u) \right) dx dt, \quad g_{ij} = g_{ji}, \quad f_{ij} = -f_{ji},$$

где $g_{ij}(u)$ – псевдориманова метрика на многообразии M , а $U(u)$ – произвольная функция на M .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.4 [93]. *Для действия S вида (14) соответствующая лагранжева система $\delta S / \delta u = 0$ всегда имеет симплектическое представление*

$$(15) \quad M_{ij} u_t^j = \frac{\delta U}{\delta u},$$

где

$$(16) \quad M_{ij} = g_{ij} \frac{d}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial g_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i} \right) + \left(\frac{\partial f_{ki}}{\partial u^j} + \frac{\partial f_{ij}}{\partial u^k} - \frac{\partial f_{kj}}{\partial u^i} \right) \right] u_x^k$$

– однородный симплектический оператор первого порядка, определяемый формулами (1), (8)–(10).

Таким образом, локально, однородные симплектические операторы первого порядка (1) задают, в точности, симплектические структуры двумерных нелинейных сигма-моделей с кручением (14). Автором был поставлен вопрос об описании и изучении пуассоновых структур, согласованных с (16), что позволило бы строить интегрируемые бигамильтоновы двумерные нелинейные сигма-модели (см. [97], [107]). Для некоторых известных интегрируемых сигма-моделей пуассоновы структуры, согласованные с (16), были впоследствии найдены А. Г. Мешковым [83]. Рассмотрим некоторые простые примеры таких бигамильтоновых нелинейных сигма-моделей.

ПРИМЕР 1.2 [83].

$$(17) \quad S = \int \left(\frac{1}{2} \frac{u_x^1 u_t^2 + u_x^2 u_t^1}{u^1 u^2 + c} + k u^1 u^2 \right) dx dt,$$

где c и k – произвольные константы. В этом случае

$$(18) \quad (g_{ij}) = \frac{1}{u^1 u^2 + c} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(u) = k u^1 u^2.$$

Соответственно, первый симплектический оператор (16) для действия (17) имеет вид

$$(19) \quad A = (A_{ij}) = \frac{1}{u^1 u^2 + c} \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{(u^1 u^2 + c)^2} \begin{pmatrix} 0 & u^1 u_x^2 \\ u^2 u_x^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Второй гамильтонов оператор B для действия (17), согласованный с (19) (с A^{-1}), нелокален и имеет вид:

$$(20) \quad B = (B^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -(u^1 u^2 + c) \\ (u^1 u^2 + c) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x^1 D^{-1} \circ u^1 & -u_x^1 D^{-1} \circ u^2 \\ u_x^2 D^{-1} \circ u^1 & -u_x^2 D^{-1} \circ u^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^1 D^{-1} \circ u_x^1 & u^1 D^{-1} \circ u_x^2 \\ -u^2 D^{-1} \circ u_x^1 & -u^2 D^{-1} \circ u_x^2 \end{pmatrix}.$$

Оператор рекурсии $R_j^i = B^{is} A_{sj}$, отвечающий построенному бигамильтонову представлению интегрируемой нелинейной сигма-модели (17), имеет вид

$$(21) \quad R = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + \frac{1}{u^1 u^2 + c} \begin{pmatrix} u^1 u_x^2 & 2u^1 u_x^1 \\ -2u^2 u_x^2 & -u^2 u_x^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x^1 D^{-1} \circ \frac{c u_x^2}{(u^1 u^2 + c)^2} & u_x^1 D^{-1} \circ \frac{-c u_x^1}{(u^1 u^2 + c)^2} \\ u_x^2 D^{-1} \circ \frac{c u_x^2}{(u^1 u^2 + c)^2} & u_x^2 D^{-1} \circ \frac{-c u_x^1}{(u^1 u^2 + c)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u^1 D^{-1} \circ \left(\frac{u^1 (u_x^2)^2}{(u^1 u^2 + c)^2} - \frac{u_x^2}{u^1 u^2 + c} \right) & u^1 D^{-1} \circ \left(\frac{u^2 (u_x^1)^2}{(u^1 u^2 + c)^2} - \frac{u_x^1}{u^1 u^2 + c} \right) \\ -u^2 D^{-1} \circ \left(\frac{u^1 (u_x^2)^2}{(u^1 u^2 + c)^2} - \frac{u_x^2}{u^1 u^2 + c} \right) & -u^2 D^{-1} \circ \left(\frac{u^2 (u_x^1)^2}{(u^1 u^2 + c)^2} - \frac{u_x^1}{u^1 u^2 + c} \right) \end{pmatrix}.$$

ПРИМЕР 1.3 [83].

$$(22) \quad S = \int \left(\frac{1}{2} \frac{u_x^1 u_t^2 + u_x^2 u_t^1}{u^1 + u^2} + k(u^1 + u^2) \right) dx dt,$$

где k – произвольная константа. В этом случае

$$(23) \quad (g_{ij}) = \frac{1}{u^1 + u^2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U(u) = k(u^1 + u^2).$$

Первая гамильтонова структура, определяемая симплектическим оператором (16), имеет вид

$$(24) \quad A = (A_{ij}) = \frac{1}{u^1 + u^2} \begin{pmatrix} 0 & D \\ D & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{(u^1 + u^2)^2} \begin{pmatrix} 0 & u_x^2 \\ u_x^1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вторая гамильтонова структура для действия (22) определяется нелокальным гамильтоновым оператором B , согласованным с (24) (с A^{-1}):

$$(25) \quad B = (B^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -(u^1 + u^2) \\ (u^1 + u^2) & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x^1 D^{-1} & -u_x^1 D^{-1} \\ u_x^2 D^{-1} & -u_x^2 D^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D^{-1} \circ u_x^1 & D^{-1} \circ u_x^2 \\ -D^{-1} \circ u_x^1 & -D^{-1} \circ u_x^2 \end{pmatrix}.$$

Оператор рекурсии $R_j^i = B^{is} A_{sj}$ имеет вид

$$(26) \quad R = \begin{pmatrix} -D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} + \frac{1}{u^1 + u^2} \begin{pmatrix} u_x^2 & 2u_x^1 \\ -2u_x^2 & -u_x^1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -u_x^1 D^{-1} \circ \frac{u_x^2}{(u^1 + u^2)^2} & u_x^1 D^{-1} \circ \frac{u_x^1}{(u^1 + u^2)^2} \\ -u_x^2 D^{-1} \circ \frac{u_x^2}{(u^1 + u^2)^2} & u_x^2 D^{-1} \circ \frac{u_x^1}{(u^1 + u^2)^2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} D^{-1} \circ \left(\frac{(u_x^2)^2}{(u^1 + u^2)^2} - \frac{u_{xx}^2}{u^1 + u^2} \right) & D^{-1} \circ \left(\frac{(u_x^1)^2}{(u^1 + u^2)^2} - \frac{u_{xx}^1}{u^1 + u^2} \right) \\ D^{-1} \circ \left(-\frac{(u_x^2)^2}{(u^1 + u^2)^2} + \frac{u_{xx}^2}{u^1 + u^2} \right) & D^{-1} \circ \left(-\frac{(u_x^1)^2}{(u^1 + u^2)^2} + \frac{u_{xx}^1}{u^1 + u^2} \right) \end{pmatrix}.$$

В этих примерах вторые гамильтоновы структуры определяются нелокальными гамильтоновыми операторами одного и того же дифференциально-геометрического типа:

$$(27) \quad B = (B^{ij}) = g^{ij}(u) + a^i(u) \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ b_k^j(u) u_x^k + b_k^i(u) u_x^k \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ a^j(u),$$

$$\det(g^{ij}(u)) \neq 0, \quad g^{ij}(u) = -g^{ji}(u).$$

Этот класс нелокальных гамильтоновых структур дифференциально-геометрического типа, связанный с геометрией почти симплектических многообразий, заслуживает специального изучения (особенно важно выделить те из них, которые согласованы с симплектическими операторами вида (16)).

В однокомпонентном случае (при $N = 1$) локальный симплектический оператор

$$(28) \quad M = \frac{d}{dx}$$

согласован с нелокальными гамильтоновыми операторами вида

$$(29) \quad K_{\pm} = \frac{d}{dx} \pm u_x \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x,$$

причем согласованная пара (M, K_+) порождает по схеме Ленарда–Магри иерархию $u_t = (K_+ M)^n u_x$, где n – любое целое число, уравнения sine-Gordon

$$(30) \quad u_{xt} = \sin u.$$

В эту же иерархию входит пропотенциализованное модифицированное уравнение Кортевега–де Вриза

$$(31) \quad u_t = u_{xxx} + \frac{1}{2}u_x^3.$$

Согласованная пара (M, K_-) порождает иерархию $u_t = (K_- M)^n u_x$, где n – любое целое число, уравнения Лиувилля

$$(32) \quad u_{xt} = e^u,$$

и в этой же иерархии содержится уравнение типа Кортевега–де Вриза

$$(33) \quad u_t = u_{xxx} - \frac{1}{2}u_x^3.$$

В связи с этими примерами интересно было бы описать и изучить дифференциальную геометрию согласованных матричных аналогов дифференциально-геометрического типа для согласованных пар $(M, K_{\pm})$, т.е. согласованных пар (M_{ij}, K^{ij}) , где M_{ij} – локальный однородный симплектический оператор первого порядка (1), а K^{ij} – не-локальный однородный гамильтонов оператор вида

$$(34) \quad K^{ij} = g^{ij}(u) \frac{d}{dx} + b_k^{ij}(u) u_x^k + C u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j.$$

Эта задача пока не решена, хотя условия симплектичности и гамильтоновости для операторов (1) и (34), соответственно, полностью изучены. Гамильтоновы операторы вида (34), как оказалось, играют важную роль в теории систем гидродинамического типа, уравнений Уизема, обобщенных магнетиков Гейзенберга. Автором и Е.В. Феррапонтовым (см. [111]) доказано, что при условии $\det(g^{ij}(u)) \neq 0$ оператор (34) является гамильтоновым тогда и только тогда, когда он определяется псевдоримановой метрикой $g^{ij}(u)$ постоянной римановой кривизны C (коэффициенты $b_k^{ij}(u)$ являются коэффициентами связности Леви-Чивита, полностью определяемой этой метрикой).

§ 1.3. Симплектические и пуассоновы структуры вырожденных лагранжевых систем

Отметим, что лагранжиан действия (1.2.14) – вырожденный и для построения гамильтонова формализма требует, вообще говоря, использования процедуры Дирака для систем со связями ([18], см. также [123], [124]). В действительности, существуют явные формулы для симплектических операторов, отвечающих вырожденным лагранжианам (в том числе и зависящим от высших производных полей $u^i(x)$ по времени t). Действительно, рассмотрим двумерные лагранжевы системы, порождаемые действиями вида

$$(1) \quad S = \int (g_i(x, u, u_x, \dots) u_t^i + h(x, u, u_x, \dots)) dx dt,$$

где g_i, h – произвольные функции переменной x , полей $u^i(x, t)$ и их производных $u_{(n)}^i = \partial^n u^i / \partial x^n$ по переменной x . Соответствующая лагранжева система $\delta S / \delta u^i = 0$ имеет вид

$$(2) \quad M_{ij} u_t^j = \frac{\delta H}{\delta u^i},$$

где

$$(3) \quad M_{ij} = \frac{\partial g_i}{\partial u_{(n)}^j} \frac{d^n}{dx^n} - (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} \circ \frac{\partial g_j}{\partial u_{(n)}^i}, \quad H = \int h \, dx.$$

ЛЕММА 1.3. Дифференциальный оператор M_{ij} (3) является симплектическим оператором, и билинейная форма

$$(4) \quad \omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \xi^i M_{ij} \eta^j \, dx,$$

где $\xi, \eta \in T_\gamma \Omega M$, является симплектической (предсимплектической) формой на пространстве петель ΩM .

Следовательно, мы имеем симплектическое представление (2) для лагранжевых систем, порождаемых действиями вида (1). Докажем лемму 1.3. Рассмотрим для этого 1-форму $\alpha(\xi)$ на ΩM :

$$\alpha(\xi) = \int_{S^1} \xi^i(x) g_i(x, u, u_x, \dots) \, dx.$$

Тогда для ее дифференциала $(d\alpha)(\xi, \eta)$ получаем:

$$\begin{aligned} (d\alpha)(\xi, \eta) &= \int_{S^1} \xi^i(x) \frac{\delta \alpha(\eta)}{\delta u^i} \, dx - \int_{S^1} \eta^i(x) \frac{\delta \alpha(\xi)}{\delta u^i} \, dx \\ &= \int_{S^1} \xi^i (-1)^k \frac{d^k}{dx^k} \left(\frac{\partial g_j}{\partial u_{(k)}^i} \eta^j \right) \, dx - \int_{S^1} \xi^i \frac{\partial g_i}{\partial u_{(k)}^j} \frac{d^k}{dx^k} (\eta^j) \, dx \\ &= - \int_{S^1} \xi^i M_{ij} \eta^j \, dx. \end{aligned}$$

Точная 2-форма $(d\alpha)(\xi, \eta)$ на ΩM замкнута и порождает заведомо симплектический оператор M_{ij} . Отметим, что симплектический оператор (3) может быть получен также применением процедуры Дирака к вырожденному лагранжиану действия (1), но этот путь значительно более долгий и технически более сложный.

Некоторые специальные действия вида (1) порождают важные нелинейные уравнения математической физики и теории поля, такие как нелинейные сигма-модели, уравнения Монжа–Ампера, гамильтоновы системы гидродинамического типа, уравнения ассоциативности в двумерной топологической теории поля, уравнения Кортевега–де Вриза, Хопфа, Кричевера–Новикова и многие другие. Соответствующие симплектические представления полезны и эффективны при исследовании интегрируемости системы и для применения процедур усреднения и теории возмущений. Некоторые важные интегрируемые системы обладают двумя локальными и различными, но согласованными лагранжевыми представлениями (т.е. соответствующие им симплектические структуры согласованы) – такие системы мы будем называть *билагранжевыми*. Приведем здесь некоторые примеры.

ПРИМЕР 1.4. *Билагранжевость уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ).*

Рассмотрим следующее действие вида (1):

$$(5) \quad S_1 = \int \left(\frac{1}{2} u_x u_t - \frac{1}{2} u_{xx}^2 - u_x^3 \right) dx dt.$$

Симплектическое представление для лагранжева уравнения $\delta S_1 / \delta u = 0$ имеет вид:

$$(6) \quad M_1(u_t) = -\frac{\delta H_1}{\delta u}, \quad u_t = 3u_x^2 - u_{xxx};$$

$$(7) \quad M_1 = \frac{d}{dx}, \quad H_1 = \int \left(u_x^3 + \frac{1}{2} u_{xx}^2 \right) dx.$$

Это же уравнение (6) допускает другое лагранжево представление с действием S_2 вида (1):

$$(8) \quad S_2 = \int \left[\left(\frac{1}{2} u_{xxx} - u_x^2 \right) u_t + \frac{1}{2} u_{xxx}^2 + 5u_x u_{xx}^2 + \frac{5}{2} u_x^4 \right] dx dt.$$

Соответствующее симплектическое представление (2), (3) имеет вид:

$$(9) \quad M_2 = \frac{d^3}{dx^3} - 4u_x \frac{d}{dx} - 2u_{xx}, \quad H_2 = \int \left(\frac{1}{2} u_{xxx}^2 + \frac{5}{2} u_x^4 + 5u_x u_{xx}^2 \right) dx.$$

При этом построенные симплектические операторы M_1 и M_2 согласованы. Две локальные симплектические структуры для пропотенциализованного уравнения КдВ (6) были найдены в [22]. После преобразования $v(x) = u_x(x)$ мы получаем обычное гамильтоново представление Гарднера–Захарова–Фаддеева для КдВ:

$$(10) \quad v_t = \frac{d}{dx} \frac{\delta H_1}{\delta v}, \quad H_1 = \int \left(v^3 + \frac{1}{2} v_x^2 \right) dx,$$

$$(11) \quad v_t = 6vv_x - v_{xxx}.$$

Соответственно, для второй симплектической структуры имеем:

$$(12) \quad \left(\frac{d}{dx} - 2 \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ v - 2v \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \right) v_t = -\frac{\delta H_2}{\delta v},$$

$$H_2 = \int \left(\frac{1}{2} v_{xx}^2 + 5vv_x^2 + \frac{5}{2} v^4 \right) dx.$$

Операторы

$$(13) \quad K_n = R^n \frac{d}{dx},$$

где

$$(14) \quad R = \frac{d^2}{dx^2} - 4v - 2v_x \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1}$$

– оператор рекурсии для КдВ, при любом целом n задают согласованные гамильтоновы структуры уравнения КдВ. Лагранжевы представления (5) и (8) порождают известные первую и “минус первую” гамильтоновы структуры КдВ (10) и (12), отвечающие $n = 0, -1$. Гамильтонов оператор Магри (вторая гамильтонова структура КдВ)

$$(15) \quad \pm \left[\frac{d^3}{dx^3} - 4\lambda v \frac{d}{dx} - 2\lambda v_x \right], \quad \lambda = \text{const},$$

отвечает $n = 1$. При $n = 2$ получаем третью гамильтонову структуру КдВ – нелокальный гамильтонов оператор пятого порядка

$$(16) \quad M_5 = \frac{d^5}{dx^5} - 8v \frac{d^3}{dx^3} - 12v_x \frac{d^2}{dx^2} - 8v_{xx} \frac{d}{dx} + 16v^2 \frac{d}{dx} - 2v_{xxx} + 16vv_x - 4v_x \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} \circ v_x.$$

В статье [95] (см. также [101]) построено преобразование, переводящее гамильтонов оператор (16) в канонический постоянный гамильтонов оператор Гарднера–Захарова–Фаддеева $\frac{d}{dx}$. Это преобразование – высший аналог преобразования Миуры [82], переводящего, как хорошо известно (см. [54], [75]), гамильтонов оператор Магри (15) в канонический оператор Гарднера–Захарова–Фаддеева.

ПРИМЕР 1.5. *Билагранжевость уравнения Хопфа.*

Рассмотрим простейший пример – уравнение Хопфа:

$$(17) \quad u_t = u_x^3,$$

допускающее следующие согласованные лагранжевы представления с действиями S_1 и S_2 вида (1):

$$(18) \quad S_1 = \int \left(\frac{1}{2} u_x u_t - \frac{1}{4} u_x^4 \right) dx dt,$$

$$(19) \quad S_2 = \int \left(-\frac{u_t}{2u_x} - u_x^2 \right) dx dt.$$

Бисимплектическое представление уравнения Хопфа было продемонстрировано в [24].

ПРИМЕР 1.6. *Лагранжево представление уравнения Кричевера–Новикова (КН).*

Рассмотрим следующее действие вида (1):

$$(20) \quad S_1 = \int \left(\frac{1}{2} \frac{u_t}{u_x} - \frac{1}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x^2} - \frac{1}{3} \frac{R(u)}{u_x^2} \right) dx dt,$$

где $R(u) = a_3 u^3 + a_2 u^2 + a_1 u + a_0$ – произвольный полином третьей степени, $a_i = \text{const}$, $i = 0, 1, 2, 3$. Соответствующая лагранжева система $\delta S_1 / \delta u = 0$ допускает симплектическое представление (2), (3) с симплектическим оператором

$$(21) \quad M_1 = -\frac{1}{u_x} \frac{d}{dx} \circ \frac{1}{u_x},$$

$$(22) \quad \left(\frac{1}{u_x} \frac{d}{dx} \frac{1}{u_x} \right) u_t = \frac{\delta H}{\delta u}, \quad H = \int \left(\frac{1}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x^2} + \frac{1}{3} \frac{R(u)}{u_x^2} \right) dx.$$

Формулы (22) определяют хорошо известное (В. В. Соколов, [136]) гамильтоново представление для уравнения Кричевера–Новикова [72]:

$$(23) \quad u_t = u_{xxx} - \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x} + \frac{R(u)}{u_x}.$$

В [95] построено каноническое гамильтоново представление для уравнения КН.

ПРИМЕР 1.7. *Билагранжевость уравнения Шварцшиан–КдВ* (вырожденного уравнения Кричевера–Новикова).

Рассмотрим случай вырожденного уравнения КН (23), для которого $R(u) \equiv 0$ (это уравнение известно также как Шварцшиан–КдВ):

$$(24) \quad u_t = u_x S[u],$$

где

$$(25) \quad S[u] = \frac{u_{xxx}}{u_x} - \frac{3}{2} \frac{u_{xx}^2}{u_x^2}$$

– шварцшиан. В этом случае наряду с лагранжевым представлением, порождаемым действием (20) (при $R(u) \equiv 0$), уравнение (24) допускает другое лагранжево представление, также порождаемое действием типа (1):

$$(26) \quad S_2 = \int \left[- \left(\frac{1}{2u_x} \right)_{xx} u_t - \frac{1}{2} u_x^{-2} u_{xxx}^2 + \frac{3}{8} u_x^{-4} u_{xx}^4 \right] dx dt.$$

Локальное симплектическое представление, отвечающее действию S_2 (26), согласовано с симплектическим представлением (22) при $R(u) \equiv 0$ и имеет вид:

$$(27) \quad M_2 u_t = \frac{\delta H_2}{\delta u}, \quad M_2 = \frac{1}{u_x^2} \frac{d^3}{dx^3} - 3 \frac{u_{xx}}{u_x^2} \frac{d^2}{dx^2} - \left(\frac{u_{xxx}}{u_x^3} - 3 \frac{u_{xx}^2}{u_x^4} \right) \frac{d}{dx},$$

$$(28) \quad H_2 = \int \left(-\frac{1}{2} u_x^{-2} u_{xxx}^2 + \frac{3}{8} u_x^{-4} u_{xx}^4 \right) dx.$$

Вторая локальная симплектическая структура для уравнения (24) была найдена в [22].

ПРИМЕР 1.8. *Уравнение Монжа–Ампера.*

Рассмотрим следующее действие вида (1) [125], [126]:

$$(29) \quad S = \int \left(\frac{1}{2} u_x^2 q_t - u_x q_x u_t - \frac{1}{2} q^2 u_{xx} + \Phi(x, t, u, u_x) \right) dx dt,$$

где $\Phi(x, t, u, u_x)$ – произвольная функция. Симплектическое представление (2), (3) соответствующей лагранжевой системы $\delta S / \delta u^i = 0$ имеет вид

$$(30) \quad M \begin{pmatrix} u \\ q \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} \delta F / \delta u \\ \delta F / \delta q \end{pmatrix},$$

где

$$(31) \quad M = \begin{pmatrix} q_x \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ q_x & -u_{xx} \\ u_{xx} & 0 \end{pmatrix}$$

– симплектический оператор,

$$(32) \quad F = \int \left[\frac{1}{2} q^2 u_{xx} - \Phi(x, t, u, u_x) \right] dx.$$

Симплектическая система (30)–(32) эквивалентна уравнению Монжа–Ампера (см. [126])

$$(33) \quad u_{xx} u_{tt} - (u_{xt})^2 = \frac{\delta \Phi}{\delta u}.$$

В этом случае пуассонова структура также является локальной и определяется гамильтоновым оператором $K^{ij} = (M^{-1})^{ij}$:

$$(34) \quad K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{u_{xx}} \\ -\frac{1}{u_{xx}} & \frac{q_x}{u_{xx}^2} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ \frac{q_x}{u_{xx}^2} \end{pmatrix}.$$

Одновременная локальность симплектического и гамильтонова оператора сохраняется для произвольных гамильтоновых операторов вида

$$(35) \quad K = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & A \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ A \end{pmatrix},$$

где B и A – произвольные функции переменных $x, u, u_x, u_{xx}, \dots, q, q_x, q_{xx}, \dots$ ($B \neq 0$). Симплектический оператор в этом случае имеет вид

$$(36) \quad M = \begin{pmatrix} \frac{A}{B^2} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ \frac{A}{B^2} & -\frac{1}{B} \\ \frac{1}{B} & 0 \end{pmatrix}.$$

В частности, оператор

$$(37) \quad M = \begin{pmatrix} \left[\frac{\partial q}{\partial u_x} - \left(\frac{\partial q}{\partial u_{xx}} \right)_x \right] \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ \left[\frac{\partial q}{\partial u_x} - \left(\frac{\partial q}{\partial u_{xx}} \right)_x \right] & \frac{\partial q}{\partial q} \\ -\frac{\partial q}{\partial q} & 0 \end{pmatrix}$$

является симплектическим оператором вида (36) для любой функции $g(x, u, u_x, u_{xx}, q)$. Соответствующий локальный гамильтонов оператор K имеет вид (35), где

$$(38) \quad B = -\frac{1}{(\partial g / \partial q)}, \quad A = \frac{\frac{\partial q}{\partial u_x} - \left(\frac{\partial q}{\partial u_{xx}} \right)_x}{(\partial g / \partial q)^2}.$$

Симплектический оператор (37) получается из формулы (3), выведенной в лемме 1.3, при $g_1 = g(x, u, u_x, u_{xx}, q)$, $g_2 = 0$ ($u^1 = u, u^2 = q$).

В заключение этого параграфа мы рассмотрим более общий случай вырожденных лагранжевых систем, задаваемых действиями вида:

$$(39) \quad S = \int (g_i(x, u, u_x, u_t, \dots, u_{x^s t^r}, \dots, u_{x^n t^m}) u_{t^{m+1}}^i + h(x, u, u_x, u_t, \dots, u_{x^s t^r}, \dots, u_{x^k t^m})) dx dt,$$

где $u_{x^s t^r} = \partial^{s+r} u / \partial x^s \partial t^r$, $r \leq m$. Другими словами, лагранжиан линеен по отношению к высшим производным полей $u^i(x, t)$ по t . Вводя новые переменные $q_s^i(x, t) = u_{t^s}^i$, $0 \leq s \leq m$, мы имеем для них следующие соотношения: $(q_s^i)_t = q_{s+1}^i$, $0 \leq s \leq m-1$. Очевидно, что лагранжева система $\delta S / \delta u^i = 0$ эквивалентна лагранжевой системе $\delta \hat{S} / \delta q_s^i = 0$, $\delta \hat{S} / \delta \lambda_k^i = 0$, $0 \leq k \leq m-1$, где

$$(40) \quad \hat{S} = \int (\hat{g}_i(x, \dots, (q_s^r)_{x^k}, \dots) (q_m^i)_t + q_s^i (\lambda_s^i)_t + \lambda_s^i q_{s+1}^i + \hat{h}(x, \dots, (q_s^r)_{x^k}, \dots)) dx dt,$$

$\lambda_k^i(x, t)$ – множители Лагранжа. Таким образом, мы получаем действие $\hat{S}$ вида (1) и имеем соответствующие симплектические представления (2), (3) для лагранжевой системы $\delta S / \delta u^i = 0$.

§ 1.4. Однородные симплектические структуры второго порядка на пространствах петель почти симплектических и симплектических многообразий и симплектические связности

Рассмотрим однородные матричные дифференциальные симплектические операторы $A_{ij}^{[m]}$ вида

$$(1) \quad A_{ij}^{[m]} = a_{ij}^{[m]}(u) \frac{d^m}{dx^m} + b_{ijk}^{[m]}(u) u_x^k \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + (c_{ijk}^{[m]}(u) u_{xx}^k + c_{ijk}^{[m]}(u) u_x^k u_x^l) \frac{d^{m-2}}{dx^{m-2}} + \dots + d_{ijk}^{[m]}(u) u_{(m)}^k + \dots,$$

где каждое слагаемое имеет степень однородности m по отношению к естественной градуировке:

$$\deg(fg) = \deg f + \deg g, \quad \deg f(u(x)) = \deg u(x) = 0, \\ \deg u_{(k)} = \deg \frac{d^k u}{dx^k} = \deg \frac{d^k}{dx^k} = k.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Симплектические операторы вида (1) называются *однородными симплектическими операторами дифференциально-геометрического типа*.

Однородные пуассоновы структуры дифференциально-геометрического типа, задаваемые дифференциальными операторами вида (1) (но с верхними индексами, как и положено гамильтоновым операторам), были рассмотрены впервые Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым в [32] (см. также [30], [33]), где была поставлена задача их классификации. В гл. 2 мы подробно остановимся на пуассоновых структурах Дубровина–Новикова, их обобщениях и приложениях.

Симплектические операторы вида (1) и соответствующие симплектические формы на пространстве петель ΩM

$$(2) \quad \omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \xi^i (A_{ij}^{[m]} \eta^j) dx$$

были введены и изучены для малых m автором в [93], [94], [108]. Несложно показать, что локальные замены координат $u^i = u^i(\tilde{u})$ на многообразии M сохраняют форму оператора (1), и его коэффициенты преобразуются при этом как дифференциально-геометрические объекты на многообразии (см. общие формулы (1.1.10) и (1.1.11) преобразования симплектического оператора при локальной замене координат на многообразии в §1.1). Из кососимметричности оператора следует, что старший коэффициент $a_{ij}^{[m]}(u)$, который всегда преобразуется как метрика на многообразии при локальных заменах координат, должен быть симметричной матрицей при нечетном m , $m = 2k + 1$, и кососимметричной матрицей при четном m , $m = 2k$. Если $\det(a_{ij}^{[m]}(u)) \neq 0$, то соответствующие симплектические формы могут быть выражены в инвариантной форме через метрику $a_{ij}^{[m]}(u)$ и тензоры кривизны и кручения дифференциально-геометрических связностей $a^{[m]is} b_{sjk}^{[m]}$, $a^{[m]is} c_{sjk}^{[m]}$, $\dots$, $a^{[m]is} d_{sjk}^{[m]}$.

$$\omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} (\langle \xi, \nabla_{\dot{\gamma}}^m \eta \rangle + \dots) dx,$$

где $\langle \xi, \eta \rangle = a_{ij}^{[m]}(u) \xi^i \eta^j$, $a^{[m]is} a_{sj}^{[m]} = \delta_j^i$, а многоточием здесь обозначены члены с меньшей степенью ковариантной производной.

При $m = 0$ условия симплектичности оператора (1) имеют вид

$$a_{ij}^{[0]}(u) = -a_{ji}^{[0]}(u), \quad \sum_{(i,j,k)} \frac{\partial a_{ij}^{[0]}}{\partial u^k} = 0,$$

где сумма берется по всем циклическим перестановкам элементов i, j, k . Это означает, что $\Omega_0 = a_{ij}^{[0]}(u) du^i \wedge du^j$ – замкнутая 2-форма на многообразии M , а $\omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \Omega_0(\xi, \eta) dx$ – ультралокальная симплектическая структура на пространстве петель ΩM . Таким образом, случай $m = 0$ соответствует, в точности, классической конечномерной симплектической геометрии. Случай $m = 1$ соответствует симплектическим операторам (1.2.1) и симплектическим формам (1.2.5) из §1.2.

Пусть $m = 2$, т.е. рассмотрим симплектические операторы вида

$$(3) \quad A_{ij}^{[2]} = a_{ij}^{[2]}(u) \frac{d^2}{dx^2} + b_{ijk}^{[2]}(u) u_x^k \frac{d}{dx} + c_{ijk}^{[2]}(u) u_{xx}^k + c_{ijkl}^{[2]}(u) u_x^k u_x^l, \quad \det(a_{ij}^{[2]}(u)) \neq 0.$$

В этом случае $g_{ij}(u) = a_{ij}^{[2]}(u)$ – невырожденное кососимметрическое тензорное поле типа $(0, 2)$ на M , т.е. многообразие M – почти симплектическое, $g_{ij}(u)$ – почти симплектическая структура на нем. Введем коэффициенты $\Gamma_{jk}^i(u)$ по формуле

$$(4) \quad b_{ijk}^{[2]}(u) = 2g_{is}(u) \Gamma_{jk}^s(u).$$

Далее в этом параграфе мы будем опускать символ $[2]$ у коэффициентов однородного оператора (3) порядка 2.

ЛЕММА 1.4 [94]. Коэффициенты $\Gamma_{jk}^i(u)$ определяют симплектическую связность на (M, g_{ij}) , т.е. аффинную связность, согласованную с почти симплектической структурой $g_{ij}(u)$ на многообразии:

$$(5) \quad \nabla_k g_{ij} \equiv \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} - g_{is} \Gamma_{jk}^s - g_{sj} \Gamma_{ik}^s = 0.$$

Лемма 1.4 является прямым следствием условий кососимметричности однородного оператора (3). Действительно, оператор (3) кососимметричен тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения на коэффициенты:

$$(6) \quad g_{ij} = -g_{ji},$$

$$(7) \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k} = \frac{1}{2}(b_{ijk} - b_{jik}),$$

$$(8) \quad \sum_{(k,l)} \sum_{(i,j)} \left(2c_{ijkl} - \frac{\partial b_{ijk}}{\partial u^l} \right) = 0,$$

$$(9) \quad \sum_{(i,j)} \left(c_{ijk} - \frac{1}{2}b_{ijk} \right) = 0,$$

где знак $\sum_{(i,j)}$ обозначает суммирование по всем перестановкам соответствующих элементов (i, j) в круглых скобках под знаком суммы. Соотношение (7) в точности соответствует условию, что коэффициенты $\Gamma_{jk}^i(u)$ определяют симплектическую связность на (M, g_{ij}) . Оказывается, что всякая симплектическая связность $\Gamma_{jk}^i(u)$ на заданном почти симплектическом многообразии (M, g_{ij}) порождает симплектический оператор вида (3), причем при фиксированной почти симплектической структуре $g_{ij}(u)$ симплектическая связность однозначно определяет соответствующий симплектический оператор (3).

ТЕОРЕМА 1.2 [94]. Если (M, g_{ij}) – почти симплектическое многообразие, то имеется взаимнооднозначное соответствие между симплектическими связностями $\Gamma_{jk}^i(u)$ на (M, g_{ij}) и замкнутыми 2-формами (2), $m = 2$, на пространстве петель ΩM . Это соответствие выражается следующей формулой:

$$(10) \quad \omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \left\{ \langle \xi, \nabla_\nu^2 \eta \rangle + \langle T(\xi, \eta), \nabla_\nu \nu \rangle + \frac{1}{2} \langle \nu, R(\xi, \eta) \nu \rangle + \left\langle \nu, \sum_{(\eta, \xi, \nu)} R(\eta, \xi) \nu \right\rangle + \langle T(\nu, \xi), T(\nu, \eta) \rangle \right\} dx,$$

где знак $\sum_{(\eta, \xi, \nu)}$ означает суммирование по всем циклическим перестановкам элементов (η, ξ, ν) , $\xi(u(x)), \eta(u(x))$ – гладкие векторные поля вдоль петли γ , $\langle \xi, \eta \rangle = g_{ij} \xi^i \eta^j$, векторное поле ν – векторное поле скорости петли $\gamma(x)$, т.е. $\nu^i = u_x^i$; ∇_ν – ковариантное дифференцирование вдоль петли γ ; $[T(\xi, \eta)]^i = T_{kl}^i \xi^k \eta^l$, $T_{jk}^i \equiv \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i$, – тензор кручения связности;

$$[R(\xi, \eta) \zeta]^i = R_{jkl}^i \xi^k \eta^l \zeta^j, \quad R_{jkl}^i = -\frac{\partial \Gamma_{jl}^i}{\partial u^k} + \frac{\partial \Gamma_{jk}^i}{\partial u^l} - \Gamma_{pk}^i \Gamma_{jl}^p + \Gamma_{pl}^i \Gamma_{jk}^p,$$

– тензор кривизны связности. Формула (10) дает общий вид однородных симплектических структур второго порядка (2), $m = 2$, на пространстве петель ΩM , а также описывает все симплектические операторы вида (3).

Для произвольной почти симплектической структуры $g_{ij}(u)$ симплектический оператор (3) однозначно определяется по произвольной симплектической связности $\Gamma_{jk}^i(u)$ на почти симплектическом многообразии (M, g_{ij}) . Важно отметить, что класс симплектических связностей на почти симплектических многообразиях достаточно богат. Несложно показать, что на всяком почти симплектическом многообразии существует бесконечно много различных симплектических связностей и, соответственно, бесконечно много различных симплектических форм (10) на его пространстве петель.

На симплектических многообразиях существует специальный класс симметричных симплектических связностей, удовлетворяющих условию $T_{jk}^i = 0$. Несложно показать, что симметричные симплектические связности существуют на (M, g_{ij}) тогда и только тогда, когда (M, g_{ij}) – симплектическое многообразие, т.е. $(dg)_{ijk} = 0$.

СЛЕДСТВИЕ 1.7 [94]. Если симплектическая связность $\Gamma_{jk}^i(u)$ симметрична, т.е. $T_{jk}^i(u) = 0$, то соответствующая однородная симплектическая форма 2-го порядка (10) на ΩM имеет вид

$$(11) \quad \omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \left\{ \langle \xi, \nabla_\nu^2 \eta \rangle + \frac{1}{2} \langle \nu, R(\xi, \eta) \nu \rangle \right\} dx.$$

Формула (11) описывает естественный класс однородных симплектических форм второго порядка на пространствах петель симплектических многообразий.

На всяком симплектическом многообразии существует бесконечно много симметричных симплектических связностей и, следовательно, соответствующих симплектических форм (11) на ΩM .

§ 1.5. Комплексы однородных форм на пространствах петель гладких многообразий и их группы когомологий

Комплексы $(\Omega_{[m]}, d)$ однородных форм произвольного фиксированного порядка m на пространствах петель гладких многообразий были введены и изучены в работах автора [98], [100].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Однородными k -формами порядка m на пространстве петель ΩM многообразия M мы будем называть кососимметрические формы вида

$$(1) \quad \omega(\xi_1, \dots, \xi_k) = \int_{S^1} \left(\sum M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{[n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s]}(u) u_{(p_1)}^{j_1} \dots u_{(p_s)}^{j_s} (\xi_1^{i_1})_{(n_1)} \dots (\xi_k^{i_k})_{(n_k)} \right) dx,$$

где суммирование взято по всем $s \geq 0$ и по всем $n_1, \dots, n_k, p_1, \dots, p_s$ таким, что $n_1 + \dots + n_k + p_1 + \dots + p_s = m$, а также по всем $1 \leq i_r \leq N$, $1 \leq r \leq k$; $1 \leq j_l \leq N$, $1 \leq l \leq s$; $M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{[n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s]}(u)$ – гладкие функции на многообразии M .

Всегда можно считать, что $0 < p_1 \leq \dots \leq p_s$ и, кроме того, $n_1 = 0$, так как в нашем случае $\int_{S^1} \frac{d}{dx} G dx = 0$ для всех рассматриваемых функций $G(x, u(x), u_x(x), \dots)$, заданных на петлях γ .

Очевидно, что множество $\Omega_{[m]}^k$ всех однородных k -форм порядка m на пространстве петель ΩM является линейным пространством над $\mathbb{R}$, причем определение пространства $\Omega_{[m]}^k$ не зависит от локальных координат $\{u^i\}$, так как локальные замены координат $u^i = u^i(v^1, \dots, v^N)$ на многообразии M не выводят однородные k -формы порядка m из этого класса. Число m является инвариантом однородной формы относительно локальных замен координат на многообразии. Мы будем использовать также следующие обозначения: $\Omega_{[m]}$ – линейное пространство всех однородных форм порядка m на пространстве петель ΩM многообразия M , Ω^k – линейное пространство всех однородных k -форм на ΩM , Ω – линейное пространство всех однородных форм на ΩM :

$$\Omega = \sum_{m \geq 0} \Omega_{[m]} = \sum_{k \geq 0} \Omega^k = \sum_{m \geq 0} \sum_{k \geq 0} \Omega_{[m]}^k.$$

Дифференциал d на k -формах определен следующей формулой:

$$\begin{aligned} (2) \quad & (d\omega)(\xi_1, \dots, \xi_{k+1}) \\ &= \sum_{q=1}^{k+1} (-1)^{q+1} \int_{S^1} (\xi_q^{i_q})_{(r)} (\xi_1^{i_1})_{(n_1)} \cdots (\xi_{q-1}^{i_{q-1}})_{(n_{q-1})} (\xi_{q+1}^{i_{q+1}})_{(n_q)} \cdots (\xi_{k+1}^{i_{k+1}})_{(n_k)} \\ & \times \frac{\partial (M_{i_1 \dots i_k j_1 \dots j_s}^{n_1 \dots n_k p_1 \dots p_s})(u) u_{(p_1)}^{j_1} \cdots u_{(p_s)}^{j_s}}{\partial u_{(r)}^{i_r}} dx. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5 [98], [100]. Дифференциал d является линейным отображением на линейном пространстве Ω однородных форм и переводит однородную k -форму порядка m в однородную $(k+1)$ -форму порядка m :

$$d: \Omega_{[m]}^k \rightarrow \Omega_{[m]}^{k+1},$$

причем $d^2 = 0$.

Таким образом, определен комплекс (Ω, d) однородных форм на пространстве петель ΩM :

$$0 \xrightarrow{d} \Omega^0 \xrightarrow{d} \Omega^1 \xrightarrow{d} \Omega^2 \xrightarrow{d} \dots$$

Более того, для любого m определен комплекс $(\Omega_{[m]}, d)$ однородных форм порядка m на пространстве петель ΩM :

$$(3) \quad 0 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^0 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^1 \xrightarrow{d} \Omega_{[m]}^2 \xrightarrow{d} \dots$$

Введем обозначение $Z_{[m]}^k(\Omega M)$ для замкнутых ($d\omega = 0$) и, соответственно, $B_{[m]}^k(\Omega M)$ для точных ($\omega = d\alpha$) однородных k -форм ω порядка m на ΩM и определим группы когомологий нашего комплекса (3):

$$(4) \quad H_{[m]}^k(\Omega M, R) = Z_{[m]}^k(\Omega M) / B_{[m]}^k(\Omega M).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Группы $H_{[m]}^k(\Omega M, R)$ мы будем называть *группами однородных когомологий порядка m пространства петель ΩM гладкого многообразия M* .

Введем также обозначение $Z^k(\Omega M)$ для всех замкнутых и, соответственно, $B^k(\Omega M)$ для всех точных однородных k -форм на ΩM и определим *группы однородных когомологий пространства петель ΩM гладкого многообразия M* формулой

$$H^k(\Omega M, R) = Z^k(\Omega M) / B^k(\Omega M).$$

Очевидно, что когомологии комплекса однородных форм нулевого порядка совпадают с когомологиями де Рама многообразия M :

$$H_{[0]}^i(\Omega M, R) = H^i(M, R).$$

Таким образом, комплекс (Ω, d) является естественным обобщением классического комплекса де Рама на пространства петель гладких многообразий.

По-видимому, все группы когомологий комплекса однородных форм (3) должны выражаться через группы когомологий де Рама многообразия M . В частности, имеет место следующая теорема о связи групп когомологий комплекса однородных форм первого порядка с группами когомологий де Рама.

ТЕОРЕМА 1.3 [98], [100]. *При $i = 0, 1, 2$*

$$(5) \quad H_{[1]}^i(\Omega M, R) = H^{i+1}(M, R).$$

Отметим, что однородные k -формы первого порядка инвариантны относительно действия группы $\text{Diff}^+(S^1)$ диффеоморфизмов окружности, сохраняющих ориентацию, что важно с точки зрения приложений в теории замкнутых бозонных струн в искривленном N -мерном пространстве-времени M с метрикой (гравитационным полем) g_{ij} , конфигурационным пространством которых является пространство петель ΩM псевдориманова многообразия (M, g_{ij}) (требование инвариантности или независимости от параметризации петли является необходимым в теории бозонных струн для физически осмысленных объектов на конфигурационном пространстве ΩM).

Однородные симплектические структуры, изучавшиеся автором в [93], [94], [99], [108], [110] (см. §§ 1.2, 1.4), отвечают в точности замкнутым однородным 2-формам на ΩM , т.е. являются элементами $Z_{[m]}^2(\Omega M)$.

Развитый в данном параграфе подход позволяет вычислить явно (выразить через когомологии де Рама многообразия) и высшие группы ($i \geq 2$) однородных когомологий $H_{[m]}^i(\Omega M, R)$ пространств петель, в том числе старших порядков $m \geq 2$, хотя и требует большого объема вычислений. Отметим, что сдвиг на $m = 1$ в группах когомологий в формуле (5), вообще говоря, не является общим фактом для любых i и m . По крайней мере, несложно показать, что $H_{[2]}^0(\Omega M, R) = 0$.

Глава 2.

Локальные и нелокальные пуассоновы
структуры дифференциально-геометрического типа§ 2.1. Риманова геометрия многомерных локальных
пуассоновых структур гидродинамического типа

Рассмотрим *многомерные системы гидродинамического типа*, т.е., другими словами, многомерные эволюционные квазилинейные системы уравнений в частных производных первого порядка:

$$(1) \quad u_t^i = v_j^{i\alpha}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha},$$

где $i, j = 1, \dots, N$; $\alpha = 1, \dots, n$; $x = (x^1, \dots, x^n)$, здесь при всех α коэффициенты $v_j^{i\alpha}(u)$ – произвольные $N \times N$ матричные функции от $u = (u^1, \dots, u^N)$, $u^i = u^i(x, t)$.

Такие системы естественно возникают не только в эйлеровой гидродинамике и газовой динамике, но и в теории многослойной воды (уравнения Бенни), при изучении бездисперсионных пределов различных физических систем, при усреднении методом Уизема и т.д. Как правило, системы гидродинамического типа, возникающие в физически интересных случаях, являются гамильтоновыми. Общий дифференциально-геометрический гамильтонов подход к системам вида (1) был предложен Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым [31], [32].

Многомерные гамильтоновы системы гидродинамического типа, введенные в [31], [32], имеют вид

$$(2) \quad u_t^i = \{u^i, H\},$$

где H – функционал гидродинамического типа, т.е. его плотность $h(u)$ является функцией только от переменных u^i и не зависит от их производных:

$$(3) \quad H = \int h(u) d^n x,$$

а *многомерная скобка Пуассона гидродинамического типа* имеет вид

$$(4) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij\alpha}(u(x)) \delta_\alpha(x - y) + u_\alpha^k(x) b_k^{ij\alpha}(u(x)) \delta(x - y),$$

где $u_\alpha^i = \partial u^i / \partial x^\alpha$; $i, j, k = 1, \dots, N$; $\alpha = 1, \dots, n$; $x = (x^1, \dots, x^n)$.

Соответствующий многомерный гамильтонов оператор является однородным многомерным оператором первого порядка:

$$K^{ij} = g^{ij\alpha}(u(x)) \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + u_\alpha^k b_k^{ij\alpha}(u(x)), \quad u_t^i = K^{ij} \frac{\delta H}{\delta u^j}.$$

Очевидно, что если скобка Пуассона имеет вид (4), то для любого функционала гидродинамического типа (3) соответствующая гамильтонова система (2) является многомерной эволюционной квазилинейной системой уравнений в частных производных

первого порядка, т.е. вида (1). Кроме того, вид скобки Пуассона (4) и системы гидродинамического типа (1) не меняется при локальных заменах $u^i = u^i(v)$ координат на многообразии M , при этом коэффициенты скобки преобразуются как дифференциально-геометрические объекты на M . Гамильтонов оператор преобразуется следующим образом:

$$K^{ij}[u(v)] = \frac{\partial u^i}{\partial v^s} \tilde{K}^{sr}[v] \frac{\partial u^j}{\partial v^r}.$$

Соответственно, для его коэффициентов получаем формулы преобразования вида:

$$\begin{aligned} g^{ij\alpha}(u(v)) &= \frac{\partial u^i}{\partial v^s} \tilde{g}^{sr\alpha} \frac{\partial u^j}{\partial v^r}, \\ b_q^{ij\alpha}(u(v)) &= \frac{\partial u^i}{\partial v^s} \frac{\partial^2 u^j}{\partial v^r \partial v^p} \frac{\partial v^p}{\partial u^q} \tilde{g}^{sr\alpha}(v) + \frac{\partial u^i}{\partial v^s} \frac{\partial u^j}{\partial v^r} \frac{\partial v^p}{\partial u^q} \tilde{b}_p^{sr\alpha}(v). \end{aligned}$$

Это позволяет развить общий дифференциально-геометрический подход к гамильтоновым системам гидродинамического типа (1).

Если $\det(g^{ij\alpha}) \neq 0$ для всех α , то многомерные пуассоновы структуры гидродинамического типа (4) называются *невыврожденными*.

Коэффициенты $g^{ij\alpha}(u)$ преобразуются как метрики с верхними индексами на многообразии. Для невырожденных скобок Пуассона вида (4) введем коэффициенты $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ по формулам:

$$b_k^{ij\alpha} = -g^{is\alpha} \Gamma_{sk}^{j\alpha}.$$

Коэффициенты $\Gamma_{sk}^{j\alpha}(u)$ преобразуются как символы Кристоффеля аффинной связности на многообразии:

$$\Gamma_{pq}^{j\alpha} = \frac{\partial u^j}{\partial v^k} \left(\tilde{\Gamma}_{rs}^{k\alpha} \frac{\partial v^s}{\partial u^q} \frac{\partial v^r}{\partial u^p} + \frac{\partial^2 v^k}{\partial u^p \partial u^q} \right).$$

Из результатов Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [31], [32] следует, что для невырожденных скобок Пуассона вида (4) все метрики $g^{ij\alpha}(u)$ являются плоскими метриками на многообразии M , а все коэффициенты $\Gamma_{ik}^{j\alpha}(u)$ определяют симметричные связности нулевой римановой кривизны, согласованные с соответствующими им метриками $g^{ij\alpha}(u)$. Действительно, в одномерном случае (при $n = 1$) Б. А. Дубровин и С. П. Новиков доказали следующую теорему (мы опустим индекс α у коэффициентов скобки Пуассона в одномерном случае).

ТЕОРЕМА ДУБРОВИНА–НОВИКОВА [31]. Если $n = 1$ и $\det[g^{ij}(u)] \neq 0$, то выражение (4) задает скобку Пуассона тогда и только тогда, когда

- (1) $g^{ij}(u)$ – риманова или псевдориманова метрика нулевой кривизны (т.е. просто плоская метрика),
- (2) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – коэффициенты римановой связности, порождаемой метрикой $g^{ij}(u)$, т.е. симметричной связности, согласованной с метрикой (связность Леви-Чивита).

Таким образом, при $n = 1$ всегда существуют локальные координаты $v^i = v^i(u)$, в которых одномерная скобка Пуассона вида (4) постоянна и имеет вид:

$$\{v^i(x), v^j(y)\} = \varepsilon^i \delta^{ij} \delta_x(x - y),$$

где $\varepsilon^i = \pm 1, i = 1, \dots, N$.

Легко показать, что любая многомерная скобка Пуассона гидродинамического типа (4) всегда является суммой по α соответствующих одномерных скобок Пуассона (см. правую часть формулы (4) для каждого α в отдельности). Более того, все эти одномерные скобки Пуассона будут согласованными, если для каждого α положить $x^\alpha = x^1$. Действительно, всегда имеется редукция $x^\alpha = c^\alpha x^1$, где c^α – произвольные ненулевые константы, сохраняющая кососимметричность и тождество Якоби, в результате которой многомерная скобка Пуассона (4) переходит в произвольную линейную комбинацию соответствующих одномерных скобок Пуассона.

Вообще говоря, условие, что выражение вида (4) является многомерной скобкой Пуассона, оказывается значительно более сильным условием на коэффициенты, чем необходимое требование, что все соответствующие одномерные скобки Пуассона согласованы. Описание и классификация многомерных однородных скобок Пуассона гидродинамического типа соответствует описанию и классификации важного подкласса согласованных одномерных однородных скобок Пуассона гидродинамического типа. Отметим, что задача описания или классификации всех согласованных одномерных однородных скобок Пуассона гидродинамического типа пока не решена даже при малом числе компонент N (см. [102], [103]). Эта задача весьма интересна и актуальна в теории одномерных систем гидродинамического типа и их приложений. Явное описание и классификация двумерных однородных скобок Пуассона гидродинамического типа для малого числа компонент $1 \leq N \leq 4$ получены автором в [89]. Интересно, что при $N = 4$ впервые появляется однопараметрическое семейство двумерных пуассоновых структур вида (4), которые не приводятся друг к другу локальными заменами переменных на многообразии (при $1 \leq N < 4$ имеется только конечное число *канонических* пуассоновых структур, к которым все остальные приводятся локальными заменами переменных на многообразии).

Найдем сначала общие условия на коэффициенты скобки (4).

ЛЕММА 2.1. *Выражение (4) задает скобку Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$(5) \quad g^{ij\alpha} = g^{ji\alpha},$$

$$(6) \quad \frac{\partial g^{ij\alpha}}{\partial u^k} = b_k^{ij\alpha} + b_k^{ji\alpha},$$

$$(7) \quad \sum_{(\alpha, \beta)} (g^{si\alpha} b_s^{jr\beta} - g^{sj\beta} b_s^{ir\alpha}) = 0,$$

$$(8) \quad \sum_{(i, j, r)} (g^{si\alpha} b_s^{jr\beta} - g^{sj\beta} b_s^{ir\alpha}) = 0,$$

$$(9) \quad \sum_{(\alpha, \beta)} \left\{ g^{si\alpha} \left(\frac{\partial b_s^{jr\beta}}{\partial u^q} - \frac{\partial b_q^{jr\beta}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij\alpha} b_q^{sr\beta} - b_s^{ir\alpha} b_q^{sj\beta} \right\} = 0,$$

$$(10) \quad g^{si\beta} \frac{\partial b_q^{jr\alpha}}{\partial u^s} - b_s^{ij\beta} b_q^{sr\alpha} - b_s^{ir\beta} b_q^{js\alpha} = g^{sj\alpha} \frac{\partial b_q^{ir\beta}}{\partial u^s} - b_s^{ji\alpha} b_q^{sr\beta} - b_q^{is\beta} b_s^{jr\alpha},$$

$$(11) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial u^k} \left\{ g^{si\alpha} \left(\frac{\partial b_s^{jr\beta}}{\partial u^q} - \frac{\partial b_q^{jr\beta}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij\alpha} b_q^{sr\beta} - b_s^{ir\alpha} b_q^{sj\beta} \right\} \\ & + \sum_{(i,j,r)} \left\{ b_q^{si\beta} \left(\frac{\partial b_k^{jr\alpha}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jr\alpha}}{\partial u^k} \right) \right\} \\ & + \frac{\partial}{\partial u^q} \left\{ g^{si\beta} \left(\frac{\partial b_s^{jr\alpha}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_k^{jr\alpha}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij\beta} b_k^{sr\alpha} - b_s^{ir\beta} b_k^{sj\alpha} \right\} \\ & + \sum_{(i,j,r)} \left\{ b_k^{si\alpha} \left(\frac{\partial b_q^{jr\beta}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jr\beta}}{\partial u^q} \right) \right\} = 0. \end{aligned}$$

Соотношения (5) и (6) эквивалентны кососимметричности скобки (4), а соотношения (7)–(11) эквивалентны выполнению тождества Якоби для кососимметрической скобки вида (4).

В лемме 2.1 невырожденность скобки не предполагается и не накладывается никаких дополнительных условий на коэффициенты выражения (4). Все соотношения (5)–(11) получаются из кососимметричности скобки (4) и из выполнения для нее тождества Якоби на произвольных линейных функционалах вида $I = \int f_i(x) u^i(x) d^n x$ прямыми вычислениями. В частности, из леммы 2.1 немедленно следует, что многомерная скобка Пуассона (4) всегда является суммой одномерных скобок Пуассона по каждой из переменных x^α .

Рассмотрим сначала соотношения (5)–(11) в одномерном случае ($n = 1$). В одномерном случае очевидно, что соотношение (8) является следствием соотношения (7), и, кроме того, (10) следует из соотношений (9), (7) и (6). Для невырожденной метрики $g^{ij\alpha}$ имеем: условие (5) дает симметричность метрики; условие (6) означает, что связность $\Gamma_{ij}^{k\alpha} = -g_{is}^\alpha b_j^{sk\alpha}$ согласована с метрикой $g^{ij\alpha}$, т.е. ковариантная производная метрики равна нулю; условие (7) дает симметричность связности $\Gamma_{ij}^{k\alpha}$, т.е. $\Gamma_{ij}^{k\alpha} = \Gamma_{ji}^{k\alpha}$; условие (9) в точности означает, что связность плоская, т.е. тензор римановой кривизны связности равен нулю; условие (11) при $\alpha = \beta$ и для невырожденной метрики $g^{ij\alpha}$ следует из соотношений (7) и (9). Это доказывает теорему Дубровина–Новикова для невырожденных одномерных пуассоновых структур гидродинамического типа.

Следующая теорема дает полный набор соотношений на коэффициенты скобки (4), необходимый и достаточный для того, чтобы выражение (4) задавало невырожденную скобку Пуассона.

ТЕОРЕМА 2.1. *Плоские невырожденные метрики $g^{ij\alpha}(u)$ и определяемые ими римановы связности $\Gamma_{jk}^{i\alpha}$ (связности Леви-Чивита) порождают пуассонову структуру (4) тогда и только тогда, когда тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta} = \Gamma_{jk}^{i\beta} - \Gamma_{jk}^{i\alpha}$ удовлетворяют следующим соотношениям:*

$$(12) \quad T^{ijk\alpha\beta} = T^{kji\alpha\beta},$$

$$\text{где } T^{ijk\alpha\beta} = -g^{ks\beta} T_s^{ij\alpha\beta} = -g^{ks\beta} g^{ip\alpha} T_{ps}^{j\alpha\beta}, \quad T_k^{ij\alpha\beta} = g^{is\alpha} T_{sk}^{j\alpha\beta},$$

$$(13) \quad \sum_{(i,j,k)} T^{ijk\alpha\beta} = 0,$$

где знак $\sum_{(i,j,k)}$ означает суммирование по всем перестановкам элементов (i, j, k) ,

$$(14) \quad T^{ijs\alpha\beta} T_{st}^{r\alpha\beta} = T^{irs\alpha\beta} T_{st}^{j\alpha\beta},$$

$$(15) \quad \nabla_t^\alpha T^{ijk\alpha\beta} = 0,$$

где ∇_t^α – соответствующая ковариантная производная (во всех этих формулах суммирования по α нет).

Тензоры $T^{ijk\alpha\beta}$ являются препятствием к приведению невырожденной пуассоновой структуры (4) к постоянному виду, т.е. невырожденная скобка Пуассона вида (4) приводится к постоянной скобке тогда и только тогда, когда все тензоры $T^{ijk\alpha\beta}$ равны нулю. Действительно, если хотя бы один из этих тензоров не равен тождественно нулю, то скобка Пуассона не может быть приведена к постоянному виду локальной заменой координат, так как для постоянной скобки все $\Gamma_{jk}^{i\alpha} = 0$, и в этих координатах все тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta}$ равнялись бы нулю. Обратное утверждение очевидно: если все тензоры $T_{jk}^{i\alpha\beta}$ равны нулю, то все связности равны друг другу и, следовательно, все они равны нулю в плоских координатах метрики g^{ij1} , а все метрики постоянны в этих координатах в силу согласованности с соответствующей связностью.

Соотношения (12) и (14) были найдены Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым в [32], где были описаны все соотношения для пуассоновых структур гидродинамического типа (4), возникающие из выполнения тождества Якоби на функционалах гидродинамического типа (3). В работе автора [89] было доказано, что этот набор соотношений не является полным, и были найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы выражение (4) являлось невырожденной пуассоновой структурой. В теореме 2.1 приведен полный набор соотношений на коэффициенты невырожденной скобки Пуассона вида (4), гарантирующий ее кососимметричность и выполнение тождества Якоби на произвольных функционалах. Как будет показано ниже, соотношения (13) и (15) являются существенными и играют важную роль при классификации многомерных скобок Пуассона гидродинамического типа. Любопытно, что в одномерном случае соотношений, полученных из выполнения для невырожденной кососимметрической скобки (4) тождества Якоби только на функционалах гидродинамического типа, оказывается достаточно, как показано Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым в [31], для того, чтобы выражение (4) приводилось локальными заменами переменных к постоянному виду и, следовательно, задавало скобку Пуассона. Как показывает теорема 2.1, уже в двумерном случае не все необходимые соотношения могут быть получены на функционалах гидродинамического типа.

Из леммы 2.1 при условии невырожденности метрик $g^{ij\alpha}$ получаем, что при $\alpha \neq \beta$ условие (7) дает соотношение (12) на препятствующие тензоры; условие (8) эквивалентно (13); условие (9) эквивалентно (14); условие (10) эквивалентно (15); условие (11) в случае невырожденных метрик является прямым следствием соотношений

(5)–(10) (в общем случае это не так – условие (11) является существенным в случае вырожденных метрик).

При $N = 1$ и любом n все препятствующие тензоры равны 0. Действительно, в однокомпонентном случае соотношения (5), (7), (9) и (11) выполняются автоматически, соотношение (6) дает $\partial g^\alpha / \partial u = 2b^\alpha$, а из соотношения (8) получаем, что $g^\alpha b^\beta = g^\beta b^\alpha$, при этом соотношение (10) следует из (6) и (8). Таким образом, в однокомпонентном случае при любом n имеем для любого α : $g^\alpha = c^\alpha g(u)$, где $g^\alpha(u)$ – произвольная функция, а c^α – произвольная константа. Все препятствующие тензоры $T^{\alpha\beta}$ равны нулю, и все многомерные однокомпонентные скобки Пуассона вида (4) приводятся к постоянному виду локальной заменой переменной u^1 .

Плоская невырожденная метрика $g^{ij\alpha}(u)$ всегда может быть приведена локальной заменой переменных u^i к постоянной. Приведем одну из метрик (для определенности первую) к постоянному виду. Простым следствием теоремы 2.1 является следующая важная теорема.

ТЕОРЕМА 2.2 [32], [89]. *Если $g^{ij1} = \text{const}$ у невырожденной многомерной пуассоновой структуры (4), то все остальные метрики линейны по полям $u^i(x)$:*

$$g^{ij\alpha} = (c_k^{ij\alpha} + c_k^{ji\alpha})u^k + g_0^{ij\alpha}, \quad c_k^{ij\alpha} = \text{const}, \quad g_0^{ij\alpha} = \text{const}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. При $N \geq 3$ теорема 2.2 доказана Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым в [32]. Исследование особых случаев $N = 1, 2$ в [32] ошибочно, так как основано, как упомянуто выше, на полученном в [32] неполном наборе соотношений на препятствующие тензоры, которые необходимы для того, чтобы выражение (4) являлось скобкой Пуассона. В [32] найдены только те соотношения, при которых тождество Якоби для невырожденной скобки вида (4) выполняется на функционалах гидродинамического типа. Этого недостаточно для выполнения тождества Якоби на всех функционалах. Любопытно, что в многокомпонентном случае, т.е. при $N \geq 3$, этого неполного набора соотношений оказывается, тем не менее, достаточно для доказательства приведения невырожденной скобки Пуассона вида (4) к линейному виду (теорема 2.2) (но не для классификации таких пуассоновых структур или соответствующих бесконечномерных алгебр Ли).

СЛЕДСТВИЕ 2.1. *Всякая невырожденная многомерная пуассонова структура гидродинамического типа определяется бесконечномерной алгеброй Ли специального типа с 2-коциклом на ней:*

$$[\xi, \eta]_k = c_k^{ij\alpha}((\eta_i)_\alpha \xi_j - \eta_j(\xi_i)_\alpha), \quad \xi = (\xi_1, \dots, \xi_N), \quad \xi_i(x) \in C^1(T^n).$$

Соответствующие 2-коциклы на алгебре Ли имеют вид:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int g_0^{ij\alpha}(\eta_j(x))_\alpha \xi_i(x) d^n x.$$

Приведем здесь кратко общую схему, восходящую к Софусу Ли (см. также [62]), взаимосвязей между бесконечномерными алгебрами Ли и пуассоновыми структурами, коэффициенты которых линейно (возможно, неоднородно) зависят от переменных $u^i(x)$ и их производных $u_{(k)}^i$, $k = (k_1, \dots, k_n)$, где $u_{(k)}^i = \partial^{|k|} u^i / \partial (x^1)^{k_1} \dots \partial (x^n)^{k_n}$,

$|k| = k_1 + \dots + k_n$. Мы будем в дальнейшем неоднократно обращаться к этой схеме в различных ситуациях.

Рассмотрим гамильтоновы операторы вида

$$(16) \quad M^{ij} = (a_s^{ij, (k)(p)} u_{(k)}^s + b^{ij, (p)}) \frac{\partial^{|p|}}{\partial (x^1)^{p_1} \dots \partial (x^n)^{p_n}},$$

где $a_s^{ij, (k)(p)}$ и $b^{ij, (p)}$ – константы. Рассмотрим пространство S последовательностей $(\xi_1, \dots, \xi_N)$, $\xi_i \in C^\infty(T^n)$. Тогда для ξ и η из S имеем

$$(17) \quad (\xi, M(\eta)) \equiv \int_{T^n} \xi_i M^{ij} \eta_j d^n x = \int_{T^n} u^s [\xi, \eta]_s d^n x + \int_{T^n} \xi_i b^{ij, (p)} \eta_{j(p)} d^n x.$$

Соответственно, на пространстве S определены билинейная операция $[\cdot, \cdot]$:

$$(18) \quad (\xi, \eta) \mapsto \zeta = [\xi, \eta] \in S,$$

и билинейная форма

$$(19) \quad \omega(\xi, \eta) = \int_{T^n} \xi_i b^{ij, (p)} \eta_{j(p)} d^n x.$$

Оператор M^{ij} вида (16) кососимметричен тогда и только тогда, когда на пространстве S кососимметричны билинейная операция (18) и билинейная форма (19), т.е. $[\xi, \eta] = -[\eta, \xi]$ и $\omega(\xi, \eta) = -\omega(\eta, \xi)$. Оператор M^{ij} вида (16) гамильтонов тогда и только тогда, когда пространство S является алгеброй Ли относительно билинейной операции (18), т.е. она кососимметрична и удовлетворяет тождеству Якоби $[\xi, [\eta, \zeta]] + [\eta, [\zeta, \xi]] + [\zeta, [\xi, \eta]] = 0$, и, кроме того, билинейная форма (19) является 2-коциклом на этой алгебре Ли, т.е. она кососимметрична и удовлетворяет тождеству замкнутости

$$(20) \quad (d\omega)(\xi, \eta, \zeta) \equiv \omega([\xi, \eta], \zeta) + \omega([\eta, \zeta], \xi) + \omega([\zeta, \xi], \eta) = 0.$$

Для произвольной k -формы $\omega(a_1, \dots, a_k)$ на алгебре Ли $\mathcal{G}$, $a_i \in \mathcal{G}$, дифференциал d определяется формулой

$$(21) \quad (d\omega)(a_1, \dots, a_{k+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j+1} \omega([a_i, a_j], a_1, \dots, \hat{a}_i, \dots, \hat{a}_j, \dots, a_{k+1}),$$

при этом $d^2\omega = 0$. 2-коцикл $\omega(\xi, \eta)$, определяемый гамильтоновым оператором вида (16), *когомологичен нулю*, т.е. $\omega(\xi, \eta) = (df)(\xi, \eta) \equiv f([\xi, \eta])$, где f есть 1-форма на алгебре Ли S , тогда и только тогда, когда он может быть уничтожен сдвигом переменных $u^i \mapsto u^i - c^i$, где c^i – константы, т.е. при условии

$$(22) \quad b^{ij, (p)} = a_k^{ij, (0)(p)} c^k.$$

ПРИМЕР 2.1. Пуассоновы структуры, порождаемые алгеброй Ли векторных полей на n -мерном торе T^n .

Коммутатор векторных полей ξ и η имеет вид:

$$(23) \quad [\xi, \eta]_k = \xi_s \frac{\partial \eta_k}{\partial x^s} - \eta_s \frac{\partial \xi_k}{\partial x^s}.$$

Для соответствующего гамильтонового оператора M^{ij} получаем:

$$(24) \quad \int_{T^n} \xi_i M^{ij} \eta_j d^n x = \int_{T^n} u^k [\xi, \eta]_k d^n x = \int_{T^n} \xi_i \left(u^i \frac{\partial}{\partial x^j} + u^j \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j} \right) \eta_j d^n x,$$

$$(25) \quad M^{ij} = u^i \frac{\partial}{\partial x^j} + u^j \frac{\partial}{\partial x^i} + \frac{\partial u^i}{\partial x^j}.$$

Из соотношений леммы 2.1 следует, что все 2-коциклы на алгебре Ли векторных полей на T^n (23), которые не выводят пуассонову структуру из класса структур гидродинамического типа (4) (см. формулы (17) и (19)), являются кохомологичными нулю. При $n \leq 2$ пуассонова структура (25) является невырожденной, а при $n > 2$ все метрики в (25) вырождены.

Рассмотрим теперь первый нетривиальный случай многомерных пуассоновых структур вида (4) – двухкомпонентный случай $N = 2$.

ТЕОРЕМА 2.3 [89]. Если при $N = n = 2$ тензор T_{jk}^{i12} не равен тождественно 0, то локальной заменой переменных на многообразии невырожденная пуассонова структура (4) приводится к каноническому виду, порождаемому плоскими метриками

$$(26) \quad g^{ij1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad g^{ij2} = \begin{pmatrix} 2v & u+v \\ u+v & 2u \end{pmatrix}.$$

В частности, если одна из метрик знакоопределена, то пуассонова структура приводится к постоянной. Пуассонова структура, порождаемая каноническими метриками (26), связана с алгеброй Ли (23) двумерных векторных полей на двумерном торе T^2 .

Для пуассоновой структуры (24) препятствующий тензор $T^{ijk,12}$ не равен нулю, в частности, $T^{211,12} = -b_2^{11,2} = -1$, и, следовательно, она не приводится к постоянному виду локальными заменами переменных.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.1 [89]. Пуассонова структура, порождаемая алгеброй Ли векторных полей в T^2 :

$$\{w^i(x), w^j(y)\} = w^i(x) \delta_j(x-y) + w^j(x) \delta_i(x-y) + w_j^i(x) \delta(x-y),$$

приводится к каноническому виду локальной квадратичной заменой:

$$w^1 = \frac{1}{2}((v^1)^2 - (v^2)^2), \quad w^2 = \frac{1}{2}(v^1 + v^2).$$

Этот пример связан с двумерной эйлеровой гидродинамикой идеальной несжимаемой жидкости (с дальнейшей редукцией к бездивергентным векторным полям).

СЛЕДСТВИЕ 2.2 [89]. *Всякая двумерная двухкомпонентная невырожденная пуассонова структура гидродинамического типа либо приводится к постоянной, либо порождается алгеброй Ли векторных полей в T^2 .*

ТЕОРЕМА 2.4 [89]. *При $n > 2$ многомерные двухкомпонентные невырожденные пуассоновы структуры гидродинамического типа приводятся к двумерным унимодулярной заменой пространственных переменных x^i .*

§ 2.2. Гамильтоновы системы гидродинамического типа и метрики постоянной римановой кривизны

Рассмотрим подробнее *одномерные системы гидродинамического типа*, т.е. эволюционные квазилинейные системы уравнений в частных производных первого порядка

$$(1) \quad u_t^i = v_j^i(u) u_x^j,$$

где $v_j^i(u)$ – произвольная $N \times N$ матричная функция от $u = (u^1, \dots, u^N)$, $u^i = u^i(x, t)$, $i = 1, \dots, N$.

Б. А. Дубровин и С. П. Новиков ввели и описали класс одномерных гамильтоновых систем гидродинамического типа

$$(2) \quad u_t^i = \{u^i, H\},$$

где H – произвольный функционал гидродинамического типа, т.е.

$$(3) \quad H = \int h(u) dx,$$

а скобка Пуассона имеет вид

$$(4) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x)) \delta_x(x - y) + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \delta(x - y)$$

(скобка Дубровина–Новикова). Вид скобки Пуассона (4) не меняется при локальных заменах координат на многообразии M , при этом коэффициенты скобки преобразуются как дифференциально-геометрические объекты на M . Теорема Дубровина–Новикова дает полное описание невырожденных скобок Пуассона вида (4) (см. § 2.1). Пуассоновы структуры (4) определены на пространствах петель плоских многообразий и инвариантны относительно диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}^+(S^1)$.

Все эти гамильтоновы системы гидродинамического типа имеют естественное лагранжево происхождение. Рассмотрим следующее действие типа (1.3.1):

$$S = \int \left(\frac{1}{2} g_{ij} u_x^i u_t^j - h(u_x) \right) dx dt,$$

где (g_{ij}) – постоянная невырожденная симметричная метрика, $h(v)$ – произвольная функция. Соответствующая лагранжева система $\delta S / \delta u^i = 0$ имеет симплектическое представление вида

$$g_{ij} \frac{d}{dx} (u_t^j) = - \frac{\delta H}{\delta u^i}, \quad H = \int h(u_x) dx.$$

После преобразования $v^i(x) = u_x^i(x)$ мы получаем гамильтонову систему гидродинамического типа в плоских координатах

$$v_t^i = g^{ij} \frac{d}{dx} \frac{\delta H}{\delta v^j}, \quad H = \int h(v) dx.$$

Таким образом, действие S порождает общий класс гамильтоновых систем гидродинамического типа (записанных в плоских координатах $(v^1, \dots, v^N)$), введенных и изученных Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым [31].

Рассматриваемые гамильтоновы системы гидродинамического типа имеют вид

$$(5) \quad u_t^i = [\nabla^i \nabla_j h(u)] u_x^j,$$

где ∇ – ковариантная производная, порождаемая метрикой нулевой кривизны. С. П. Парев [137], [140] доказал, что если гамильтонова система гидродинамического типа (5) допускает инварианты Римана, т.е. матрица $v_j^i(u) = \nabla^i \nabla_j h(u)$ диагонализуема, то она интегрируема обобщенным методом годографа.

Автором данной статьи и Е. В. Ферапонтовым [111] было предложено нелокальное обобщение гамильтоновой теории одномерных систем гидродинамического типа (1), связанное с нелокальными скобками Пуассона вида

$$(6) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x)) \delta_x(x-y) + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \delta(x-y) + K u_x^i (d/dx)^{-1} u_x^j \delta(x-y), \quad K = \text{const}.$$

Для всякого гамильтониана H гидродинамического типа (3) с помощью нелокальной скобки Пуассона вида (6) мы всегда будем получать систему гидродинамического типа (1). Более того, выражение (6) является наиболее общей формой скобок Пуассона, обладающих свойством порождать системы гидродинамического типа (1) для всякого гамильтониана H гидродинамического типа (3) (при числе компонент $N > 1$; в однокомпонентном случае можно явно указать различные интегро-дифференциальные операторы произвольного порядка, обладающие этим свойством).

ЛЕММА 2.2. *Выражение (6) задает скобку Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены следующие соотношения:*

$$(7) \quad g^{ij} = g^{ji},$$

$$(8) \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b_k^{ij} + b_k^{ji},$$

$$(9) \quad g^{is} b_s^{jr} = g^{js} b_s^{ir},$$

$$(10) \quad g^{is} \left(\frac{\partial b_s^{jr}}{\partial u^k} - \frac{\partial b_k^{jr}}{\partial u^s} \right) + b_s^{ij} b_k^{sr} - b_s^{ir} b_k^{sj} = K (g^{ir} \delta_k^j - g^{ij} \delta_k^r),$$

$$(11) \quad \sum_{(k,p)} \sum_{(i,j,r)} \left[b_p^{si} \left(\frac{\partial b_k^{jr}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{jr}}{\partial u^k} \right) + K (b_k^{ij} - b_k^{ji}) \delta_p^r \right] = 0.$$

В лемме 2.2 матрица g^{ij} не предполагается невырожденной. Общие соотношения (7)–(11) получаются прямыми вычислениями из тождества Якоби и кососимметричности пуассоновой структуры. Соотношения (7) и (8) эквивалентны кососимметричности скобки (6), а соотношения (9)–(11) эквивалентны выполнению тождества Якоби для кососимметрической скобки (6).

ТЕОРЕМА 2.5 [111]. Если $\det[g^{ij}(u)] \neq 0$, то выражение (6) задает скобку Пуассона тогда и только тогда, когда

- (1) $g^{ij}(u)$ – метрика постоянной римановой кривизны K ,
- (2) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – коэффициенты римановой связности, порождаемой метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из соотношения (7) и закона преобразования коэффициентов пуассоновой структуры следует, что g^{ij} – симметричная риманова или псевдориманова метрика на многообразии. Определяя коэффициенты дифференциально-геометрической связности Γ_{jk}^i по формуле $b_k^{ij}(u) = -g^{is}\Gamma_{sk}^j(u)$, получаем, что соотношение (8) эквивалентно условию, что связность согласована с метрикой g^{ij} :

$$\nabla_k g^{ij} \equiv \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} + g^{sj}\Gamma_{sk}^i + g^{is}\Gamma_{sk}^j = 0.$$

Соотношение (9) эквивалентно симметричности связности: $T_{jk}^i \equiv \Gamma_{jk}^i - \Gamma_{kj}^i = 0$. Таким образом, Γ_{jk}^i – связность Леви-Чивита, т.е. риманова связность, порождаемая метрикой. При выполнении этих условий соотношение (10) преобразуется к следующему виду:

$$(12) \quad R_{jks}^i = K(g_{jk}\delta_s^i - g_{js}\delta_k^i),$$

где R_{jks}^i – тензор римановой кривизны. Соотношение (12) для тензора римановой кривизны означает в точности, что метрика g^{ij} – метрика постоянной римановой кривизны K . Соотношение (11) является следствием соотношений (7)–(10) в случае невырожденной метрики g^{ij} и выполняется для метрики постоянной кривизны автоматически (в случае вырожденной метрики оно нетривиально).

Отметим, что в однокомпонентном случае (при $N = 1$) условие (12) выполняется при любом значении константы K , т.е. при выполнении условия (8) выражение (6) определяет однокомпонентную пуассонову структуру при любом K . Мы не оговариваем особо этот тривиальный случай в теореме 2.5, условно считая, что однокомпонентной метрике можно приписать любую кривизну K . Интересно, что примеры уравнений Лиувилля и sine-Gordon (см. § 1.2, формулы (29), (30), (32)) различаются именно знаком “условной кривизны” K . Кроме уравнений Лиувилля и sine-Gordon и систем гидродинамического типа нелокальный оператор вида $u_x^i(d/dx)^{-1}u_x^j$ естественно возникает в гамильтоновой структуре уравнения Кричевера–Новикова (см. формулы (20)–(22) в § 1.3), в третьей гамильтоновой структуре уравнения КдВ (см. формулу (16) в § 1.3), в гамильтоновой теории магнетиков Гейзенберга (см. § 2.4).

Соответствующие невырожденным пуассоновым структурам (6) гамильтоновы системы гидродинамического типа имеют вид

$$u_t^i = [\nabla^i \nabla_j h(u) + K\delta_j^i h(u)]u_x^j,$$

где ∇ – ковариантная производная, порождаемая метрикой постоянной римановой кривизны K .

На локальных функционалах вида $F = \int f(u, u_x, \dots, u_{(k)}) dx$ пуассонова структура всегда приобретает локальное выражение, так как $u_x^i \frac{\delta F}{\delta u^i}$ является полной производной по x :

$$\int_{S^1} \frac{df}{dx} dx = \int_{S^1} u_x^i \frac{\delta F}{\delta u^i} = 0.$$

В частности, на функционалах гидродинамического типа $G_i = \int g_i(u) dx$, $i = 1, 2$, на пространстве петель ΩM многообразия M постоянной римановой кривизны K невырожденная скобка Пуассона (6) принимает следующий локальный вид:

$$\{G_1, G_2\} = \int_{S^1} (\langle \nabla g_1, \nabla_\nu \nabla g_2 \rangle + K g_2 \nabla_\nu g_1) dx,$$

где ∇ – ковариантная производная, порожаемая метрикой постоянной римановой кривизны K , $\nu = \{u_x^i\}$ – векторное поле скорости петли $\gamma(x)$, ∇_ν – ковариантная производная вдоль петли $\gamma(x)$, $\langle \nabla h, \nabla f \rangle = g^{ij} \nabla_i h \nabla_j f$ – скалярное произведение ко-векторных полей на многообразии M . Рассматриваемые нелокальные скобки Пуассона на гидродинамического типа определены на пространствах петель ΩM многообразий M постоянной римановой кривизны K и инвариантны относительно действия группы диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}^+(S^1)$.

Каноническая форма нелокальных скобок Пуассона относительно локальных замен переменных на многообразии M определяется каноническими метриками постоянной кривизны K :

$$(g^{ij}) = [\lambda(u)]^2 \begin{pmatrix} e_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & e_N \end{pmatrix},$$

$$e_i = \pm 1, \quad \lambda(u) = 1 + \frac{1}{4} K \sum_i e_i (u^i)^2.$$

Очевидно, что к постоянному виду локальными заменами координат на многообразии их привести нельзя.

Отметим, что однородные симплектические структуры первого порядка, рассматривавшиеся в гл. 1, вообще не допускают нелокальных обобщений, аналогичных (6), т.е. вида

$$\omega(\xi, \eta) = \int_{S^1} \xi^i (g_{ij}(u) \eta_x^j + b_{ijk}(u) u_x^k \eta^j + w_{is}(u) u_x^s (d/dx)^{-1} w_{jr}(u) u_x^r \eta^j) dx.$$

Если $\det[g^{ij}(u)] = 0$, то геометрическое описание нелокальных скобок Пуассона (6) очень сложное (соответствующие соотношения (7)–(11) получены автором в [105]). Полного геометрического описания не получено даже в локальном случае (при $K = 0$) – см. [66].

Пуассоновы структуры, связанные с метриками постоянной кривизны, имеют многочисленные приложения в математической физике. Приведем простейший пример уравнений газа Чаплыгина.

ПРИМЕР 2.2. Рассмотрим систему уравнений газа Чаплыгина

$$U_t = UU_x + V^{-3}V_x, \quad V_t = VU_x + UV_x.$$

Перепишем эту систему в инвариантах Римана u, v : $u_t = vu_x, v_t = uv_x$, где $u = U - 1/V, v = U + 1/V$. Эта система обладает следующими пуассоновыми структурами гидродинамического типа, порождаемыми диагональными метриками g^{ij} вида:

$$g^{11} = -[(c_1 + K) + c_2u + c_3u^2](u - v)^2, \quad g^{22} = [c_1 + c_2v + c_3v^2](u - v)^2.$$

Для любых констант c_1, c_2, c_3 получаем метрику постоянной кривизны K , порождающую соответствующую нелокальную пуассонову структуру газа Чаплыгина. При $K = 0$ получаем плоские метрики, соответствующие трем различным локальным пуассоновым структурам гидродинамического типа газа Чаплыгина. Все эти локальные и нелокальные пуассоновы структуры согласованы, т.е. образуют линейный пучок пуассоновых структур.

В [35] Е. В. Ферапонтовым классифицированы все двухкомпонентные системы гидродинамического типа, обладающие одной нелокальной и тремя локальными пуассоновыми структурами гидродинамического типа.

ПРИМЕР 2.3 [36], [49]. Рассмотрим диагональную систему гидродинамического типа

$$R_t^i = \left(\sum_{k=1}^n R^k + 2R^i \right) R_x^i,$$

которая описывает квазиклассический предел связанных уравнений Кортевега-де Вриза [2]–[4], [36], [49], [51].

Эта система обладает $n + 1$ локальной и одной нелокальной пуассоновой структурой гидродинамического типа, которые согласованы. Плоские диагональные метрики

$$(ds^a)^2 = \sum_{i=1}^n g_{ii}^a (dR^i)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\prod_{k \neq i} (R^k - R^i)}{(R^i)^a} \right) (dR^i)^2, \quad a = 0, 1, \dots, n,$$

порождают согласованные локальные пуассоновы структуры рассматриваемой системы:

$$(A^a)^{ij} = (g^a)^{ii} \delta^{ij} \frac{d}{dx} - (g^a)^{ii} \Gamma_{ik}^j R_x^k, \quad a = 0, 1, \dots, n,$$

где Γ_{ik}^j – связность Леви-Чивита, соответствующая метрике g_{ii}^a .

Оператор рекурсии $R = A^1(A^0)^{-1}$ имеет вид:

$$R = \begin{pmatrix} R^1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R^n \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} R_x^1 & R_x^1 & \dots & R_x^1 \\ R_x^2 & R_x^2 & \dots & R_x^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_x^n & R_x^n & \dots & R_x^n \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1}.$$

При этом для всех $a = 0, 1, \dots, n - 1$ выполняется рекуррентное соотношение: $A^{a+1} = RA^a$. Оператор $A^{n+1} = RA^n$ является нелокальным и имеет вид:

$$(A^{n+1})^{ij} = (g^{n+1})^{ii} \delta^{ij} \frac{d}{dx} - (g^{n+1})^{ii} \Gamma_{ik}^j R_x^k + \frac{1}{4} R_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} R_x^j,$$

где

$$g_{ii}^{n+1} = \frac{\prod_{k \neq i} (R^k - R^i)}{(R^i)^{n+1}}$$

– метрика постоянной римановой кривизны $1/4$, порождающая нелокальную пуассонову структуру A^{n+1} .

По существу, как показано в [49], при $n \geq 3$ все системы гидродинамического типа, обладающие $n + 1$ локальной и одной нелокальной пуассоновой структурой гидродинамического типа, сводятся к иерархии рассматриваемой системы, являющейся записью в инвариантах Римана квазиклассического предела связанных уравнений КдВ.

Естественное применение пуассоновы структуры, порождаемые метриками постоянной кривизны, находят в теории неоднородных систем гидродинамического типа, а также в теории магнетиков Гейзенберга (см. § 2.4).

Ряд конкретных важных примеров нелокальных скобок Пуассона гидродинамического типа (6), возникающих в математической физике, в частности, в качестве гамильтоновых структур уравнений Уизема, получаемых усреднением уравнений Кортевега–де Вриза, нелинейного уравнения Шрёдингера и уравнения sine-Gordon, впоследствии был явно описан и исследован М. В. Павловым и В. Л. Алексеевым в [1], [128], [129].

ПРИМЕР 2.4 [1]. Рассмотрим семейство диагональных метрик вида

$$(13) \quad (g_n^{ii})^{-1} = \frac{(g_0^{ii})^{-1}}{(u^i)^n}, \quad i = 1, \dots, 2g + 1, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (g_0^{ii})^{-1} = 2 \operatorname{res}_{\lambda=u^i} \left[\frac{dp}{d\lambda} \right]^2 d\lambda,$$

где dp – дифференциал квазиимпульса, возникающий в теории уравнения КдВ, т.е. абелев дифференциал второго рода на римановой поверхности

$$(14) \quad \mu^2 = \prod_{i=1}^{2g+1} (\lambda - u^i)$$

с единственным полюсом в бесконечно удаленной точке $\lambda = \infty$ вида $dp = d(-\sqrt{\lambda} + O(1))$ и с условиями нормировки

$$(15) \quad \int_{u^{2i}}^{u^{2i+1}} dp = 0, \quad i = 1, \dots, g.$$

Здесь все u^i вещественны и различны: $u^1 < u^2 < \dots < u^{2g+1}$. Все построенные метрики невырожденные. Метрики g_0^{ii} и g_1^{ii} – плоские метрики, порождающие две локальные согласованные пуассоновы структуры гидродинамического типа A_0^{ij} и A_1^{ij} уравнений Уизема, описывающих медленные модуляции g -зонных решений уравнения КдВ:

$$(16) \quad u_t^i = w^i(u^1, \dots, u^{2g+1})u_x^i, \quad i = 1, 2, \dots, 2g + 1,$$

где $w^i = dq/dp$ ($\lambda = u^i$), dq – абелев дифференциал второго рода на римановой поверхности (14) с особенностью вида $dq = d(-(\sqrt{\lambda})^3 + O(1))$ в бесконечно удаленной

точке и с нормировкой, аналогичной (15). Определяя оператор рекурсии R из соотношения $A_1^{ij} = RA_0^{ij}$, рассмотрим пуассоновы структуры $A_n^{ij} = R^n A_0^{ij}$. При $n = 2$ получим нелокальную пуассонову структуру гидродинамического типа A_2^{ij} , порождаемую метрикой g_n^{ii} постоянной римановой кривизны $-1/4$. При $n > 2$ пуассоновы структуры A_n^{ij} имеют более сложный нелокальный вид:

$$(17) \quad A_n^{ij} = g_n^{ii} \delta^{ij} \frac{d}{dx} - g_n^{ii} \Gamma_{ik}^j u_x^k - \frac{1}{4} \sum_{l=1}^{n-1} (w^l)^i u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} (w^{n-l})^j u_x^j,$$

где $(w^l)^i = ds^l/dp$ ($\lambda = u^i$), ds^l – абелев дифференциал второго рода на римановой поверхности (14) с особенностью вида $ds^l = d(-(\sqrt{\lambda})^{2l-1} + O(1))$ и с нормировкой, аналогичной (15).

Дифференциальная геометрия нелокальных пуассоновых структур типа (17), являющихся обобщением нелокальных пуассоновых структур гидродинамического типа, изучена Е. В. Ферапонтовым в [36].

ТЕОРЕМА [36]. *Выражение*

$$(18) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x)) \delta_x(x-y) + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \delta(x-y) + w_k^i(u) u_x^k (d/dx)^{-1} w_s^j(u) u_x^s \delta(x-y), \quad \det[g^{ij}(u)] \neq 0,$$

определяет скобку Пуассона тогда и только тогда, когда

- (1) $b_k^{ij}(u) = -g^{is} \Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – коэффициенты дифференциально-геометрической связности, порождаемой симметричной (псевдоримановой) метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита),
- (2) метрика $g_{ij}(u)$ (с нижними индексами) и аффиноры $w_j^i(u)$ удовлетворяют соотношениям Гаусса–Петерсона–Кодацци:

$$(19) \quad g_{ik} w_j^k = g_{jk} w_i^k, \quad \nabla_k w_j^i = \nabla_j w_k^i, \quad R_{kl}^{ij} = w_k^i w_l^j - w_k^j w_l^i,$$

где $R_{kl}^{ij} \equiv g^{is} R_{skl}^j$ – тензор римановой кривизны.

Таким образом, классические соотношения Гаусса–Петерсона–Кодацци для гиперповерхностей M псевдоевклидова пространства E^{N+1} эквивалентны кососимметричности и выполнению тождества Якоби для нелокальной скобки Пуассона (18). При этом метрика g_{ij} – первая квадратичная форма гиперповерхности M , а аффиноры w_j^i – ее оператор Вейнгартена. Скобки Дубровина–Новикова соответствуют гиперплоскостям в E^{N+1} . Оператор Вейнгартена при этом обращается в нуль. В случае гиперболы радиуса 1 оператор Вейнгартена $w_j^i = \delta_j^i$, и мы получаем нелокальные скобки (6).

Важно отметить, что в случае скобок Пуассона (18), в отличие от (6), необходимо специально описывать класс гамильтонианов H гидродинамического типа (3), порождающих системы гидродинамического типа (1), – это условие выполняется далеко не для всех из них: функционал $H = \int h(u) dx$ должен быть интегралом системы $u_t^i = w_j^i(u) u_x^j$, где $w_j^i(u)$ – аффиноры из (13) (см. [36]).

Дальнейшее нелокальное обобщение скобок Дубровина–Новикова (4) приводит к N -мерным поверхностям с плоской нормальной связностью, вложенным в псевдоевклидово пространство E^{N+L} [36]. Напомним, что N -мерная поверхность M в псевдоевклидовом пространстве E^{N+L} называется *поверхностью с плоской нормальной связностью*, если она допускает оснащение полем единичных нормалей $\vec{n}^\alpha$, $\alpha = 1, \dots, L$, таких, что $d\vec{n}^\alpha \in TM$.

ТЕОРЕМА [36]. *Выражение*

$$(20) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta_x(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta(x-y) + \sum_{\alpha=1}^L (w^\alpha)_k^i(u)u_x^k(d/dx)^{-1}(w^\alpha)_s^j(u)u_x^s\delta(x-y), \quad \det[g^{ij}(u)] \neq 0,$$

определяет скобку Пуассона тогда и только тогда, когда

- (1) $b_k^{ij}(u) = -g^{is}\Gamma_{sk}^j(u)$, где $\Gamma_{sk}^j(u)$ – коэффициенты дифференциально-геометрической связности, порождаемой симметричной (псевдоримановой) метрикой $g^{ij}(u)$ (связность Леви-Чивита),
- (2) псевдориманова метрика $g_{ij}(u)$ (с нижними индексами) и набор аффиноров $(w^\alpha)_j^i(u)$ удовлетворяют соотношениям:

$$(21) \quad g_{ik}(w^\alpha)_j^k = g_{jk}(w^\alpha)_i^k, \quad \nabla_k(w^\alpha)_j^i = \nabla_j(w^\alpha)_k^i, \quad \alpha = 1, \dots, L,$$

$$R_{kl}^{ij} = \sum_{\alpha=1}^L \{ (w^\alpha)_k^i (w^\alpha)_l^j - (w^\alpha)_l^j (w^\alpha)_k^i \}.$$

Кроме того, семейство аффиноров w^α – коммутативное: $[w^\alpha, w^\beta] = 0$.

Соотношения (16) – это не что иное, как уравнения Гаусса–Петерсона–Кодаши для N -мерных поверхностей M с плоской нормальной связностью в псевдоевклидовом пространстве E^{N+L} . При этом g_{ij} – первая квадратичная форма поверхности M , а w^α – операторы Вейнгартена, отвечающие полю нормалей $\vec{n}^\alpha$.

Все локальные и нелокальные скобки Пуассона гидродинамического типа, рассмотренные в данном параграфе, всегда определены на пространствах петель ΩM соответствующих многообразий M (в частности, для (6) это многообразия постоянной кривизны K , для (18) это произвольные гиперповерхности в псевдоевклидовом пространстве E^{N+1} , для (20) это произвольные поверхности с плоской нормальной связностью, вложенные в псевдоевклидово пространство E^{N+L}), и все они инвариантны относительно действия группы диффеоморфизмов окружности $\text{Diff}^+(S^1)$.

В следующем параграфе мы рассмотрим также неоднородное обобщение локальных и нелокальных пуассоновых структур гидродинамического типа.

§ 2.3. Неоднородные гамильтоновы системы гидродинамического типа

Рассмотрим неоднородные многомерные системы гидродинамического типа

$$(1) \quad u_t^i = v_j^{\alpha i}(u) \frac{\partial u^j}{\partial x^\alpha} + f^i(u).$$

Неоднородные локальные многомерные пуассоновы структуры гидродинамического типа определяются формулой

$$(2) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij\alpha}(u(x))\delta_{x^\alpha}(x-y) + b_k^{ij\alpha}(u(x))u_{x^\alpha}^k\delta(x-y) + \omega^{ij}(u(x))\delta(x-y).$$

ЛЕММА 2.3. *Выражение (2) задает пуассонову структуру тогда и только тогда, когда правая часть является суммой однородной многомерной пуассоновой структуры гидродинамического типа (см. формулу (2.1.4) в § 2.1) и классической конечномерной пуассоновой структуры $\omega^{ij}(u)$, которые согласованы, т.е. выполнены следующие условия согласованности этих пуассоновых структур:*

$$(3) \quad \Phi^{ijk, \alpha} = \Phi^{kij, \alpha},$$

где

$$(4) \quad \begin{aligned} \Phi^{ijk, \alpha} &= g^{is\alpha} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} - b_s^{ij\alpha} \omega^{sk} - b_s^{ik\alpha} \omega^{js}, \\ \frac{\partial \Phi^{ijk, \alpha}}{\partial u^r} &= \sum_{(i,j,k)} \left[b_r^{is\alpha} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} + \left(\frac{\partial b_r^{ij\alpha}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_r^{is\alpha}}{\partial u^j} \right) \omega^{sk} \right]. \end{aligned}$$

В лемме 2.3 не предполагается невырожденности метрик. Для однородной многомерной пуассоновой структуры гидродинамического типа, входящей в (2), должны быть выполнены соотношения (2.1.5)–(2.1.11), а для конечномерной пуассоновой структуры $\omega^{ij}(u)$ – классические соотношения

$$(5) \quad \omega^{ij} = -\omega^{ji},$$

$$(6) \quad \omega^{is} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} + \omega^{js} \frac{\partial \omega^{ki}}{\partial u^s} + \omega^{ks} \frac{\partial \omega^{ij}}{\partial u^s} = 0.$$

ЛЕММА 2.4. *Если метрики $g^{ij\alpha}$ – невырожденные, то условия согласованности (3) и (4) приобретают следующий вид:*

$$(7) \quad \nabla^i, \alpha \omega^{jk} + \nabla^j, \alpha \omega^{ik} = 0,$$

$$(8) \quad \nabla_s^\alpha \nabla_k^\alpha \omega^{ij} = 0,$$

где ∇_s^α – ковариантная производная, порожденная метрикой $g^{ij\alpha}$.

Таким образом, условия согласованности приобретают ясный дифференциально-геометрический смысл: в частности, условие (7) в точности означает, что кососимметрический тензор $\omega^{ij}(u)$ является бивектором Киллинга для каждой из плоских римановых или псевдоримановых метрик $g^{ij\alpha}$.

Напомним, что кососимметрический тензор $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}$ на римановом или псевдоримановом многообразии (M, g_{ij}) называется *тензором Киллинга*, если он удовлетворяет соотношению

$$\nabla_k \xi_{i i_2 \dots i_p} + \nabla_i \xi_{k i_2 \dots i_p} = 0,$$

где ∇_i – риманова связность, порождаемая метрикой.

Тензоры Киллинга выделяются следующим свойством: для кососимметрического тензора $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}$ величина $\xi_{i_2 \dots i_p} u_x^i$ остается ковариантно постоянной вдоль любой геодезической $u^i(x)$ на многообразии M тогда и только тогда, когда тензор $\xi_{i_1 i_2 \dots i_p}$ является тензором Киллинга.

Действительно, если $u^i(x)$ – произвольная геодезическая на многообразии M , то

$$\nabla_k(\xi_{ii_2\dots i_p}u_x^i) = \frac{1}{2}(\nabla_k\xi_{ii_2\dots i_p} + \nabla_i\xi_{ki_2\dots i_p})u_x^i u_x^k = 0.$$

В частности, при $p = 1$ получаем классические векторы Киллинга.

Тензоры Киллинга обладают также следующим фундаментальным свойством: тензор ковариантной производной $\nabla_k\xi_{i_1i_2\dots i_p}$ кососимметричен по всем индексам. Произвольные кососимметрические тензоры, ковариантная производная которых также является кососимметрическим тензором, впервые были рассмотрены С. Бохнером (см. [10], [149], [151]). Нас в дальнейшем будут интересовать контравариантные бивекторы Киллинга b^{ij} с индексами, поднятыми вверх с помощью соответствующих метрик.

Бивекторы Киллинга на римановом или псевдоримановом многообразии (M, g_{ij}) , являющиеся одновременно бивекторами Пуассона, будем называть *бивекторами Киллинга–Пуассона*.

ТЕОРЕМА 2.6. *Ультралокальная пуассонова структура $\omega^{ij}(u)$ согласована с невырожденной многомерной однородной пуассоновой структурой гидродинамического типа (2.1.4) тогда и только тогда, когда она является бивектором Киллинга–Пуассона для каждой из метрик $g^{ij\alpha}$.*

Благодаря леммам 2.3 и 2.4 достаточно доказать, что соотношение (8) выполняется для бивекторов Киллинга на соответствующих плоских многообразиях. Действительно,

$$\begin{aligned}\nabla^{k,\alpha}\nabla^{s,\alpha}\omega^{ij} &= -\nabla^{k,\alpha}\nabla^{i,\alpha}\omega^{sj} = -\nabla^{i,\alpha}\nabla^{k,\alpha}\omega^{sj} = \nabla^{i,\alpha}\nabla^{s,\alpha}\omega^{kj} \\ &= \nabla^{s,\alpha}\nabla^{i,\alpha}\omega^{kj} = -\nabla^{s,\alpha}\nabla^{k,\alpha}\omega^{ij} = -\nabla^{k,\alpha}\nabla^{s,\alpha}\omega^{ij},\end{aligned}$$

откуда немедленно следует, что $\nabla_k^\alpha\nabla_s^\alpha\omega^{ij} = 0$. Мы воспользовались тем, что в нашем случае все ковариантные производные ∇_k^α порождены плоскими метриками $g^{ij\alpha}$. Так как все метрики $g^{ij\alpha}$ – плоские, то мы можем рассмотреть координаты w^i , в которых одна из метрик, скажем g^{ij1} , постоянна. В этих плоских координатах все символы Кристоффеля Γ_{jk}^{i1} равны нулю. Из условия (8) немедленно следует, что бивектор ω^{ij} в этих координатах линеен:

$$(9) \quad \omega^{ij} = c_k^{ij}w^k + f^{ij},$$

где c_k^{ij} и f^{ij} – константы. Из условий (5) и (6) следует, что c_k^{ij} – структурные константы N -мерной алгебры Ли

$$(10) \quad [e^i, e^j] = c_k^{ij}e^k,$$

$f(e^i, e^j) = f^{ij}$ – 2-коцикл на этой алгебре Ли, т.е. выполняются соотношения

$$(11) \quad f^{ij} = -f^{ji} \quad (\text{кососимметричность}),$$

$$(12) \quad \begin{aligned}(df)(e^i, e^j, e^k) &\equiv f([e^i, e^j], e^k) + f([e^k, e^i], e^j) + f([e^j, e^k], e^i) \\ &= c_s^{ij}f^{sk} + c_s^{ki}f^{sj} + c_s^{jk}f^{si} = 0 \quad (\text{замкнутость}).\end{aligned}$$

Кроме того, на алгебре Ли (10) задана невырожденная билинейная форма $\langle e^i, e^j \rangle = g^{ij1}$, удовлетворяющая соотношениям

$$(13) \quad \langle e^i, e^j \rangle = \langle e^j, e^i \rangle,$$

$$(14) \quad \langle [e^i, e^j], e^k \rangle = \langle e^i, [e^j, e^k] \rangle.$$

Соотношение (14) эквивалентно соотношению (7): $g^{ks}c_s^{ij} + g^{is}c_s^{kj} = 0$. Условия (13) и (14) означают, что на алгебре Ли (10) определена *инвариантная симметричная билинейная форма* $\langle e^i, e^j \rangle$.

В одномерном случае других условий на алгебру Ли (10) нет. Отметим, что условие согласованности произвольного *бивектора Ли–Пуассона* (9), т.е. линейного по координатам бивектора Пуассона, с постоянной скобкой Пуассона гидродинамического типа означает, в точности, что метрика этой скобки Пуассона является инвариантной на алгебре Ли (10). Важно отметить, что, как следует из леммы 2.3, это верно и в случае вырожденной метрики. Линейные неоднородные пуассоновы структуры гидродинамического типа с вырожденными метриками часто встречаются в приложениях (в частности, см. далее примеры 2.5 и 2.6).

Таким образом, любая конечномерная алгебра Ли с невырожденным симметричным инвариантным скалярным произведением и произвольный 2-коцикл на ней порождают локальную неоднородную одномерную пуассонову структуру гидродинамического типа и, следовательно, полностью описывают бивекторы Киллинга–Пуассона на плоских римановых или псевдоримановых многообразиях.

В частности, любая полупростая алгебра Ли определяет невырожденную одномерную неоднородную локальную пуассонову структуру гидродинамического типа. В качестве g^{ij1} можно взять метрику Киллинга, которая в этом случае невырождена и удовлетворяет условиям (13) и (14). Соответствующие пуассоновы структуры соответствуют классу алгебр Каца–Мули (см. [68]).

Рассмотрим пространство S последовательностей $\xi(x) = (\xi_1(x), \dots, \xi_N(x))$, $\xi_i(x) \in C^\infty(S^1)$. Определим коммутатор на S :

$$(15) \quad [\xi(x), \eta(x)]_k = c_k^{ij} \xi_i(x) \eta_j(x),$$

где c_k^{ij} – структурные константы N -мерной алгебры Ли $\mathcal{G}$, $[e^i, e^j] = c_k^{ij} e^k$. Коммутатор (15) превращает пространство S в бесконечномерную алгебру Ли, а именно, *алгебру петель* $\widetilde{\mathcal{G}}_{S^1}$. Для любой полупростой алгебры Ли $\mathcal{G}$ метрика Киллинга $\langle e^i, e^j \rangle_K = g^{ij}$ определяет некогомологичный нулю 2-коцикл h на алгебре петель $\widetilde{\mathcal{G}}_{S^1}$:

$$(16) \quad h(\xi(x), \eta(x)) = \int_{S^1} \langle \xi(x), \eta'(x) \rangle_K dx = \int_{S^1} g^{ij} \xi_i \eta'_j dx,$$

где $\eta' = d\eta/dx$.

Этот 2-коцикл $h(\xi, \eta)$ порождает нетривиальное центральное расширение $\widehat{\mathcal{G}}$ алгебры петель $\widetilde{\mathcal{G}}_{S^1}$. Все получаемые таким образом расширенные алгебры $\widehat{\mathcal{G}}$ (они являются алгебрами Каца–Мули [68]) задают важный класс неоднородных локальных пуассоновых структур гидродинамического типа. Действительно, оператор M^{ij} , однозначно определяемый соотношением

$$(17) \quad \int_{S^1} \eta_i(x) (M^{ij} \xi_j(x)) dx = \int_{S^1} w^k(x) [\xi(x), \eta(x)]_k dx + h(\xi(x), \eta(x)),$$

гамильтонов.

Одномерные неоднородные локальные пуассоновы структуры гидродинамического типа были рассмотрены Б. А. Дубровиным и С. П. Новиковым [32] (см. также [33], [34], [120], в [32], [34], [120] имеется неточность в описании одномерных неоднородных локальных скобок Пуассона гидродинамического типа (2), исправленная в [33]).

В следующем параграфе мы рассмотрим нелокальное обобщение этих результатов.

Приведем некоторые примеры неоднородных систем гидродинамического типа.

ПРИМЕР 2.5. Уравнения N -волн [122] являются гамильтоновой неоднородной системой гидродинамического типа и всегда обладают локальной пуассоновой структурой вида (2). В частности, при $N = 3$ пуассонова структура порождается простейшей аффинной алгеброй Каца–Мули $\widehat{sl}(2)$, и уравнения трехволнового взаимодействия

$$(18) \quad \begin{cases} u_t^1 + v_1 u_x^1 = -2(v_2 - v_3)u^2 u^3, \\ u_t^2 + v_2 u_x^2 = 2(v_3 - v_1)u^1 u^3, \\ u_t^3 + v_3 u_x^3 = 2(v_1 - v_2)u^1 u^2, \end{cases}$$

где $v_i, i = 1, 2, 3$, – константы, представляются в следующем гамильтоновом виде:

$$(19) \quad u_t^i = M^{ij} \frac{\delta H}{\delta u^j},$$

где H – квадратичный гамильтониан

$$(20) \quad H = -\frac{1}{2} \int [v_1 (u^1)^2 - v_2 (u^2)^2 - v_3 (u^3)^2] dx,$$

а M^{ij} – гамильтонов оператор

$$(21) \quad (M^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & -2u^3(x) & 2u^2(x) \\ 2u^3(x) & 0 & 2u^1(x) \\ -2u^2(x) & -2u^1(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Гамильтонов оператор (21) однозначно определяется соотношением (17) по простой алгебре Ли $sl(2)$ в подходящем базисе $\{e^i\}$:

$$(22) \quad [e^1, e^2] = -2e^3, \quad [e^1, e^3] = 2e^2, \quad [e^2, e^3] = 2e^1,$$

метрика Киллинга в этом базисе имеет вид $\langle e^i, e^j \rangle_K = g^{ij}$,

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Уравнения трех волн (18) потребуются нам в гл. 3 при изучении уравнений ассоциативности двумерной топологической теории поля.

В конкретных примерах часто встречаются пуассоновы структуры гидродинамического типа с вырожденными метриками, геометрия которых недостаточно изучена

(общие соотношения см. в лемме 2.3). Например, пуассонова структура для вещественной редукции системы двухволнового взаимодействия $u_t^1 = au^1u^2$, $u_t^2 - au_x^2 = (u^1)^2$ задается двумерной алгеброй Ли $[e^1, e^2] = e^1$ и вырожденным 2-коциклом на ее алгебре петель:

$$(M^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & u^1(x) \\ -u^1(x) & 0 \end{pmatrix},$$

а гамильтониан H квадратичен:

$$H = -\frac{1}{2} \int [(u^1)^2 - a(u^2)^2] dx.$$

Другой важный пример с вырожденной и невырожденной метриками дает уравнение КдВ.

ПРИМЕР 2.6. *Уравнение Кортевега–де Вриза.*

Рассмотрим уравнение КдВ в виде неоднородной системы гидродинамического типа – как эволюционную систему относительно пространственной переменной x :

$$(23) \quad u_x^1 = u^2, \quad u_x^2 = u^3, \quad u_x^3 = -u_t^1 + 6u^1u^2.$$

В работе [138] показано, что система КдВ (23) является гамильтоновой по отношению к некоторым неоднородным пуассоновым структурам гидродинамического типа, которые фактически индуцированы хорошо известными пуассоновыми структурами Магри и Гарднера–Захарова–Фаддеева для уравнения КдВ. В работе автора [92] было показано, что первая пуассонова структура системы КдВ (23) порождается простейшей бесконечномерной аффинной алгеброй Каца–Мули $\widehat{sl}(2)$, т.е. совпадает с пуассоновой структурой уравнений трех волн, а вторая порождается единственной трехмерной нильпотентной (неабелевой) алгеброй Ли (это алгебра Ли типа 2 по классификации Бьянки всех трехмерных алгебр Ли) и 2-коциклом на ее алгебре токов.

Действительно, система КдВ (23) имеет следующее гамильтоново представление:

$$(24) \quad u_x^i = \{u^i, H\}, \quad H = -\frac{1}{2} \int [3(u^1)^2 - u^3] dt,$$

где неоднородная пуассонова структура гидродинамического типа, ассоциированная со скобкой Магри для уравнения КдВ (см. [138]), нелинейна по полевым переменным u^i :

$$(25) \quad \{u^i(t), u^j(t')\} = g^{ij}(u(t))\delta_t(t-t') + b_k^{ij}(u(t))u_t^k\delta(t-t') + \omega^{ij}(u(t)),$$

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 8u^1(t) \end{pmatrix},$$

$$(26) \quad (b_k^{ij}u_t^k) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4u_t^1 \end{pmatrix},$$

$$(27) \quad (\omega^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 2u^1(t) & 2u^2(t) \\ -2u^1(t) & 0 & -12(u^1(t))^2 + 2u^3(t) \\ -2u^2(t) & 12(u^1(t))^2 - 2u^3(t) & 0 \end{pmatrix}.$$

После локальной квадратичной унимодулярной замены переменных, найденной автором в [92]:

$$(28) \quad u^1 = (w^1 - w^3)/\sqrt{2}, \quad u^2 = w^2, \quad u^3 = (w^1 + w^3)/\sqrt{2} + (w^1 - w^3)^2,$$

система Кортевега–де Вриза (23) приобретает вид (см. [92])

$$(29) \quad w_x^i = M^{ij}(t) \frac{\delta H}{\delta w^j},$$

гамильтониан H – квадратичный:

$$(30) \quad H = - \int [(w^1 - w^3)^2 - \sqrt{2}(w^1 + w^3)] dt,$$

$$(31) \quad (M^{ij}(t)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + \begin{pmatrix} 0 & -2w^3(t) & 2w^2(t) \\ 2w^3(t) & 0 & 2w^1(t) \\ -2w^2(t) & -2w^1(t) & 0 \end{pmatrix},$$

где $M^{ij}(t)$ – пуассонова структура, порождаемая алгеброй Каца–Мули $\widehat{sl}(2)$.

Вторая неоднородная пуассонова структура гидродинамического типа для системы КдВ (23) согласована с первой, но является вырожденной и имеет вид:

$$(32) \quad (M_2^{ij}(t)) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dt} + (w^1 - w^3) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

здесь метрика $g^{ij}(w)$ – вырожденная. Пуассонова структура (32) ассоциирована со скобкой Гарднера–Захарова–Фаддеева для уравнения КдВ и порождается трехмерной нильпотентной неабелевой алгеброй Ли $\mathcal{G}_0$, некогомологичным нулю 2-коциклом и вырожденной инвариантной симметричной билинейной формой на ней. Алгебра Ли $\mathcal{G}_0$ является алгеброй Ли типа 2 по классификации Бьянки трехмерных алгебр Ли (см. [34]) и известна также тем, что любая нильпотентная неабелева алгебра Ли содержит подалгебру, изоморфную $\mathcal{G}_0$.

Соответственно, второе гамильтоново представление для системы КдВ (23) имеет вид:

$$w_x^i = M_2^{ij}(t) \frac{\delta H}{\delta w^j},$$

где H – квадратичный гамильтониан:

$$(33) \quad H = -\frac{1}{2} \int [(w^1)^2 - (w^2)^2 - (w^3)^2] dt = -\frac{1}{2} \int \langle w, w \rangle_K dt.$$

Любопытно, что у системы КдВ (23) нет других интегралов гидродинамического типа, кроме гамильтонианов (30) и (33).

Рассмотрим еще одну неоднородную систему гидродинамического типа, проинтегрированную Ф. Калоджеро в [14] и независимо возникшую недавно в работе Е. И. Ганжи [55] при изучении неоднородных систем гидродинамического типа с постоянными характеристическими скоростями, обладающих высшим законом сохранения первого порядка:

$$(34) \quad u_t^i = a^i u_x^i + u^i \sum_k (a^i - a^k) u^k,$$

где $a^i \neq a^j$, при $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, N$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.2. Система (34) преобразованием по решению и заменами переменных приводится к однородной диагональной полугамильтоновой системе гидродинамического типа, интегрируемой методом обобщенного годографа.

Прежде всего, введем новые полевые переменные $w^i(x)$: $u^i = e^{w^i}$.

Тогда система (34) принимает следующий вид:

$$(35) \quad w_t^i = a^i w_x^i + \sum_k (a^i - a^k) e^{w^k}.$$

Рассмотрим так называемые преобразования по решению для системы (35), или, другими словами, преобразования независимых переменных x и t вида

$$(36) \quad dx' = \varphi_1(x, t, w) dx - \psi_1(x, t, w) dt, \quad dt' = \varphi_2(x, t, w) dx - \psi_2(x, t, w) dt,$$

где

$$(37) \quad \frac{\partial \varphi_i(x, t, w)}{\partial t} + \frac{\partial \psi_i(x, t, w)}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \quad \Delta = \varphi_1 \psi_2 - \varphi_2 \psi_1 \neq 0.$$

Здесь $w^i(x, t)$ – произвольные решения системы (35), а $\varphi_i, \psi_i, i = 1, 2$, – плотности законов сохранения и соответствующих токов (37) системы (35).

Рассмотрим два следующих закона сохранения системы (35):

- 1) $\varphi_1 = -\sum_k e^{w^k}, \psi_1 = \sum_k a^k e^{w^k};$
- 2) $\varphi_2 = 0, \psi_2 = 1.$

Используя соотношения $w_x^i = w_{x'}^i \varphi_1 + w_{t'}^i \varphi_2$, $w_t^i = -w_{x'}^i \psi_1 - w_{t'}^i \psi_2$, после соответствующих преобразований по решению (36)–(37) мы получаем следующую неоднородную систему гидродинамического типа:

$$(38) \quad w_{t'}^i = \left(\sum_k (a^i - a^k) e^{w^k} \right) (w_{x'}^i - 1).$$

После элементарных преобразований $v^i = w^i - x', x'' = -e^{-x'}$ мы получаем диагональную полугамильтонову однородную систему гидродинамического типа, которая по теореме Царева интегрируется обобщенным методом годографа [140]:

$$(39) \quad v_{t'}^i = \left(\sum_k (a^i - a^k) e^{v^k} \right) v_{x''}^i.$$

§ 2.4. Бивекторы Киллинга–Пуассона на пространствах постоянной римановой кривизны и бигамильтонова структура обобщенных магнетиков Гейзенберга

Рассмотрим теперь *нелокальные неоднородные одномерные пуассоновы структуры гидродинамического типа*

$$(1) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x)) \delta_x(x-y) + b_k^{ij}(u(x)) u_x^k \delta(x-y) + K u_x^i (d/dx)^{-1} u_x^j \delta(x-y) + \omega^{ij}(u(x)) \delta(x-y).$$

Пуассоновы структуры вида (1) для произвольного гамильтониана гидродинамического типа также всегда порождают неоднородные системы гидродинамического типа.

ЛЕММА 2.5. *Выражение (1) задает пуассонову структуру тогда и только тогда, когда она является суммой двух согласованных пуассоновых структур: нелокальной скобки Пуассона гидродинамического типа (2.2.6) и классического бивектора Пуассона $\omega^{ij}(u)$ на многообразии – ультралокальной скобки Пуассона*

$$(2) \quad \{u^i(x), u^j(x)\} = \omega^{ij}(u(x))\delta(x-y),$$

условия согласованности которых имеют вид

$$(3) \quad \Phi^{ijk, \alpha} = \Phi^{kij, \alpha},$$

где

$$(4) \quad \begin{aligned} \Phi^{ijk} &= g^{is} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} - b_s^{ij} \omega^{sk} - b_s^{ik} \omega^{js}, \\ \frac{\partial \Phi^{ijk}}{\partial u^r} &= \sum_{(i,j,k)} \left[b_r^{si} \frac{\partial \omega^{jk}}{\partial u^s} + \left(\frac{\partial b_r^{ij}}{\partial u^s} - \frac{\partial b_s^{ij}}{\partial u^r} \right) \omega^{sk} + K \omega^{ij} \delta_r^k \right]. \end{aligned}$$

В лемме 2.3 невырожденность метрики не предполагается.

ЛЕММА 2.6. *Если метрика g^{ij} в (1) является невырожденной, то условия согласованности (3) и (4) приобретают следующий вид:*

$$(5) \quad \nabla^i \omega^{jk} + \nabla^j \omega^{ik} = 0,$$

$$(6) \quad \nabla_r \nabla^i \omega^{jk} = \sum_{(i,j,k)} (-K \omega^{ij} \delta_r^k),$$

где ∇^i – ковариантная производная, порожденная метрикой g^{ij} .

ТЕОРЕМА 2.7. *Пуассоновы структуры (2.2.6) и (2) согласованы тогда и только тогда, когда $\omega^{ij}(u)$ является бивектором Киллинга–Пуассона на многообразии (M, g^{ij}) постоянной римановой кривизны K .*

ТЕОРЕМА 2.8. *Для $N = 2$ тензор $\omega^{ij}(u)$ является тензором Киллинга–Пуассона на многообразии (M, g_{ij}) постоянной римановой кривизны K тогда и только тогда, когда в канонических координатах (u^1, u^2)*

$$(7) \quad (\omega^{ij}(u)) = c\lambda^2(u) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

где c – произвольная постоянная.

Каждый бивектор Киллинга–Пуассона $\omega^{ij}(u)$ на многообразии (M, g_{ij}) постоянной римановой кривизны K определяет пару согласованных пуассоновых структур

$$(8) \quad M_1^{ij} = g^{ij}(u) \frac{d}{dx} - g^{is}(u) \Gamma_{sk}^j(u) u_x^k + K u_x^i \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} u_x^j,$$

$$(9) \quad M_2^{ij} = \omega^{ij}(u),$$

порождающих интегрируемую иерархию N -компонентных магнетиков Гейзенберга

$$(10) \quad S_t = [S, S_{xx}], \quad S^2 = 1,$$

где $S = (S^1, \dots, S^{N+1})$, $[\cdot, \cdot]$ – коммутатор в соответствующей $(N+1)$ -мерной алгебре Ли.

Классический магнетик Гейзенберга отвечает случаю двумерной сферы ($N = 2$). Для $S^{1^2} + S^{2^2} + S^{3^2} = 1$ в координатах стереографической поверхности

$$S^1 = u^1/P, \quad S^2 = u^2/P, \quad S^3 = (P-1)/P,$$

где $P = ((u^1)^2 + (u^2)^2 + 1)/2$, а метрика имеет вид

$$(g_{ij}) = \frac{1}{P^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нелокальная пуассонова структура (8), порождаемая метрикой, имеет вид

$$(11) \quad M_1 = P^2 \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} + P \begin{pmatrix} u^1 u_x^1 + u^2 u_x^2 & u^1 u_x^2 - u^2 u_x^1 \\ u^2 u_x^1 - u^1 u_x^2 & u^1 u_x^1 + u^2 u_x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_x^1 d^{-1} \circ u_x^1 & u_x^1 d^{-1} \circ u_x^2 \\ u_x^2 d^{-1} \circ u_x^1 & u_x^2 d^{-1} \circ u_x^2 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с теоремой 2.8 единственный (с точностью до постоянного множителя) бивектор Киллинга–Пуассона на двумерной сфере в этих координатах имеет вид

$$(12) \quad M_2 = (\omega^{ij}(u)) = \begin{pmatrix} 0 & -P^2 \\ P^2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Следуя теперь обычной бигамильтоновой схеме и применяя оператор рекурсии $R = M_1(M_2)^{-1}$ к системе трансляций по x , получаем систему

$$\begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t = R \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_x,$$

или

$$(13) \quad \begin{cases} u_t^1 = u_{xx}^2 + (u^2(u_x^1)^2 - 2u^1 u_x^1 u_x^2 - u^2(u_x^2)^2)/P, \\ u_t^2 = -u_{xx}^1 - (u^1(u_x^2)^2 - 2u^2 u_x^1 u_x^2 - u^1(u_x^1)^2)/P, \end{cases}$$

совпадающую с классическим магнетиком Гейзенберга $\vec{S}_t = \vec{S} \times \vec{S}_{xx}$, $\vec{S}^2 = 1$. Соответствующее бигамильтоново представление имеет вид

$$(14) \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \end{pmatrix}_t = M_1 \begin{pmatrix} \delta G / \delta u^1 \\ \delta G / \delta u^2 \end{pmatrix} = M_2 \begin{pmatrix} \delta H / \delta u^1 \\ \delta H / \delta u^2 \end{pmatrix},$$

где

$$(15) \quad G = \int \frac{u^2 u_x^1 - u^1 u_x^2}{(2P-1)P} dx, \quad H = \frac{1}{2} \int \frac{(u_x^1)^2 + (u_x^2)^2}{P^2} dx.$$

Бивектор (12) является результатом ограничения на двумерную сферу бивектора Ли–Пуассона

$$(16) \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & S^3 & -S^2 \\ -S^3 & 0 & S^1 \\ S^2 & -S^1 & 0 \end{pmatrix},$$

заданного в евклидовом пространстве с координатами S^1, S^2, S^3 .

Автором и Е. В. Ферапонтовым в [112] найдено общее описание бивекторов Киллинга–Пуассона на пространствах постоянной римановой кривизны. Приведем здесь эти результаты для N -мерной сферы. Пусть c_k^{ij} – структурные константы некоторой $(N+1)$ -мерной алгебры Ли $[e^i, e^j] = c_k^{ij} e^k$, $i, j, k = 1, \dots, N+1$, удовлетворяющие соотношениям

$$(17) \quad c_k^{ij} + c_i^{kj} = 0,$$

т.е. на этой алгебре Ли задано инвариантное скалярное произведение

$$\langle [e^i, e^j], e^k \rangle = \langle e^i, [e^j, e^k] \rangle,$$

имеющее в выбранной системе координат стандартный евклидов вид $\langle e^i, e^j \rangle = \delta^{ij}$.

Введем в рассмотрение кососимметричный бивектор Ли–Пуассона $\Omega^{ij} = c_k^{ij} S^k$ и ограничим его на N -мерную сферу $\sum_{k=1}^{N+1} (S^k)^2 = 1$. Благодаря соотношениям (17) такое ограничение возможно. Приведем явный вид бивектора ω^{ab} , $a, b = 1, \dots, N$, полученного ограничением бивектора Ли–Пуассона $\Omega^{ij} = c_k^{ij} S^k$ на N -мерную сферу в координатах $u^1, \dots, u^N$ стереографической проекции

$$(18) \quad S^1 = u^1/P, \dots, S^N = u^N/P, \quad S^{N+1} = (P-1)/P, \quad P = \frac{1}{2} \left(\sum_{a=1}^N (u^a)^2 + 1 \right),$$

$$(19) \quad \omega^{ab} = P \sum_{s=1}^N (c_{N+1}^{sa} u^s u^b - c_{N+1}^{sb} u^s u^a + c_s^{ab} u^s) + c_{N+1}^{ab} (P-1)P.$$

Бивектор ω^{ab} является бивектором Киллинга–Пуассона на N -мерной сфере. Это следует из того, что Ω^{ij} является бивектором Киллинга–Пуассона объемлющего евклидова пространства, снабженного соответствующей плоской связностью. Более того, всякий бивектор Киллинга–Пуассона на N -мерной сфере получается описанной конструкцией из некоторой алгебры Ли с инвариантным евклидовым скалярным произведением [112]. В частности, бивектор Киллинга–Пуассона (12) на двумерной сфере связан с алгеброй Ли $SO(3)$.

Согласованные пуассоновы структуры, определяемые бивекторами Киллинга–Пуассона на N -мерной сфере, порождают иерархию обобщенных магнетиков Гейзенберга (10) для соответствующей $(N+1)$ -мерной алгебры Ли с инвариантным евклидовым скалярным произведением.

§ 2.5. Однородные пуассоновы структуры дифференциально-геометрического типа

В [32] Б. А. Дубровин и С. П. Новиков в качестве естественного обобщения пуассоновых структур гидродинамического типа ввели однородные дифференциально-геометрические скобки Пуассона произвольного порядка n и поставили задачу классификации этих скобок. В одномерном случае однородные невырожденные скобки Пуассона дифференциально-геометрического типа имеют вид:

$$(1) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta_{(n)}(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta_{(n-1)}(x-y) \\ + [c_k^{ij}(u(x))u_{xx}^k + c_{kl}^{ij}(u(x))u_x^k u_x^l]\delta_{(n-2)}(x-y) \\ + \dots + [d_k^{ij}(u(x))u_{(n)}^k + \dots]\delta(x-y), \quad \det(g^{ij}(u)) \neq 0,$$

каждое слагаемое в (1) имеет степень однородности n относительно естественной градуировки

$$\deg(hg) = \deg h + \deg g, \quad \deg f(u(x)) = \deg u(x) = 0, \\ \deg \frac{d^k u}{dx^k} = \deg \delta_{(k)}(x-y) = k, \quad f_{(k)} = \frac{d^k f}{dx^k}.$$

При $n = 0$ мы получаем классические конечномерные пуассоновы структуры $g^{ij}(u)$ на многообразии M , а при $n = 1$ – однородные пуассоновы структуры гидродинамического типа.

Структуры Дубровина–Новикова (1) определяют различные любопытные геометрии на многообразии M с локальными координатами $u^1, \dots, u^N$: при локальных заменах координат коэффициент $g^{ij}(u)$ преобразуется как метрика на M (симметричная при нечетном n и кососимметричная при четном n), а коэффициенты $g_{is}(u)b_j^{sk}(u)$, $g_{is}(u)c_j^{sk}(u), \dots, g_{is}(u)d_j^{sk}(u)$ преобразуются как символы Кристоффеля дифференциально-геометрических связностей на M . В настоящее время полная классификация однородных скобок Пуассона дифференциально-геометрического типа (1) получена только в следующих случаях: $n = 0$ (G. Darboux), $n = 1$ (Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, [31]), $n = 2$ (Г. В. Потемин, [131]; P. W. Doyle, [26]). В [131] и [26] частично был изучен также случай $n = 3$, но полной классификации получить не удалось. При этом не было найдено ни одной системы уравнений, возникающей в приложениях и обладающей такими однородными пуассоновыми структурами порядка $n > 1$.

В [120] С. П. Новиков сформулировал гипотезу, что при любом $n > 0$ последняя связность $\tilde{\Gamma}_{jk}^i = g_{js}(u)d_k^{si}(u)$ в (17) симметрична и ее тензор кривизны равен нулю, т.е. связность плоская. Эта гипотеза Новикова была доказана в [131], [26] для произвольного n .

Приведем здесь кратко результаты исследования общих структур Дубровина–Новикова. Рассмотрим однородные дифференциально-геометрические скобки Пуассона второго порядка:

$$(2) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta''(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta'(x-y) \\ + [c_k^{ij}(u(x))u_{xx}^k + c_{kl}^{ij}(u(x))u_x^k u_x^l]\delta(x-y), \quad \det(g^{ij}(u)) \neq 0.$$

Введем коэффициенты $\Gamma_{jk}^i(u)$ и $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(u)$ следующими формулами:

$$(3) \quad b_k^{ij} = -2g^{is}\Gamma_{sk}^j, \quad c_k^{ij} = -g^{is}\tilde{\Gamma}_{sk}^j.$$

Связность $\Gamma_{jk}^i(u)$ должна быть согласована с кососимметрической метрикой $g^{ij}(u)$, т.е. мы имеем симплектическую связность $\Gamma_{jk}^i(u)$ на почти симплектическом многообразии (M, g_{ij}) с почти симплектической структурой g_{ij} , а связность $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(u)$ должна быть плоской, причем $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(u) = \frac{1}{2}(\Gamma_{jk}^i(u) + \Gamma_{kj}^i(u))$.

В *специальных координатах*, в которых $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(u) = 0$ (плоские координаты связности $\tilde{\Gamma}_{jk}^i(u)$), всегда выполнено и соотношение $c_{kl}^{ij}(u) = 0$, т.е. скобка Пуассона в этих координатах имеет вид:

$$(4) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta''(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta'(x-y), \quad \det(g^{ij})(u) \neq 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ [131]. *Выражение (4) определяет скобку Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены соотношения*

$$(5) \quad g^{ij} = -g^{ji},$$

$$(6) \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = b_k^{ij},$$

$$(7) \quad b_s^{ij}g^{sk} = b_s^{jk}g^{si}.$$

Можно показать, что в данном случае тензор кручения $T_{ijk}(u) = g_{is}T_{jk}^s, T_{sk}^j = \Gamma_{sk}^j - \Gamma_{ks}^j$, абсолютно кососимметричен.

ТЕОРЕМА [131], [26]. *В специальных координатах*

$$(8) \quad g_{ij}(u) = T_{ijk}u^k + g_{ij}^0,$$

где $T_{ijk} = \text{const}$, $g_{ij}^0 = \text{const}$, а скобка Пуассона (4) имеет вид:

$$(9) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = \frac{d}{dx}g^{ij}(u)\frac{d}{dx}\delta(x-y).$$

Произвольные константы $T_{ijk} = \text{const}$, $g_{ij}^0 = \text{const}$, кососимметричные по каждой паре индексов, определяют скобку Пуассона по формулам (8), (9).

Однородные дифференциально-геометрические пуассоновы структуры второго порядка приводятся к частному случаю локальных симплектических структур нулевого порядка, которые полностью изучены в §1.1. Действительно, после преобразования $u^i = v_x^i$ скобка Пуассона (9) переходит в локальную скобку Пуассона нулевого порядка: $\{v^i(x), v^j(y)\} = -g^{ij}(v_x)\delta(x-y)$, где $g_{ij}(v_x) = T_{ijk}v_x^k + g_{ij}^0$, $T_{ijk} = \text{const}$, $g_{ij}^0 = \text{const}$, — симплектическая структура вида (1.1.21).

Введем 2-форму $\Omega = g_{ij}(u) du^i \wedge du^j$.

ТЕОРЕМА [132]. *Однородная скобка Пуассона второго порядка (2) приводится к постоянному виду $g_0^{ij}\delta''(x-y)$ тогда и только тогда, когда $d\Omega = 0$ (или, что эквивалентно, когда тензор кручения $T_{jk}^i(u) = 0$).*

Отметим, что $(dg)_{ijk} = 3T_{ijk}$.

Рассмотрим теперь однородные скобки Пуассона третьего порядка:

$$(10) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta'''(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta''(x-y) \\ + [c_k^{ij}(u(x))u_{xx}^k + c_{kl}^{ij}(u(x))u_x^k u_x^l]\delta'(x-y) \\ + [d_k^{ij}(u(x))u_{xxx}^k + d_{kl}^{ij}(u(x))u_{xx}^k u_x^l \\ + d_{klm}^{ij}(u(x))u_x^k u_x^l u_x^m]\delta(x-y), \quad \det(g^{ij}(u)) \neq 0.$$

Поскольку последняя связность в (10) $\tilde{\Gamma}_{sk}^j(u) = g_{si}(u)d_k^{ij}(u)$ — плоская [131], [26], то существуют специальные локальные координаты на M , в которых $\tilde{\Gamma}_{sk}^j = 0$. В специальных координатах всегда выполнены соотношения

$$(11) \quad d_{lm}^{jk}(u) = 0, \quad d_{lmn}^{jk}(u) = 0.$$

ГИПОТЕЗА. По-видимому, и для произвольного $n > 0$ существуют локальные координаты, в которых коэффициент перед $\delta(x-y)$ в однородной дифференциально-геометрической скобке Пуассона (1) порядка n равен нулю, во всяком случае, это верно для $n = 1, 2, 3$.

В этих специальных координатах скобка Пуассона третьего порядка (10) имеет вид:

$$(12) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g^{ij}(u(x))\delta'''(x-y) + b_k^{ij}(u(x))u_x^k\delta''(x-y) \\ + [c_k^{ij}(u(x))u_{xx}^k + c_{kl}^{ij}(u(x))u_x^k u_x^l]\delta'(x-y), \quad \det(g^{ij}(u)) \neq 0.$$

ТЕОРЕМА [131]. *Выражение (12) определяет скобку Пуассона тогда и только тогда, когда выполнены соотношения (13)–(19):*

$$(13) \quad \frac{\partial g^{ij}}{\partial u^k} = c_k^{ij} + c_k^{ji},$$

$$(14) \quad b_k^{ij} = 2c_k^{ij} + c_k^{ji},$$

$$(15) \quad c_l^{ij}g^{lk} = -c_l^{kj}g^{li},$$

$$(16) \quad c_l^{ij}g^{lk} + c_l^{jk}g^{li} + c_l^{ki}g^{lj} = 0,$$

$$(17) \quad 2c_{lm}^{ij} = \frac{\partial c_l^{ij}}{\partial u^m} + \frac{\partial c_m^{ij}}{\partial u^l},$$

$$(18) \quad g^{kl}\frac{\partial c_l^{ij}}{\partial u^m} = c_l^{ik}c_m^{lj} - c_l^{ki}c_m^{lj} - c_l^{kj}\frac{\partial g^{li}}{\partial u^m},$$

$$(19) \quad \sum_{(m,n,p)} A_{rpj}c_m^{ki}c_n^{lj} = 0,$$

где

$$(20) \quad A_{rpj} = -\left(\frac{\partial c_{rjp}}{\partial u^i} + \frac{\partial c_{jip}}{\partial u^r} + \frac{\partial c_{rij}}{\partial u^p}\right),$$

знак $\sum_{(m,n,p)}$ означает суммирование по всем циклическим перестановкам элементов (m,n,p) , $c_{mnk} = g_{mj}g_{ni}c_k^{ij}$, $g^{ij}g_{jk} = \delta_k^i$.

Условия (13)–(19) выглядят значительно проще для дифференциально-геометрических объектов с нижними индексами:

$$(21) \quad \frac{\partial g_{mn}}{\partial u^k} = -c_{mnk} - c_{nmk},$$

$$(22) \quad c_{mnk} = -c_{mkn},$$

$$(23) \quad c_{mnk} + c_{nkm} + c_{kmn} = 0,$$

$$(24) \quad \frac{\partial c_{mnk}}{\partial u^l} = -c_{pml}g^{pq}c_{qnk},$$

$$(25) \quad \sum_{(m,n,p)} A_{rp}^{lk} c_{qlm} c_{skn} = 0,$$

где

$$(26) \quad A_{rp}^{lk} = -g^{li}g^{kj} \left(\frac{\partial c_{rjp}}{\partial u^i} + \frac{\partial c_{jip}}{\partial u^r} + \frac{\partial c_{rij}}{\partial u^p} \right).$$

ТЕОРЕМА [131], [26]. В специальных координатах

$$(27) \quad \frac{\partial^2 c_{mnk}}{\partial u^l \partial u^p} = 0,$$

т.е.

$$(28) \quad c_{mnk} = c_{mnkl}u^l + c_{mnk}^0,$$

где c_{mnkl} и c_{mnk}^0 – константы, а метрика с нижними индексами квадратична:

$$(29) \quad g_{mn}(u) = g_{mnpq}u^p u^q + g_{mnp}u^p + g_{mn}^0,$$

где g_{mnpq} , g_{mnp} и g_{mn}^0 – константы.

В специальных координатах значения $c_{mnp}(u)$ совпадают с точностью до постоянного множителя со значениями тензора кручения с нижними индексами для связности $c_k^{ij} = -3g^{is}\Gamma_{sk}^j$, согласованной с метрикой g_{ij} . Тензор кручения c_{mnp} , удовлетворяющий соотношениям (21)–(25), и постоянная матрица g_{mn}^0 полностью определяют невырожденную однородную дифференциально-геометрическую скобку Пуассона третьего порядка (10). Полная классификация таких скобок Пуассона пока не построена. Интересно было бы выяснить алгебраическую природу структурных констант c_{mnkl} , c_{mnk}^0 , g_{mn}^0 , определяющих невырожденные однородные дифференциально-геометрические скобки Пуассона третьего порядка, – возможно, что они связаны с известными алгебраическими структурами, но пока эта задача не решена. Отметим, что в работах [131], [132], [26] остался незамеченным следующий любопытный факт.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3. *В специальных координатах однородная пуассонова структура третьего порядка (12) имеет вид:*

$$M^{ij} = \frac{d}{dx} \circ \left(g^{ij}(u) \frac{d}{dx} + c_k^{ij}(u) u_x^k \right) \circ \frac{d}{dx}.$$

Доказательство следует из соотношений (13), (14) и (17).

Соответственно, после преобразования $u^i = v_x^i$ пуассонова структура (12) преобразуется в пуассонову структуру первого порядка! А именно:

$$\widetilde{M}^{ij} = -g^{ij}(v_x) \frac{d}{dx} - c_k^{ij}(v_x) v_{xx}^k.$$

Кроме того, необходимо описать все пуассоновы структуры первого порядка вида:

$$M^{ij} = g^{ij}(v_{(n)}) \frac{d}{dx} - c_k^{ij}(v_{(n)}) v_{(n+1)}^k.$$

После преобразования $u^i = v_{(n)}^i$ все такие пуассоновы структуры становятся однородными пуассоновыми структурами порядка $2n + 1$. Гипотеза автора состоит в том, что все невырожденные однородные пуассоновы структуры приводятся таким способом либо к пуассоновым структурам нулевого порядка (для структур четного порядка), либо к пуассоновым структурам первого порядка (для нечетных порядков). Во всяком случае, при $n = 0, 1, 2, 3$ это верно. Если гипотеза верна, то из описания всех невырожденных пуассоновых структур нулевого порядка, полученного в § 1.1, следует, что однородные пуассоновы структуры четного порядка, не равного 2, приводятся к постоянному виду локальной заменой координат на многообразии.

ТЕОРЕМА [131], [26]. *Невырожденная однородная дифференциально-геометрическая скобка Пуассона (10) третьего порядка приводится локальными заменами координат на многообразии M к постоянному виду*

$$(30) \quad \{u^i(x), u^j(y)\} = g_0^{ij} \delta'''(x - y),$$

где $g_0^{ij} = \text{const}$, тогда и только тогда, когда связность $c_k^{ij}(u) = -3g^{is}(u)\Gamma_{sk}^j(u)$ имеет нулевой тензор кручения, т.е. симметрична (это также эквивалентно условию, что последняя связность $\tilde{\Gamma}_{sk}^j(u) = g_{si}(u)d_k^{ij}(u)$ согласована с метрикой $g^{ij}(u)$).

Глава 3.

Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля и недиагонализуемые интегрируемые системы гидродинамического типа

§ 3.1. Уравнения ассоциативности как недиагонализуемые интегрируемые однородные системы гидродинамического типа

Рассмотрим функцию N переменных $F(t^1, \dots, t^N)$, удовлетворяющую следующим двум условиям.

1. Матрица

$$\eta_{\alpha\beta} = \frac{\partial^3 F}{\partial t^1 \partial t^\alpha \partial t^\beta} \quad (\alpha, \beta = 1, \dots, N)$$

является постоянной и невырожденной.

Отметим, что матрица $\eta_{\alpha\beta}$ определяет зависимость функции F от выделенной переменной t^1 (с точностью до квадратичных полиномов по $t^1, \dots, t^N$).

2. Функции

$$c_{\beta\gamma}^\alpha(t) = \eta^{\alpha\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\mu \partial t^\beta \partial t^\gamma} \quad (\text{здесь } \eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} = \delta_\beta^\alpha)$$

для всех $t = (t^1, \dots, t^N)$ являются структурными константами ассоциативной алгебры $A(t)$ в N -мерном линейном пространстве с базисом $e_1, \dots, e_N$ и умножением $e_\beta \circ e_\gamma = c_{\beta\gamma}^\alpha(t) e_\alpha$.

Условие ассоциативности $(e_\alpha \circ e_\beta) \circ e_\gamma = e_\alpha \circ (e_\beta \circ e_\gamma)$, которое эквивалентно соотношению $c_{\alpha\beta}^\mu c_{\mu\gamma}^\nu = c_{\alpha\mu}^\nu c_{\beta\gamma}^\mu$ для структурных констант алгебры $A(t)$, для функции F приводит к сложной переопределенной системе нелинейных уравнений в частных производных третьего порядка, известной в двумерной топологической теории поля под названием *уравнения ассоциативности* или *системы Виттена–Дийкграафа–Г. Верлинде–Э. Верлинде–Дубровина* (см. [147], [148], [17], [28], необходимые физические мотивировки и теория интегрирования уравнений ассоциативности могут быть найдены в обзоре Б. А. Дубровина [27]):

$$(1) \quad \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\lambda \partial t^\alpha \partial t^\beta} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\nu \partial t^\mu \partial t^\gamma} = \eta^{\mu\lambda} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\nu \partial t^\alpha \partial t^\mu} \frac{\partial^3 F}{\partial t^\lambda \partial t^\beta \partial t^\gamma}.$$

Отметим, что уравнения ассоциативности (1) играют также одну из ключевых ролей в разрабатываемой в настоящее время теории инвариантов Громова–Виттена, теории квантовых когомологий и некоторых классических задачах алгебраической геометрии, в частности, в задаче о числе $n(d)$ рациональных кривых степени d на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, проходящих через $3d - 1$ точек общего положения, или, в более общем случае, о числе $n(d; k_2, \dots, k_{r+1})$ рациональных кривых степени d в проективном пространстве $\mathbb{P}^{r+1}$, пересекающих k_s гиперплоскостей коразмерности s , при условии, что $\sum_{s=2}^{r+1} k_s(s-1) = (r+2)d + r - 2$ (Y. Ruan, G. Tian [135], М. Л. Концевич, Ю. И. Манин [70], М. Л. Концевич [69]).

Переменная t^1 в уравнениях ассоциативности (1) является изначально выделенной переменной, и задание произвольной постоянной невырожденной симметричной матрицы $\eta_{\alpha\beta}$ в соответствии с условием 1 на функцию F просто фиксирует зависимость этой функции от переменной t^1 (в силу своего определения функция F всегда рассматривается с точностью до квадратичных полиномов по переменным $t^1, \dots, t^N$):

$$F = \frac{1}{6} \eta_{11} (t^1)^3 + \sum_{\beta=2}^N \frac{1}{2} \eta_{1\beta} (t^1)^2 t^\beta + \sum_{\alpha \geq 2} \sum_{\beta > \alpha} \eta_{\alpha\beta} t^1 t^\alpha t^\beta + \sum_{\alpha \geq 2} \frac{1}{2} \eta_{\alpha\alpha} t^1 (t^\alpha)^2 + f(t^2, \dots, t^N).$$

Соответственно, при заданной метрике $\eta_{\alpha\beta}$ уравнения ассоциативности эквивалентны системе нелинейных уравнений в частных производных на функцию $f(t^2, \dots, t^N)$.

Из условия 2 немедленно следует, что умножение в алгебре $A(t)$ коммутативно, а из условия 1 следует, что элемент e_1 всегда является единицей в алгебре $A(t)$: $e_1 \circ e_\mu =$

$c_{1\mu}^\nu e_\nu = \eta^{\nu\lambda} \eta_{\lambda\mu} e_\nu = e_\mu$. Таким образом, при любом t алгебра $A(t)$ является коммутативной ассоциативной алгеброй с единицей. Кроме того, на алгебре $A(t)$ задана невырожденная симметричная билинейная форма $\langle e_\alpha, e_\beta \rangle = \eta_{\alpha\beta}$, которая является *инвариантной* относительно умножения в алгебре, т.е. $\langle e_\alpha \circ e_\beta, e_\gamma \rangle = \langle e_\alpha, e_\beta \circ e_\gamma \rangle$. Конечномерная коммутативная ассоциативная алгебра с единицей и невырожденной инвариантной симметричной билинейной формой называется *алгеброй Фробениуса*. Следовательно, уравнения ассоциативности (1) описывают N -параметрические деформации N -мерных алгебр Фробениуса.

Первые уравнения ассоциативности возникают при $N = 3$. Для $N = 3$ Б. А. Дубровиным в [27] рассмотрены два существенно различных вида зависимости функции F от выделенной переменной t^1 : $F = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^3 + \frac{1}{2} t^1 (t^2)^2 + f(t^2, t^3)$, что соответствует антидиагональной метрике $(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, и $F = \frac{1}{6}(t^1)^3 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2, t^3)$, что соответствует метрике той же сигнатуры, но вида $(\eta_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Уравнения ассоциативности сводятся при этом к следующим двум нелинейным уравнениям третьего порядка на функцию двух независимых переменных $f = f(x, t)$ (всюду далее $x = t^2$, $t = t^3$):

$$(2) \quad f_{ttt} = f_{xxt}^2 - f_{xxx} f_{xtt},$$

$$(3) \quad f_{xxx} f_{ttt} - f_{xxt} f_{xtt} = 1,$$

соответственно. Уравнение (2), которое будет главным предметом изучения в гл. 3, описывает квантовые когомологии – деформации кольца когомологий проективной плоскости $\mathbb{P}^2$. Решение задачи о числе $n(d)$ рациональных кривых степени d на проективной плоскости $\mathbb{P}^2$, проходящих через $3d - 1$ точек общего положения, как показано М. Л. Концевичем, также связано с уравнением (2). Рассмотрим ряд

$$\phi(x, t) = \sum_{d=1}^{\infty} n(d) \frac{t^{3d-1}}{(3d-1)!} e^{dx}.$$

Этот ряд должен удовлетворять уравнению ассоциативности (2), что приводит к рекуррентным формулам Концевича для чисел $n(d)$ (см. [69], [70], [135]): $n(1) = 1$, а при $d \geq 2$

$$n(d) = \sum_{\substack{k, l \geq 1, \\ k+l=d}} n(k) n(l) k^2 l \left[l \binom{3d-4}{3k-2} - k \binom{3d-4}{3k-1} \right].$$

Обобщения этой задачи для проективных пространств произвольной размерности и других алгебраических многообразий всегда связаны с уравнениями ассоциативности, описывающими деформации кольца когомологий соответствующего многообразия [69], [70], [135].

ТЕОРЕМА 3.1 [108], [110]. *Уравнения (2) и (3) эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым однородным системам гидродинамического типа*

$$(4) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c & 2b & -a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_x,$$

$$(5) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(1+bc)/a^2 & c/a & b/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_x,$$

соответственно.

Введем новые переменные $a = f_{xxx}$, $b = f_{xxt}$, $c = f_{xtt}$, $d = f_{ttt}$. Условия совместности имеют вид $a_t = b_x$, $b_t = c_x$, $c_t = d_x$. Кроме того, уравнения (2) и (3) эквивалентны, соответственно, соотношениям $d = b^2 - ac$ и $d = (1 + bc)/a$. Таким образом, в новых переменных уравнения (2) и (3), как показано автором в [108], [109], приобретают вид однородных систем гидродинамического типа порядка 3×3 :

$$(6) \quad a_t = b_x, \quad b_t = c_x, \quad c_t = (b^2 - ac)_x,$$

$$(7) \quad a_t = b_x, \quad b_t = c_x, \quad c_t = ((1 + bc)/a)_x,$$

соответственно.

Для уравнений в частных производных второго порядка (типа Монжа–Ампера) аналогичное преобразование всегда приводит к двухкомпонентным системам гидродинамического типа, которые, как известно, линеаризуются классическим методом годографа. В частности, в [115] автором и Y. Nutku было рассмотрено классическое гиперболическое уравнение Монжа–Ампера $u_{tt}u_{xx} - u_{xt}^2 = -1$, которое преобразованием $U = u_{xt}/u_{xx}$, $V = u_{xx}$ сводится к интегрируемой системе уравнений газа Чаплыгина: $U_t = UU_x + V^{-3}V_x$, $V_t = VU_x + UV_x$.

Основным преимуществом записи уравнений ассоциативности в виде (6), (7) является наличие эффективной и хорошо разработанной теории интегрируемости одномерных однородных систем гидродинамического типа, рассматривавшихся в гл. 2, т.е. вида $u_t^i = v_j^i(u)u_x^j$, – см., например, обзоры С. П. Царева [140], Б. А. Дубровина и С. П. Новикова [33], а также работы Е. В. Ферапонтова [9], [40]–[42], посвященные недиагонализуемым системам гидродинамического типа. Всюду в дальнейшем мы рассматриваем *строго гиперболические системы*, т.е. такие системы, для которых собственные числа матрицы v_j^i являются вещественными и различными. Так, обе исследуемые системы (6) и (7) являются строго гиперболическими.

Исследование, проведенное автором в [108], [109], показало, что системы (6) и (7) являются недиагонализуемыми (т.е. не допускают инвариантов Римана). Этот несложный факт проверен разными способами. В частности, доказано, что предположение о диагонализуемости матриц систем (6) и (7) приводит к противоречию после явных аналитических вычислений. Кроме того, имеется эффективный критерий диагонализуемости, принадлежащий А. Хаантесу [67].

Пусть $v_j^i(u)$ – *аффинор*, т.е. тензор типа $(1, 1)$ на многообразии M с локальными координатами $(u^1, \dots, u^N)$. Тензором *Нейенхейса* [116], [117] называется трехвалентный тензор $N_{ij}^k(u)$ – *тензор кривизны аффинора* $v_j^i(u)$:

$$N_{ij}^k = v_i^s \frac{\partial v_j^k}{\partial u^s} - v_j^s \frac{\partial v_i^k}{\partial u^s} + v_s^k \frac{\partial v_i^s}{\partial u^j} - v_s^k \frac{\partial v_j^s}{\partial u^i}.$$

Для произвольного векторного поля $\xi^i(u)$ на многообразии M

$$N_{ij}^k \xi^i = (L_{v(\xi)}(v) - vL_\xi(v))_j^k,$$

где L_ξ – производная Ли вдоль векторного поля $\xi(u)$. Аффинор, тензор Нейенхейса которого равен нулю, называется *аффинором Нейенхейса*. В частности, оператор рекурсии, заданный отношением двух согласованных пуассоновых структур (по схеме Ленарда–Магри, см. § 1.1), всегда является аффинором Нейенхейса. Тензор Нейенхейса, играющий в настоящее время важную роль в теории интегрируемых систем, в частности, в теории операторов рекурсии, теории согласованных пуассоновых структур, схеме Ленарда–Магри (см. [50], [52], [53], [60], [61], [71], [80]), был изобретен именно при попытке найти критерий диагонализуемости матрицы $v_j^i(u)$ [116]. Соответствующий критерий был в дальнейшем найден А. Хаантьесом [67]. Введем *тензор Хаантьеса*

$$H_{jk}^i = v_s^i v_r^s N_{jk}^r - v_s^i N_{rk}^s v_j^r - v_s^i N_{jr}^s v_k^r + N_{sr}^i v_j^s v_k^r.$$

Тогда тензор $v_j^i(u)$, все собственные значения которого вещественны и различны, диагонализуется в окрестности точки на многообразии тогда и только тогда, когда тензор Хаантьеса для него равен нулю [67]. Этот критерий приводит к очень громоздким вычислениям, но все они могут быть осуществлены на компьютере с использованием программ символьных вычислений. Проверено, что для матриц систем гидродинамического типа (6) и (7) тензоры Хаантьеса не равны нулю. Кроме того, недиагонализуемость систем (6) и (7) следует из того, что, как показано в дальнейшем, для левых собственных ковекторов $\xi_{(s)}(u)$: $\xi_{(s)i} v_j^i = \lambda_{(s)} \xi_{(s)j}$, матриц этих систем $v_j^i(u)$ не выполняется условие Фробениуса существования интегрирующего множителя $d(\xi_{(s)i} du^i) \wedge (\xi_{(s)k} du^k) = 0$.

Как было замечено Б. А. Дубровиным [28], уравнение ассоциативности (1) связано со следующей спектральной линейной задачей:

$$\frac{\partial \phi_\alpha}{\partial t^\beta} = z c_{\alpha\beta}^\gamma \phi_\gamma, \quad z = \text{const}.$$

Действительно, условия совместности для этой линейной системы имеют вид:

$$z \frac{\partial c_{\alpha\beta}^\gamma}{\partial t^\lambda} \phi_\gamma + z^2 c_{\alpha\beta}^\gamma c_{\gamma\lambda}^\epsilon \phi_\epsilon = z \frac{\partial c_{\alpha\lambda}^\gamma}{\partial t^\beta} \phi_\gamma + z^2 c_{\alpha\lambda}^\gamma c_{\gamma\beta}^\epsilon \phi_\epsilon,$$

т.е. эквивалентны уравнению ассоциативности (1) для структурных констант $c_{\alpha\lambda}^\gamma$, определяемых функцией $F(t^1, \dots, t^N)$.

Рассмотрим подробнее систему (6). В наших “гидродинамических” переменных a, b, c спектральная задача приобретает следующий вид:

$$(8) \quad \Psi_x = zA\Psi = z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ b & a & 1 \\ c & b & 0 \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi_t = zB\Psi = z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c & b & 0 \\ b^2 - ac & c & 0 \end{pmatrix} \Psi.$$

Условия совместности спектральной задачи (8) эквивалентны следующим двум соотношениям между матрицами A и B :

$$(9) \quad A_t = B_x, \quad [A, B] = 0,$$

которые выполняются тождественно в силу уравнений (6) (здесь $[\cdot, \cdot]$ обозначает обычный коммутатор матриц).

ЛЕММА 3.1 [113]. *Собственные числа матрицы A являются плотностями законов сохранения системы (6).*

Таким образом, помимо трех очевидных законов сохранения с плотностями a, b, c система (6) имеет три закона сохранения с плотностями u^1, u^2, u^3 , являющимися корнями характеристического уравнения $\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - a\lambda^2 - 2b\lambda - c = 0$. В силу очевидного соотношения $a = u^1 + u^2 + u^3$ среди них лишь пять законов сохранения с плотностями u^1, u^2, u^3, b, c являются линейно независимыми. Система (6) не имеет других законов сохранения гидродинамического типа, т.е. с плотностями вида $h(a, b, c)$.

Перейдем в уравнениях (6) от переменных a, b, c к новым зависимым переменным u^1, u^2, u^3 , связанным с a, b, c формулами Виета

$$a = u^1 + u^2 + u^3, \quad b = -\frac{1}{2}(u^1 u^2 + u^2 u^3 + u^3 u^1), \quad c = u^1 u^2 u^3.$$

Для сокращения необходимых вычислений заметим, что матрицы A и B связаны формулой $B = A^2 - aA - bE$. Следовательно, то же самое соотношение имеет место и для соответствующих диагональных матриц $U = \text{diag}(u^1, u^2, u^3)$ и $V = \text{diag}(v^1, v^2, v^3)$: $V = U^2 - aU - bE$. Подставляя выражения для a и b и используя первое уравнение системы (9), получаем:

$$U_t = (U^2 - (u^1 + u^2 + u^3)U + \frac{1}{2}(u^1 u^2 + u^2 u^3 + u^3 u^1)E)_x$$

или, в компонентах,

$$(10) \quad \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} u^2 u^3 - u^1 u^2 - u^1 u^3 \\ u^1 u^3 - u^2 u^1 - u^2 u^3 \\ u^1 u^2 - u^3 u^1 - u^3 u^2 \end{pmatrix}_x = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \partial h / \partial u^1 \\ \partial h / \partial u^2 \\ \partial h / \partial u^3 \end{pmatrix},$$

где $h = c = u^1 u^2 u^3$. Следовательно, рассматриваемая система является гамильтоновой с гамильтоновым оператором

$$(11) \quad M = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}$$

и гамильтонианом $H = \int c dx = \int u^1 u^2 u^3 dx$. Плотностью импульса и аннуляторами соответствующей скобки Пуассона являются: $2b = -u^1 u^2 - u^2 u^3 - u^3 u^1$ (плотность импульса), u^1, u^2, u^3 (аннуляторы). В исходных переменных a, b, c гамильтонов оператор (11) имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}a & b \\ \frac{1}{2}a & b & \frac{3}{2}c \\ b & \frac{3}{2}c & 2(b^2 - ac) \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}a_x & b_x \\ 0 & \frac{1}{2}b_x & c_x \\ 0 & \frac{1}{2}c_x & (b^2 - ac)_x \end{pmatrix},$$

т.е. определяет невырожденную однородную пуассонову структуру гидродинамического типа с плоской метрикой (скобка Дубровина–Новикова). В работах Царева [137],

[140] была построена эффективная теория интегрируемости диагонализуемых гамильтоновых систем гидродинамического типа, т.е. гамильтоновых систем, приводимых к инвариантам Римана: $R_t^i = v^i(R)R_x^i$. Все такие системы допускают бесконечный набор законов сохранения и коммутирующих потоков гидродинамического типа и интегрируются обобщенным методом годографа. Однако, как показано выше, система (6) не допускает инвариантов Римана. Это объясняет, в частности, то обстоятельство, что система (6) имеет лишь конечное число гидродинамических интегралов. Общая теория интегрируемости недиагонализуемых (т.е. не допускающих инвариантов Римана) гамильтоновых систем гидродинамического типа развивалась в работах Е. В. Ферапонтова [39], [40]–[42]. Для трехкомпонентных систем полученные результаты носят окончательный характер.

ТЕОРЕМА 3.2 [40], [41]. *Недиагонализуемая гамильтонова (с невырожденной скобкой Пуассона) система гидродинамического типа порядка 3×3 является интегрируемой тогда и только тогда, когда она слабо нелинейна.*

Напомним, что система гидродинамического типа

$$(12) \quad u_t^i = v_j^i(u)u_x^j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

называется *слабо нелинейной*, если для собственных чисел $\lambda^i(u)$ матрицы $v_j^i(u)$ для любого $i = 1, \dots, n$ выполнены соотношения $L_{\vec{X}^i}(\lambda^i) = 0$, где $L_{\vec{X}^i}$ – производная Ли вдоль собственного вектора $\vec{X}^i$, отвечающего собственному значению λ^i . Имеется простой и эффективный критерий слабой нелинейности, не апеллирующий к собственным числам и собственным векторам [40].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.1 [40]. *Система гидродинамического типа (12) является слабо нелинейной тогда и только тогда, когда*

$$(\text{grad } f_1)v^{n-1} + (\text{grad } f_2)v^{n-2} + \dots + (\text{grad } f_n)E = 0,$$

где f_i – коэффициенты характеристического многочлена

$$\det(\lambda \delta_j^i - v_j^i(u)) = \lambda^n + f_1(u)\lambda^{n-1} + f_2(u)\lambda^{n-2} + \dots + f_n(u),$$

а v^n обозначает n -ю степень матрицы v_j^i ($E = v^0$).

Несложно проверить, что система (6) является слабо нелинейной.

Для рассматриваемой нами системы (10) собственные числа λ^i и отвечающие им левые собственные ковектора $\vec{l}^i$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \lambda^1 &= -u^1, & \vec{l}^1 &= (u^2 - u^3, u^1 - u^3, u^2 - u^1), \\ \lambda^2 &= -u^2, & \vec{l}^2 &= (u^2 - u^3, u^1 - u^3, u^1 - u^2), \\ \lambda^3 &= -u^3, & \vec{l}^3 &= (u^2 - u^3, u^3 - u^1, u^2 - u^1), \end{aligned}$$

откуда в силу критерия Фробениуса следует, в частности, ее недиагонализуемость (условие Фробениуса существования интегрирующего множителя не выполняется).

Пусть $B(u) dx + A(u) dt$ и $N(u) dx + M(u) dt$ — два интеграла гидродинамического типа для системы гидродинамического типа (12), т.е. дифференциальные формы замкнуты вдоль решений этой системы. Перейдем от переменных x, t к новым независимым переменным $\tilde{x}, \tilde{t}$ по формулам (такие преобразования называются *преобразованиями по решению*)

$$(13) \quad d\tilde{x} = B dx + A dt, \quad d\tilde{t} = N dx + M dt.$$

При этом система (12) преобразуется к виду $u_t^i = \tilde{v}_j^i(u) u_x^j$, где матрица $\tilde{v}$ связана с матрицей v формулой $\tilde{v} = (Bv - AE)(ME - Nv)^{-1}$.

ТЕОРЕМА 3.3 [40], [41]. *Пусть система гидродинамического типа (12) порядка 3×3 является слабо нелинейной и гамильтоновой (с невырожденной скобкой Пуассона гидродинамического типа). Тогда у нее найдется такая пара интегралов (13), что преобразованная система будет иметь постоянные собственные числа $\tilde{\lambda}^i$, причем без ограничения общности можно считать, что $\tilde{\lambda}^1 = 1$, $\tilde{\lambda}^2 = -1$, $\tilde{\lambda}^3 = 0$.*

Для системы (10) преобразование (13), существование которого утверждается этой теоремой, имеет следующий вид:

$$(14) \quad \begin{aligned} d\tilde{x} &= B dx + A dt = (u^1 - u^2) dx + u^3(u^2 - u^1) dt, \\ d\tilde{t} &= N dx + M dt = (2u^3 - u^1 - u^2) dx + (2u^1u^2 - u^1u^3 - u^2u^3) dt. \end{aligned}$$

Преобразованные собственные числа равны 1, -1, 0, соответственно. В работах Е. В. Ферапонтова [40], [41] доказано, что любая недиагонализуемая, слабо нелинейная и гамильтонова (с невырожденной локальной пуассоновой структурой гидродинамического типа) однородная система гидродинамического типа порядка 3×3 преобразованием по решению типа (13) и дифференциальной подстановкой первого порядка приводится к системе трех волн, интегрируемой методом обратной задачи. Применяя к нашей системе (10) эту общую конструкцию Е. В. Ферапонтова, получаем следующие явные формулы, связывающие уравнения (10) и систему трех волн.

1. Переход от x, t к новым независимым переменным $\tilde{x}, \tilde{t}$ по формулам (14).
2. Переход от переменных u^1, u^2, u^3 к p^1, p^2, p^3 по формулам:

$$(15) \quad \begin{aligned} p^1 &= \frac{(u^2 - u^3)u_x^1 + (u^1 - u^3)u_x^2 + (u^2 - u^1)u_x^3}{2(u^2 - u^3)\sqrt{(u^2 - u^1)(u^3 - u^1)}}, \\ p^2 &= \frac{(u^2 - u^3)u_x^1 + (u^1 - u^3)u_x^2 + (u^1 - u^2)u_x^3}{2(u^3 - u^1)\sqrt{(u^2 - u^1)(u^2 - u^3)}}, \\ p^3 &= \frac{(u^2 - u^3)u_x^1 + (u^3 - u^1)u_x^2 + (u^2 - u^1)u_x^3}{2(u^2 - u^1)\sqrt{(u^3 - u^1)(u^2 - u^3)}}. \end{aligned}$$

При этом мы получим интегрируемую систему трех волн

$$(16) \quad p_t^1 - p_x^1 = -p^2 p^3, \quad p_t^2 + p_x^2 = -p^1 p^3, \quad p_t^3 = -2p^1 p^2.$$

Всякое решение интегрируемой системы трех волн (16) порождает трехпараметрическое семейство решений уравнения ассоциативности (2).

Обратимся теперь к другой системе уравнений ассоциативности – системе (7). Спектральная задача, отвечающая системе (7), имеет вид

$$(17) \quad \Psi_x = zA\Psi = z \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & b & a \\ 1 & c & b \end{pmatrix} \Psi, \quad \Psi_t = zB\Psi = z \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & c & b \\ 0 & (1+bc)/a & c \end{pmatrix} \Psi.$$

Легко проверить, что матрица B выражается через A по формуле $B = \frac{1}{a}(A^2 - bA)$. Условие совместности спектральной задачи (17) $A_t = B_x$, переписанное в терминах собственных чисел матриц A и B (см. лемму 3.1), имеет вид:

$$(18) \quad w_t^i = \left(\frac{1}{a}((w^i)^2 - bw^i) \right)_x,$$

где w^i – собственные числа матрицы A , т.е. корни характеристического уравнения

$$\det(\lambda E - A) = \lambda^3 - 2b\lambda^2 + (b^2 - ac)\lambda - a = 0.$$

Выражая отсюда a и b по формулам Виета $b = \frac{1}{2}(w^1 + w^2 + w^3)$, $a = w^1 w^2 w^3$ и подставляя полученные выражения в (18), мы получим явную запись уравнений (7) в координатах w^i :

$$(19) \quad \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ w^3 \end{pmatrix}_t = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (w^1 - w^2 - w^3)/w^2 w^3 \\ (w^2 - w^1 - w^3)/w^1 w^3 \\ (w^3 - w^1 - w^2)/w^1 w^2 \end{pmatrix}_x.$$

Отметим, что интегрируемые системы гидродинамического типа (7) и (19) не обладают локальными гамильтоновыми структурами гидродинамического типа (скобками Пуассона типа Дубровина–Новикова), – отвечающие им гамильтоновы структуры гидродинамического типа нелокальны (см. § 2.2 гл. 2).

Укажем явную связь между системами (10) и (19). Для этого перейдем в уравнениях (10) от x, t к новым независимым переменным $\tilde{x}, \tilde{t}$ по формулам

$$(20) \quad d\tilde{x} = -\frac{1}{2}(u^1 u^2 + u^1 u^3 + u^2 u^3) dx + u^1 u^2 u^3 dt, \quad d\tilde{t} = dx.$$

После преобразования (20) система (10) принимает вид

$$\begin{pmatrix} 1/u^1 \\ 1/u^2 \\ 1/u^3 \end{pmatrix}_{\tilde{t}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (u^2 u^3)/u^1 - u^2 - u^3 \\ (u^1 u^3)/u^2 - u^1 - u^3 \\ (u^1 u^2)/u^3 - u^1 - u^2 \end{pmatrix}_{\tilde{x}},$$

что, как легко видеть, совпадает с (19) после преобразования

$$(21) \quad w^i = 1/u^i.$$

На языке исходных уравнений (2) и (3) преобразования (20) и (21) могут быть представлены следующим образом: уравнение $f_{ttt} = f_{xxt}^2 - f_{xxx}f_{xtt}$ переходит в уравнение $\tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{x}}\tilde{f}_{\tilde{t}\tilde{t}\tilde{t}} - \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}\tilde{t}}\tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{t}\tilde{t}} = 1$ при замене

$$(22) \quad \tilde{x} = f_{xt}, \quad \tilde{t} = x, \quad \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{x}} = t, \quad \tilde{f}_{\tilde{x}\tilde{t}} = -f_{xx}, \quad \tilde{f}_{\tilde{t}\tilde{t}} = f_{tt}.$$

Это преобразование, связывающее решения уравнений ассоциативности (2) и (3), напоминает по своему виду автопреобразования уравнений ассоциативности, найденные Б. А. Дубровиным [27] (преобразования типа Лежандра), но, в отличие от них, не сохраняет метрику $\eta_{\alpha\beta}$.

Отметим, что, рассматривая решения системы (10), линейные по переменной x : $u^i = a^i(t)x$, мы получаем редукцию системы (10) к известной конечномерной динамической системе Альфена:

$$\dot{a}^1 = a^2 a^3 - a^1(a^2 + a^3), \quad \dot{a}^2 = a^1 a^3 - a^2(a^1 + a^3), \quad \dot{a}^3 = a^1 a^2 - a^3(a^1 + a^2).$$

§ 3.2. Пуассоновы и симплектические структуры уравнений ассоциативности

Первая пуассонова структура системы уравнений ассоциативности (3.1.4), порождаемая плоской метрикой, найдена выше в § 3.1 [113]:

$$(1) \quad M_1 = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}a & b \\ \frac{1}{2}a & b & \frac{3}{2}c \\ b & \frac{3}{2}c & 2(b^2 - ac) \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}a_x & b_x \\ 0 & \frac{1}{2}b_x & c_x \\ 0 & \frac{1}{2}c_x & (b^2 - ac)_x \end{pmatrix},$$

а соответствующий гамильтониан гидродинамического типа $-H = \int c dx$. Вторая пуассонова структура этой системы, согласованная с первой, строится из лагранжиана, найденного для уравнения (3.1.2) Гальвао и Нутку, и является однородной дифференциально-геометрической пуассоновой структурой третьего порядка (типа Дубровина–Новикова) с плоской метрикой, причем эта пуассонова структура не приводится заменой локальных координат на многообразии к постоянному виду:

$$(2) \quad M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & -a & a^2 + 2b \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dx} \right)^3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2a_x \\ 0 & -a_x & 3(b_x + aa_x) \end{pmatrix} \left(\frac{d}{dx} \right)^2 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{xx} + a_x^2 + aa_{xx} \end{pmatrix} \frac{d}{dx},$$

а гамильтониан является нелокальным и имеет вид:

$$(3) \quad H_1 = - \int \left(\frac{1}{2} a \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} b \right)^2 + \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} b \right) \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} c \right) \right) dx.$$

Далее по общей бигамильтоновой схеме Ленарда–Магри строится оператор рекурсии, рекуррентными соотношениями находятся высшие интегралы и высшие уравнения бигамильтоновой интегрируемой иерархии уравнения ассоциативности (3.1.2).

Введем новые переменные $p = f_x, q = f_t, r = f_{tt}$. Тогда уравнение ассоциативности (3.1.2) эквивалентно следующей системе эволюционных уравнений

$$(4) \quad p_t = q_x, \quad q_t = r, \quad r_t = q_{xx}^2 - p_{xx}r_x,$$

для которой Гальвао и Нутку нашли лагранжево представление, задаваемое локальным действием

$$(5) \quad S = \int [2p_x q_{xx} p_t + (2p_x p_{xx} - q_x) q_t + 2pr_t - 2qr_x + q_x^2 p_{xx}] dx dt.$$

Для первоначальной переменной f действие, порождающее уравнение ассоциативности (3.1.2), имеет вид

$$S = \int (f_{xt}^2 f_{xxx} + f_{xt} f_{tt}) dx dt.$$

Система (4) эквивалентна лагранжевой системе $\delta S / \delta u^i = 0$ (здесь $u^1 = p$, $u^2 = q$, $u^3 = r$). Действие (5) является вырожденным и принадлежит к классу действий (1.3.1), рассмотренному в гл. 1, § 1.3, и порождающему локальные симплектические структуры соответствующих лагранжевых систем. Симплектический оператор, отвечающий действию (5), вычисляется по общей явной формуле (1.3.3) и имеет вид:

$$(6) \quad (M_{ij}) = \begin{pmatrix} q_{xx} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ q_{xx} & -p_{xx} \frac{d}{dx} & -1 \\ -\frac{d}{dx} \circ p_{xx} & -\frac{d}{dx} & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Гамильтониан соответствующего симплектического представления (1.3.2) для системы (4) имеет вид

$$H = \int \left[q_x r + \frac{1}{2} q_x^2 p_{xx} \right] dx.$$

Оператор J^{ij} , обратный к оператору M_{ij} , является гамильтоновым:

$$(7) \quad (J^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -(\frac{d}{dx})^{-1} & -p_{xx} \\ -1 & p_{xx} & \frac{d}{dx} \circ q_{xx} + q_{xx} \frac{d}{dx} + p_{xx} \frac{d}{dx} \circ p_{xx} \end{pmatrix}.$$

Пуассонова структура (7) является нелокальной, но легко перейти к переменным, в которых это гамильтоново представление уравнения ассоциативности (3.1.2) будет локальным, т.е. локальны и пуассонова структура, и гамильтониан, и импульс. Действительно, в новых переменных v^i : $v^1 = p_x = f_{xx}$, $v^2 = q_x = f_{xt}$, $v^3 = r = f_{tt}$, уравнение ассоциативности (3.1.2) эквивалентно эволюционной системе

$$(8) \quad v_t^1 = v_x^2, \quad v_t^2 = v_x^3, \quad v_t^3 = (v_x^2)^2 - v_x^1 v_x^3,$$

имеющей следующее локальное гамильтоново представление:

$$(9) \quad \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{dx} \\ 0 & \frac{d}{dx} & -\frac{d}{dx} \circ v_x^1 \\ \frac{d}{dx} & -v_x^1 \frac{d}{dx} & v_x^2 \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ v_x^2 + v_x^1 \frac{d}{dx} \circ v_x^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta H / \delta v^1 \\ \delta H / \delta v^2 \\ \delta H / \delta v^3 \end{pmatrix},$$

где гамильтониан H имеет вид:

$$H = \int \left(v^2 v^3 + \frac{1}{2} v_x^1 (v^2)^2 \right) dx.$$

Импульс P пуассоновой структуры системы (9) также локален:

$$P = \int \left(v^1 v^3 - \frac{1}{2} (v^1)^2 v_x^2 + \frac{1}{2} (v^2)^2 \right) dx,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{d}{dx} \\ 0 & \frac{d}{dx} & -\frac{d}{dx} \circ v_x^1 \\ \frac{d}{dx} & -v_x^1 \frac{d}{dx} & v_x^2 \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ v_x^2 + v_x^1 \frac{d}{dx} \circ v_x^1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta P / \delta v^1 \\ \delta P / \delta v^2 \\ \delta P / \delta v^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_x^1 \\ v_x^2 \\ v_x^3 \end{pmatrix}.$$

Перейдем теперь к нашим “гидродинамическим” переменным a, b, c : $a = v_x^1 = f_{xxx}$, $b = v_x^2 = f_{xxt}$, $c = v_x^3 = f_{xtt}$. В этих переменных гамильтониан и импульс становятся нелокальными, зато пуассонова структура (7) в этих переменных является однородным матричным дифференциальным оператором третьего порядка (2), т.е. мы получаем нетривиальный пример системы уравнений, обладающей однородной дифференциально-геометрической пуассоновой структурой третьего порядка. Интересно, что “гидродинамические” переменные a, b, c являются специальными координатами для этой пуассоновой структуры, т.е. в них последняя связность равна нулю (см. § 2.5). В соответствии с приведенным в гл. 2, § 2.5, критерием Потемина–Дойля пуассонова структура (2) не приводится к постоянному виду (2.5.30) локальными заменами координат, так как последняя связность не согласована с метрикой g^{ij} этой пуассоновой структуры. Метрика g^{ij} квадратична в специальных координатах:

$$(10) \quad (g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a \\ 1 & -a & a^2 + 2b \end{pmatrix}.$$

Интересно, что метрика g^{ij} является плоской. Локальной заменой переменных $a = u$, $b = v - u^2$, $c = w + uv - u^3/3$ метрика с нижними индексами

$$(11) \quad (g_{ij}) = \begin{pmatrix} -2b & a & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

линейная в “гидродинамических” переменных a, b, c , приводится к постоянному виду

$$(12) \quad (\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Пуассонова структура (2) обладает нелокальным импульсом

$$P = \int \left[- \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} a \right) \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} c \right) - \frac{1}{2} \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} b \right)^2 + \frac{1}{2} b \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} a \right)^2 \right] dx$$

и нелокальными *функционалами Казимира*, т.е. функционалами C_k , вариационная производная которых лежит в ядре пуассоновой структуры: $M_2^{ij} \delta C_k / \delta u^j \equiv 0$,

$$C_1 = \int \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} a dx, \quad C_2 = \int \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} b dx, \quad C_3 = \int \left[\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} c + a \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} b \right] dx$$

(переменные a, b, c также являются аннуляторами, т.е. плотностями функционалов Казимира для пуассоновой структуры (2)).

Как показано выше, пуассонова структура (2) не может быть приведена к постоянному виду локальными заменами координат. В данном случае, для того, чтобы привести пуассонову структуру (2) к постоянному виду, надо выбрать в качестве новых переменных w^i плотности нелокальных функционалов Казимира C_k . Такой переход осуществляется дифференциальной подстановкой второго порядка: $a = w_x^1$, $b = w_x^2$, $c = w_x^3 - w_x^1 w_x^2 - w^2 w_{xx}^1$. При этом в переменных Казимира w^i пуассонова структура (2) приобретает постоянный вид:

$$(13) \quad (\widetilde{M}_2^{ij}) = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx},$$

а уравнение ассоциативности (3.1.2) становится канонической гамильтоновой системой диффузионного типа

$$(14) \quad w_t^1 = w_x^2, \quad w_t^2 = w_x^3 - (w^2 w_x^1)_x, \quad w_t^3 = (w^2 w_x^2)_x$$

с пуассоновой структурой (13) и локальным гамильтонианом

$$H = \int \left[\frac{1}{2} (w^2)^2 w_x^1 - w^2 w^3 \right] dx.$$

ТЕОРЕМА 3.4 [46]. *Пуассоновы структуры (1) и (2) согласованы и определяют бигамильтонову структуру уравнения ассоциативности (3.1.2).*

Доказательство состоит в проверке прямыми вычислениями тождества Якоби для суммы локальных пуассоновых структур (1) и (2) (эти вычисления проверены также с помощью программы символьных вычислений REDUCE).

Таким образом, построен оператор рекурсии $R = M_2(M_1)^{-1}$ для уравнения ассоциативности (3.1.2), производящий иерархию уравнения (3.1.2) и повышающий порядок высших коммутирующих потоков из иерархии и высших законов сохранения. В следующем параграфе мы рассмотрим первые высшие законы сохранения уравнения (3.1.2), которые оказываются невырожденными и позволяют применить к уравнению ассоциативности (3.1.2) теорему о канонической гамильтоновой конечномерной редукции на стационарное многообразие невырожденных интегралов системы [84], [88], [96].

Приведем здесь еще один найденный автором и Я. Нутку пример системы гидродинамического типа, возникающей в приложениях и обладающей однородной пуассоновой структурой третьего порядка. Это уже рассматривавшиеся выше уравнения газа Чаплыгина $U_t = UU_x + V^{-3}V_x$, $V_t = VU_x + UV_x$, которые преобразованием $U = u_{xt}/u_{xx}$, $V = u_{xx}$ связаны с гиперболическим уравнением Монжа–Ампера: $u_{tt}u_{xx} - u_{xt}^2 = -1$. В гл. 2 были приведены три локальные и одна нелокальная согласованные пуассоновы структуры гидродинамического типа для системы уравнений газа Чаплыгина. Здесь мы найдем для нее однородную пуассонову структуру третьего порядка. В § 1.3 гл. 1 для уравнения Монжа–Ампера были построены локальные

симплектическая и пуассонова структуры. Уравнение Монжа–Ампера, переписанное в виде системы $u_t = q$, $q_t = (q_x^2 - 1)/u_{xx}$, обладает пуассоновой структурой

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{u_{xx}} \\ -\frac{1}{u_{xx}} & \frac{q_x}{u_{xx}^2} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ \frac{q_x}{u_{xx}^2} \end{pmatrix}$$

и гамильтонианом

$$H = \int \left(\frac{1}{2} q^2 u_{xx} + u \right) dx.$$

Введем более удобные “гидродинамические” переменные $a = u_{xx} = V$, $b = q_x = u_{xt} = UV$, в которых уравнения газа Чаплыгина принимают вид:

$$a_t = b_x, \quad b_t = -\frac{b^2 - 1}{a^2} a_x + 2\frac{b}{a} b_x.$$

Пуассонова структура уравнения Монжа–Ампера переходит при этом в однородную пуассонову структуру третьего порядка для газа Чаплыгина:

$$J_1 = \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & \frac{b}{a^2} \frac{d}{dx} + \frac{d}{dx} \circ \frac{b}{a^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} & 0 \\ 0 & -\frac{d}{dx} \end{pmatrix}.$$

Переменные a , b являются специальными для этой однородной пуассоновой структуры (последняя связность равна нулю):

$$J_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{2b}{a^2} \end{pmatrix} \frac{d^3}{dx^3} + \begin{pmatrix} 0 & \frac{2a_x}{a^2} \\ \frac{a_x}{a^2} & 6\frac{ba_x}{a^3} - 3\frac{b_x}{a^2} \end{pmatrix} \frac{d^2}{dx^2} \\ + \begin{pmatrix} 0 & \frac{a_{xx}}{a^2} - 2\frac{a_x^2}{a^3} \\ 0 & 2\frac{ba_{xx}}{a^3} + 4\frac{b_x a_x}{a^3} - 6\frac{ba_x^2}{a^4} - \frac{b_{xx}}{a^2} \end{pmatrix} \frac{d}{dx}.$$

Метрика

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{a} \\ -\frac{1}{a} & -\frac{2b}{a^2} \end{pmatrix}$$

является плоской метрикой, но в соответствии с критерием Потемина–Дойля эта пуассонова структура не может быть приведена к постоянному виду локальной заменой координат на многообразии (иначе она была бы постоянной в специальных координатах). Покажем, что метрика плоская: $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 2b & -a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$, $ds^2 = 2b da^2 - 2a da db = 2da(b da - a db) = 2a^2 da(-d(b/a)) = -\frac{2}{3}d(a^3)d(b/a)$. Таким образом, локальной заменой переменных $u^1 = \frac{1}{3}a^3$, $u^2 = -b/a$ метрика g_{ij} приводится к постоянному виду $(\tilde{g}_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Пуассонова структура приводится к постоянному виду с помощью дифференциальной подстановки второго порядка. Действительно, нелокальные функционалы

$$C_1 = \int \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} a dx, \quad C_2 = \int a \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} b dx, \quad C_1 = \int \left(\left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} a \right)^2 dx$$

являются функционалами Казимира пуассоновой структуры. Выбирая в качестве новых переменных плотности двух первых функционалов Казимира, получаем

$$v^1 = \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} a, \quad v^2 = a \left(\frac{d}{dx} \right)^{-1} b,$$

или

$$a = v_x^1, \quad b = \frac{v_x^2}{v_x^1} - \frac{v^2 v_{xx}^1}{(v_x^1)^2}.$$

В переменных (v^1, v^2) пуассонова структура становится постоянной:

$$\tilde{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}.$$

Вернемся к уравнениям ассоциативности. В общем случае для произвольного N уравнения ассоциативности сводятся к $N - 2$ коммутирующим эволюционным одномерным однородным недиагонализуемым $N(N - 1)/2$ -компонентным интегрируемым системам гидродинамического типа.

Рассмотрим детально случай $N = 4$ для антидиагональной метрики [47]:

$$(15) \quad \eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В этом случае функция F имеет вид: $F = \frac{1}{2}(t^1)^2 t^4 + t^1 t^2 t^3 + f(t^2, t^3, t^4)$, и соответствующие уравнения ассоциативности редуцируются к следующей сложной переопределенной системе:

$$(16) \quad \begin{aligned} -2f_{xyz} - f_{xyy}f_{xx} + f_{yyy}f_{xxx} &= 0, \\ -f_{xzz} - f_{xyy}f_{xxz} + f_{yyz}f_{xxx} &= 0, \\ -2f_{xyz}f_{xxz} + f_{xzz}f_{xyy} + f_{yzz}f_{xxx} &= 0, \\ f_{zzz} - (f_{xyz})^2 + f_{xzz}f_{xyy} - f_{yyz}f_{xxz} + f_{yzz}f_{xyy} &= 0, \\ f_{yyy}f_{xzz} - 2f_{yyz}f_{xyz} + f_{yzz}f_{xyy} &= 0, \end{aligned}$$

где $x = t^2, y = t^3, z = t^4$. После введения новых независимых переменных $f_{xxx} = a, f_{xxy} = b, f_{xxz} = c, f_{xyy} = d, f_{xyz} = e, f_{xzz} = f$ система (16) переписывается как пара коммутирующих 6×6 систем гидродинамического типа:

$$(17) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} b \\ d \\ e \\ R \\ P \\ S \end{pmatrix}_x,$$

$$(18) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix}_z = \begin{pmatrix} c \\ e \\ f \\ P \\ S \\ Q \end{pmatrix}_x,$$

где введены обозначения $f_{yyz} = P = (cd + f)/a$, $f_{yyy} = R = (2e + bd)/a$, $f_{yzz} = S = (2ec - bf)/a$, $f_{zzz} = Q = e^2 - fd + (c^2d + cf - 2bec + b^2f)/a$. Системы уравнений (17) и (18) связаны со следующей спектральной задачей:

$$(19) \quad \Psi_x = \lambda A \Psi, \quad \Psi_y = \lambda B \Psi, \quad \Psi_z = \lambda C \Psi,$$

где матрицы A, B, C заданы формулами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ c & b & a & 0 \\ e & d & b & 1 \\ f & e & c & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ e & d & b & 1 \\ P & R & d & 0 \\ S & P & e & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ f & e & c & 0 \\ S & P & e & 0 \\ Q & S & f & 0 \end{pmatrix}.$$

Условия совместности для спектральной задачи (19) приводят к условию коммутации матриц A, B, C : $[A, B] = [A, C] = [B, C] = 0$, и уравнениям $A_y = B_x$, $A_z = C_x$, $B_z = C_x$, которые тождественно выполнены в силу уравнений (17) и (18).

Рассмотрим собственные значения u^i матрицы A , которые являются корнями характеристического полинома четвертой степени

$$\det(A - \lambda E) = \lambda^4 - 2b\lambda^3 + (b^2 - ad - 2c)\lambda^2 + 2(bc - ae)\lambda + c^2 - af = 0.$$

Переменные b, c, e, f связаны с u^1, u^2, u^3, u^4, a, d формулами Виета:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{2}(u^1 + u^2 + u^3 + u^4), \\ c &= \frac{1}{4}((u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2) - \frac{1}{8}(u^1 + u^2 + u^3 + u^4)^2 - \frac{1}{2}ad, \\ e &= bc/a + (u^1u^2u^3 + u^1u^2u^4 + u^1u^3u^4 + u^2u^3u^4)/a, \\ f &= (c^2 - u^1u^2u^3u^4)/a. \end{aligned}$$

В новых переменных a, u^1, u^2, u^3, u^4, d обе системы (17) и (18) представляются в гамильтоновой форме

$$(20) \quad \begin{pmatrix} a \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ d \end{pmatrix}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \partial e / \partial a \\ \partial e / \partial u^1 \\ \partial e / \partial u^2 \\ \partial e / \partial u^3 \\ \partial e / \partial u^4 \\ \partial e / \partial d \end{pmatrix},$$

с гамильтонианом $H = \int e dx$, и

$$(21) \quad \begin{pmatrix} a \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ d \end{pmatrix}_z = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \partial f / \partial a \\ \partial f / \partial u^1 \\ \partial f / \partial u^2 \\ \partial f / \partial u^3 \\ \partial f / \partial u^4 \\ \partial f / \partial d \end{pmatrix},$$

с гамильтонианом $H = \int \frac{1}{2} f dx$, соответственно.

Характеристические скорости систем (17) и (18) задаются формулами

$$\begin{aligned}\lambda^1 &= (u^1 + u^2 - u^3 - u^4)/(2a), & \lambda^2 &= -\lambda^1, \\ \lambda^3 &= (u^1 - u^2 + u^3 - u^4)/(2a), & \lambda^4 &= -\lambda^3, \\ \lambda^5 &= (-u^1 + u^2 + u^3 - u^4)/(2a), & \lambda^6 &= -\lambda^5\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\mu^1 &= \mu + (u^3 u^4)/a, & \mu^2 &= \mu + (u^1 u^2)/a, \\ \mu^3 &= \mu + (u^2 u^4)/a, & \mu^4 &= \mu + (u^1 u^3)/a, \\ \mu^5 &= \mu + (u^1 u^4)/a, & \mu^6 &= \mu + (u^2 u^3)/a,\end{aligned}$$

где

$$\mu = -\frac{1}{2}d + \frac{(u^1)^2 + (u^2)^2 + (u^3)^2 + (u^4)^2}{8a} - \frac{u^1 u^2 + u^1 u^3 + u^1 u^4 + u^2 u^3 + u^2 u^4 + u^3 u^4}{4a},$$

соответственно.

Укажем также вид постоянной невырожденной пуассоновой структуры

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx}$$

в первоначальных переменных a, b, c, d, e, f :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a & -2 & b & 2c \\ 0 & -2 & b & 0 & d & 2e \\ a & b & 2c & d & 2e & 3f \\ -2 & 0 & d & 0 & R & 2P \\ b & d & 2e & R & 2P & 3S \\ 2c & 2e & 3f & 2P & 3S & 4Q \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_x & 0 & b_x & 2c_x \\ 0 & 0 & b_x & 0 & d_x & 2e_x \\ 0 & 0 & c_x & 0 & e_x & 2f_x \\ 0 & 0 & d_x & 0 & R_x & 2P_x \\ 0 & 0 & e_x & 0 & P_x & 2S_x \\ 0 & 0 & f_x & 0 & S_x & 2Q_x \end{pmatrix}.$$

Обе исследованные системы (17) и (18) преобразуются к интегрируемой системе 6-волн.

В заключение этого параграфа рассмотрим более общий вид уравнений ассоциативности, когда условие 1, определяющее метрику $\eta_{\alpha\beta}$ через функцию $F(t^1, \dots, t^N)$, не предполагается выполненным, т.е. теперь $\eta_{\alpha\beta}$ – произвольная постоянная невырожденная симметричная матрица, с помощью которой опускаются и поднимаются индексы у структурных констант. Это означает, что у ассоциативных алгебр $A(t)$ не

предполагается наличия единиц. Метрика $\eta_{\alpha\beta}$ будет по-прежнему определять инвариантное невырожденное скалярное произведение на коммутативных ассоциативных алгебрах $A(t)$. Такие уравнения ассоциативности возникают уже при $N = 2$, и они также рассматривались Виттеном в [147], [148]:

$$(22) \quad F_{t^1 t^1 t^1} F_{t^2 t^2 t^2} = F_{t^1 t^1 t^2} F_{t^1 t^2 t^2},$$

если

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

и

$$(23) \quad F_{t^1 t^1 t^1} F_{t^1 t^2 t^2} + F_{t^1 t^1 t^2} F_{t^2 t^2 t^2} = (F_{t^1 t^1 t^2})^2 + (F_{t^1 t^2 t^2})^2,$$

если

$$(\eta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

ТЕОРЕМА 3.5 [109], [110]. *Уравнения (22) и (23) эквивалентны интегрируемым недиагонализуемым однородным системам гидродинамического типа*

$$(24) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -bc/a^2 & c/a & b/a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_x,$$

$$(25) \quad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c/b & 1 - c^2/b^2 + ac/b^2 & 2c/b - a/b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}_x,$$

соответственно.

Рассмотрим подробнее уравнение Виттена (22). Вводя, как и прежде, новые переменные $a = F_{xxx}$, $b = F_{xxt}$, $c = F_{xtt}$, где $x = t^2$, $t = t^3$, мы можем переписать уравнение (22) как однородную систему гидродинамического типа

$$(26) \quad a_t = b_x, \quad b_t = c_x, \quad c_t = (bc/a)_x.$$

Хотя система (26) и похожа на систему (7), исследованную выше, на самом деле она является значительно более простой: в совместной работе Е. В. Ферапонтова и автора [48] показано, что она линеаризуется последовательностью преобразований. Введем новые переменные $R^1 = \sqrt{c/a}$, $R^2 = b - \sqrt{ac}$, $R^3 = b + \sqrt{ac}$. В переменных R^i система (26) приобретает вид

$$(27) \quad R_t^1 = R^1 \frac{R^3 + R^2}{R^3 - R^2} R_x^1, \quad R_t^2 = -(R^1 R^2)_x, \quad R_t^3 = (R^1 R^3)_x,$$

откуда следует, что R^1 является инвариантом Римана (в отличие от системы (7), которая не обладает ни одним инвариантом Римана). Рассмотрим преобразование по решению

$$(28) \quad d\tilde{x} = (R^3 - R^2) dx + R^1(R^3 + R^2) dt, \quad d\tilde{t} = (R^3 + R^2) dx + R^1(R^3 - R^2) dt.$$

В переменных $\tilde{x}, \tilde{t}$ система (27) имеет вид

$$(29) \quad R_{\tilde{t}}^1 = 0, \quad R_{\tilde{t}}^2 = -R_{\tilde{x}}^2 - \frac{R^2(R^3 - R^2)}{2R^1R^3}R_{\tilde{x}}^1, \quad R_{\tilde{t}}^3 = R_{\tilde{x}}^3 - \frac{R^3(R^3 - R^2)}{2R^1R^2}R_{\tilde{x}}^1.$$

После преобразования (28) собственные значения системы (27), которые равны $\lambda^1 = R^1(R^3 + R^2)/(R^3 - R^2)$, $\lambda^2 = R^1$, $\lambda^3 = -R^1$, становятся константами: $\lambda^1 = 0$, $\lambda^2 = 1$, $\lambda^3 = -1$, соответственно. В совместной работе Е. В. Ферапонтова и автора [48] показано, что система (29) приводится к следующему виду:

$$(30) \quad p_{\tilde{t}}^1 = 0, \quad p_{\tilde{t}}^2 = p_{\tilde{x}}^2 - \frac{1}{2}p^1(p^2 + p^3), \quad p_{\tilde{t}}^3 = -p_{\tilde{x}}^3 + \frac{1}{2}p^1(p^2 + p^3),$$

переменные p^i и R^i связаны формулами

$$(31) \quad p^1 = \frac{R_{\tilde{x}}^1}{R^1}, \quad p^2 = \left(\frac{1}{R^3} - \frac{1}{R^2} \right) \frac{R_{\tilde{x}}^1}{R^1} + 2 \frac{R_{\tilde{x}}^3}{(R^3)^2}, \quad p^3 = \left(\frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^3} \right) \frac{R_{\tilde{x}}^1}{R^1} + 2 \frac{R_{\tilde{x}}^2}{(R^2)^2},$$

т.е. преобразование от R^i к p^i является дифференциальной подстановкой первого порядка. Система уравнений (30) фактически является линейной с общим решением

$$(32) \quad p^1 = \phi(\tilde{x}), \quad p^2 = \frac{1}{2}(g_{\tilde{x}} + g_{\tilde{t}}), \quad p^3 = \frac{1}{2}(g_{\tilde{x}} - g_{\tilde{t}}),$$

где $\phi(\tilde{x})$ является произвольной функцией переменной $\tilde{x}$, в то время как $g(\tilde{x}, \tilde{t})$ – произвольное решение линейного волнового уравнения

$$(33) \quad g_{\tilde{t}\tilde{t}} - g_{\tilde{x}\tilde{x}} + \phi(\tilde{x})g_{\tilde{x}} = 0.$$

§ 3.3. Теорема о каноническом гамильтоновом представлении ограничения произвольной эволюционной системы на множество стационарных точек ее невырожденного интеграла и ее приложения к уравнениям ассоциативности и системам гидродинамического типа

В настоящем параграфе формулируется абсолютно общая теорема о том, что ограничение произвольной одномерной эволюционной системы на стационарное многообразие ее невырожденного интеграла всегда является канонической гамильтоновой конечномерной динамической системой, причем ее гамильтониан всегда находится в инволюции с гамильтонианом лагранжевой системы для стационарных точек рассматриваемого интеграла. Эта теорема обобщается на многомерные эволюционные системы и на системы, не являющиеся трансляционно-инвариантными. Кроме того, рассмотрены приложения этой теоремы к уравнениям ассоциативности и неоднородным системам гидродинамического типа, приводящие к интегрируемым каноническим гамильтоновым конечномерным редукциям этих систем.

Сохранение гамильтоновости потока при ограничении на множество неподвижных точек другого гамильтонова потока, коммутирующего с данным, впервые было замечено С. П. Новиковым в [118] при ограничении уравнения Кортевега–де Вриза (КдВ) на множество стационарных решений высших КдВ. В частности, все конечнозонные решения уравнения КдВ получаются в точности этой конструкцией при ограничении

уравнения КдВ на множество стационарных решений соответствующих коммутирующих гамильтоновых потоков и решения получаемых при этом канонических гамильтоновых интегрируемых конечномерных динамических систем. В работе [13] (см. также [29], [122]) О. И. Богоявленский и С. П. Новиков доказали следующую замечательную теорему о связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач: из коммутативности двух однокомпонентных гамильтоновых потоков следующего специального вида:

$$(1) \quad u_t = \frac{d}{dx} \frac{\delta I}{\delta u}, \quad I = \int L(u, u_x, \dots, u_{(n)}) dx,$$

$$(2) \quad u_t = \frac{d}{dx} \frac{\delta I_1}{\delta u}, \quad I_1 = \int L_1(u, u_x, \dots, u_{(k)}) dx,$$

следует, что при $k < n$ поток (2) является гамильтоновым на множестве неподвижных точек потока (1), при этом гамильтониан $(-Q_h)$ потока (2) на пространстве решений стационарного уравнения $\delta I / \delta u = -h$, $h = \text{const}$, определяется из следующего соотношения:

$$\left(\frac{\delta I}{\delta u} + h \right) \frac{d}{dx} \frac{\delta I_1}{\delta u} \equiv \frac{dQ_h}{dx}.$$

Кроме того, в [13] было высказано предположение, что теорема верна и для $k \geq n$ (вообще говоря, при доказательстве, предложенном в [13], соотношение $k < n$ весьма существенно), и что она может быть обобщена на эволюционные уравнения, которые гамильтоновы и относительно других постоянных скобок Пуассона вида

$$A_{2r+1} = \sum_{i=0}^r c_i \frac{d^{2i+1}}{dx^{2i+1}}, \quad c_i = \text{const}.$$

В [58], [59] И. М. Гельфанд и Л. А. Дикий рассматривали обобщение этой теоремы на гамильтоновы системы типа Лакса $L_t = [L, A]$ (для систем типа Лакса, гамильтоновых относительно пуассоновой структуры Гельфанда–Дикого и ограничиваемых на множество неподвижных точек высших коммутирующих потоков из соответствующей иерархии, – отметим, что лагранжевость стационарной задачи для операторов L и A взаимно простых порядков доказана А. П. Веселовым в [141]). После этого задача о распространении теоремы Богоявленского–Новикова на эволюционные системы, которые гамильтоновы относительно произвольной постоянной матричной локальной скобки Пуассона, была поставлена также И. М. Гельфандом, Ю. И. Маниным и М. А. Шубиным в работе [64]. Кроме того, задача об исследовании возможности обобщения результатов О. И. Богоявленского–С. П. Новикова и И. М. Гельфанда–Л. А. Дикого на многомерный случай была поставлена Ю. И. Маниным (см. [81, с. 12]). При этом всегда речь шла об ограничении гамильтоновых эволюционных потоков с конкретными заданными бесконечномерными пуассоновыми структурами. Гамильтоновость потока на соответствующем стационарном многообразии индуцировалась бесконечномерной гамильтоновой структурой рассматриваемых коммутирующих эволюционных потоков, т.е. конечномерная гамильтонова структура порождалась (была редукцией) бесконечномерной. Все эти

теоремы и гипотезы формулировались как утверждения или предположения о связи соответствующих гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач.

В работах автора [84], [88] принцип Боявленского–Новикова впервые сформулирован и доказан для всех скобок Пуассона. Более того, интересно, что, как показано автором, условие гамильтоновости исходной нестационарной задачи вообще не является существенным. В [84], [88] автором сформулирован и доказан новый значительно более *общий принцип: любая эволюционная система является канонической гамильтоновой системой на множестве стационарных точек ее невырожденного интеграла.*

Напомним, что для произвольного функционала I пространство решений лагранжевой системы

$$\frac{\delta I}{\delta u^i} = 0$$

называется *стационарным многообразием* или *множеством стационарных точек* этого интеграла.

Все упоминавшиеся выше теоремы, гипотезы и предположения (в том числе обобщения на многомерный случай и случай нетрансляционно-инвариантных систем) являются прямыми следствиями этого общего принципа. Как показал впоследствии А. П. Веселов [142] (см. также [143], [144]), этот общий принцип переносится и на дискретные системы.

Отметим также, что в предшествующих работах всегда стартовали с двух коммутирующих гамильтоновых потоков, и в этом случае инвариантность стационарных решений одного из потоков относительно другого потока, коммутирующего с ним, доказывается элементарно. Это прямое следствие того, что потоки коммутируют. При этом в силу гамильтоновости данных коммутирующих эволюционных потоков задача сводится к ограничению одного из потоков на стационарное многообразие соответствующего невырожденного интеграла. В нашей формулировке для произвольного эволюционного потока инвариантность множества стационарных точек его интеграла уже сама по себе не является очевидной. Тем не менее, это также абсолютно общий факт, причем фактически формально алгебраический, не требующий никаких функциональных предположений. Докажем эту несложную, но важную, общую лемму.

Рассмотрим произвольную многомерную эволюционную систему уравнений:

$$(3) \quad u_t^k = F^k(x, u, \dots, u_{(r)}^s, \dots),$$

где

$$x = (x^1, \dots, x^n), \quad u = (u^1, \dots, u^N), \quad r = (r_1, \dots, r_n),$$

$$u_{(r)}^s = \frac{\partial^{|r|} u^s}{\partial (x^1)^{r_1} \dots \partial (x^n)^{r_n}}, \quad |r| = r_1 + \dots + r_n.$$

Пусть

$$(4) \quad I = \int L(x, u, \dots, u_{(r)}^s, \dots) d^n x$$

– первый интеграл системы (3).

ЛЕММА 3.2 [76]. *Множество стационарных точек интеграла I , т.е. пространство решений лагранжевой системы*

$$(5) \quad \frac{\delta I}{\delta u^k} = 0, \quad 1 \leq k \leq N,$$

является инвариантным для эволюционного потока (3).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{u^k(x), 1 \leq k \leq N\}$ – произвольное решение лагранжевой системы (5). Рассмотрим $\{u^k(x, t)\}$ – решение эволюционной системы (3) с начальными условиями $u^k(x, 0) = u^k(x)$. Теперь для произвольных констант t_0 и ε , а также для произвольной вектор-функции $\{w^k(x)\}$, рассмотрим $\{u^k(x, t, \varepsilon)\}$ – решение эволюционной системы (3) со следующими начальными условиями при $t = t_0$: $u^k(x, t_0, \varepsilon) = u^k(x, t_0) + \varepsilon w^k(x)$. В силу определения вариационной производной для произвольного функционала I всегда имеется следующее соотношение:

$$(6) \quad \frac{d}{d\varepsilon} I[u^k(x, t, \varepsilon)]|_{\varepsilon=0} = \int \frac{\delta I}{\delta u^s} [u^k(x, t, 0)] v^s(x, t) d^n x,$$

где $v^s(x, t) = \left. \frac{d}{d\varepsilon} u^s(x, t, \varepsilon) \right|_{\varepsilon=0}$. Поскольку I – интеграл системы (3), то левая часть соотношения (6) не зависит от t , а правая часть при $t = 0$ обращается в нуль, так как $u^k(x, t_0, 0) = u^k(x, t_0)$ по определению, и, следовательно, $u^k(x, t, 0) = u^k(x, t)$ как решения эволюционной системы (3) с одинаковыми начальными условиями при $t = t_0$, а $u^k(x, 0)$ является решением лагранжевой системы (5). Таким образом,

$$(7) \quad \int \frac{\delta I}{\delta u^s} [u^k(x, t, 0)] v^s(x, t) d^n x = 0.$$

При $t = t_0$ соотношение (7) приобретает вид

$$\int \frac{\delta I}{\delta u^s} [u^k(x, t_0)] w^s(x) d^n x = 0,$$

откуда в силу произвольности t_0 и $\{w^k(x)\}$ немедленно следует, что $u(x, t)$ – решение лагранжевой системы (5) при любом t , т.е. пространство решений лагранжевой системы (5) инвариантно относительно эволюционного потока (3).

Важно отметить, что лемму 3.2 можно доказать, оставаясь в рамках формального вариационного исчисления. В работе автора [84] (см. также [88]) в 1984 году была опубликована явная конструкция (далее мы остановимся на ней детально) ограничения эволюционного потока на стационарное многообразие его невырожденного интеграла, для которой доказательство всех утверждений и формул проводятся в рамках дифференциальной алгебры и формального вариационного исчисления (в том числе это относится и к утверждению об инвариантности, сформулированному в лемме 3.2, – оно автоматически следует из доказательства предъявленной конструкции). Кроме

того, лемма 3.2 немедленно следует из следующего тождества, которое выполняется для любого эволюционного потока вида (3) и любого функционала вида (4):

$$(8) \quad \left(\frac{\delta I}{\delta u^i} \right)_t - \frac{\delta}{\delta u^i}(I_t) = (-1)^{|r|+1} \frac{\partial^{|r|}}{\partial (x^1)^{r_1} \dots \partial (x^n)^{r_n}} \left(\frac{\partial F^s}{\partial u_{(r)}^i} \frac{\delta I}{\delta u^s} \right).$$

Если функционал $I = \int L(x, u, \dots, u_{(r)}^s, \dots) d^n x$ в формуле (8) является интегралом эволюционного потока (3), то $\frac{\delta}{\delta u^i}(I_t) = 0$, и из формулы (8) немедленно следует, что пространство решений лагранжевой системы (5) инвариантно относительно эволюционного потока (3).

Для упрощения обозначений и слишком громоздких вычислений мы будем далее рассматривать детально только одномерный случай ($n = 1$), но укажем впоследствии необходимую модификацию всех ключевых формул для многомерного случая и приведем примеры применения нашей конструкции в многомерном случае (отметим, что все вычисления и результаты, представленные ниже, полностью переносятся на многомерный случай).

Итак, рассматривается произвольная одномерная эволюционная система уравнений:

$$(9) \quad (u^k)_t = F^k(x, u, u_x, \dots, u_{(i)}^j, \dots), \quad 0 \leq i \leq m_{kj}, \quad 1 \leq k, j \leq N, \quad u_{(i)}^j = \frac{\partial^i u^j}{\partial x^i},$$

обладающая невырожденным первым интегралом

$$(10) \quad I = \int L(x, u, u_x, \dots, u_{(i)}^j, \dots) dx, \quad 0 \leq i \leq n_j, \quad 1 \leq j \leq N.$$

При этом существует функция $Q(x, u, u_x, \dots, u_{(i)}^j, \dots)$ такая, что

$$(11) \quad \frac{\delta I}{\delta u^k} F^k \equiv \frac{dQ}{dx}.$$

Соотношение (11) эквивалентно условию, что функционал (10) является первым интегралом эволюционной системы (9).

В силу леммы 3.2 пространство решений соответствующей лагранжевой системы (5) является инвариантным для эволюционной системы (9).

При условии невырожденности

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial u_{(n_k)}^k \partial u_{(n_j)}^j} \right) \neq 0$$

лагранжиан L определяет $(\sum_{s=1}^N 2n_s)$ -мерное фазовое пространство T лагранжевой системы (5). Введем стандартным образом фазовые переменные (q_i^k, p_k^i) для лагранжевой системы (5), определяемой функционалом (10):

$$(12) \quad q_i^k = u_{(i-1)}^k, \quad p_k^i = \sum_{s=0}^{n_k-i} (-1)^s \frac{d^s}{dx^s} \frac{\partial L}{\partial u_{(i+s)}^k}, \quad 1 \leq i \leq n_k, \quad 1 \leq k \leq N.$$

Гамильтониан лагранжевой системы (5), определяемой функционалом (10), имеет вид

$$(13) \quad H = \sum_{k=1}^N \left(\sum_{s=1}^{n_k-1} p_k^s q_{s+1}^k + p_k^{n_k} (q_{n_k}^k)_x \right) - L(x, q_i^k, (q_{n_k}^k)_x).$$

Для невырожденного лагранжиана L из соотношений

$$p_k^{n_k} = \frac{\partial L}{\partial (q_{n_k}^k)_x}, \quad 1 \leq k \leq N,$$

находим выражение для $(q_{n_k}^k)_x$ и, соответственно, для гамильтониана H через фазовые переменные (12): $(q_{n_k}^k)_x = f(x, q_i^j, p_s^{n_s})$.

На фазовом пространстве T определена стандартная конечномерная лагранжева скобка Пуассона

$$(14) \quad \{h, g\} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} \left(\frac{\partial h}{\partial q_i^k} \frac{\partial g}{\partial p_k^i} - \frac{\partial h}{\partial p_k^i} \frac{\partial g}{\partial q_i^k} \right).$$

Соответственно, лагранжева система (5) приобретает вид конечномерной канонической гамильтоновой динамической системы:

$$(15) \quad (q_i^k)_x = \frac{\partial H}{\partial p_k^i} \equiv \{q_i^k, H\}, \quad (p_k^i)_x = -\frac{\partial H}{\partial q_i^k} \equiv \{p_k^i, H\}.$$

Теперь, если выразить функцию Q через фазовые переменные $\widehat{Q} = \widehat{Q}(q, p)$, то имеет место следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.6 [84], [88]. *Произвольный одномерный эволюционный поток (9), ограниченный на множество стационарных точек своего невырожденного интеграла I (10), является канонической гамильтоновой конечномерной динамической системой с гамильтонианом $-\widehat{Q}$:*

$$(16) \quad (q_i^k)_t = -\{q_i^k, \widehat{Q}\}, \quad (p_k^i)_t = -\{p_k^i, \widehat{Q}\},$$

причем в случае трансляционной инвариантности потока (9) и интеграла I (10) гамильтониан $-\widehat{Q}$ находится в инволюции с гамильтонианом H (13) лагранжевой системы (5), определяемой функционалом (10), относительно стандартной лагранжевой конечномерной скобки Пуассона (14) на фазовом пространстве T : $\{\widehat{Q}, H\} = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Прежде всего, заметим, что, вводя переменные (q_i^k, p_k^i) формулами (12), определяя функцию H формулой (13), но не рассматривая пока условия (5), мы получаем следующие очевидные, но важные, функциональные *тождества* на пространстве вектор-функций $\{u^i(x)\}$:

$$(17) \quad (p_k^1)_x + \frac{\partial H}{\partial q_1^k} \equiv -\frac{\delta I}{\delta u^k}; \quad (p_k^i)_x + \frac{\partial H}{\partial q_i^k} \equiv 0, \quad i > 1; \quad (q_i^k)_x - \frac{\partial H}{\partial p_k^i} \equiv 0.$$

Из соотношений (12) и (17) все производные $u_{(i)}^k$ выражаются через переменные q_i^k, p_k^i и $(p_k^1)_{(j)}$. Перепишем тождество (11) в этих новых переменных, подставляя функцию $Q = Q(x, q_i^k, p_k^i, (p_k^1)_{(j)})$:

$$(18) \quad \left(-(p_k^1)_x - \frac{\partial H}{\partial q_1^k} \right) F^k \equiv \frac{\partial Q}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial Q}{\partial q_i^k} \frac{\partial H}{\partial p_k^i} - \sum_{i=2}^{n_k} \frac{\partial Q}{\partial p_k^i} \frac{\partial H}{\partial q_i^k} + \sum_{j=0}^{s_k} \frac{\partial Q}{\partial (p_k^1)_{(j)}} (p_k^1)_{(j+1)}.$$

Введем обозначение $\widehat{G}$ для функции $G(x, q_i^k, p_k^i, (p_k^1)_{(j)})$, выраженной через фазовые переменные с помощью соотношений $(p_k^1)_x = -\frac{\partial H}{\partial q_1^k}$ и второго и третьего тождеств из формулы (17): $\widehat{G} = \widehat{G}(x, q_i^k, p_k^i)$. Это соответствует, в точности, редукции на пространство решений лагранжевой системы (5). Из тождества (18), в частности, следует, что

$$(19) \quad \frac{\partial \widehat{Q}}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial \widehat{Q}}{\partial q_i^k} \frac{\partial H}{\partial p_k^i} - \sum_{i=1}^{n_k} \frac{\partial \widehat{Q}}{\partial p_k^i} \frac{\partial H}{\partial q_i^k} = 0,$$

т.е. $\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial x} + \{\widehat{Q}, H\} \equiv 0$. Соответственно, в трансляционно-инвариантном случае обе функции $\widehat{Q}$ и H обязаны быть интегралами в инволюции для конечномерной канонической гамильтоновой системы (15): $\{\widehat{Q}, H\} \equiv 0$.

Рассмотрим динамику фазовых переменных (q_i^k, p_k^i) в силу эволюционного потока (9). Очевидно, что $(q_1^k)_t = \widehat{F}^k$. Самые большие трудности во всей предлагаемой конструкции доставляет доказательство следующей леммы.

ЛЕММА 3.3. *Из соотношения (18) следует, что*

$$(20) \quad \widehat{F}^k = -\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial p_k^1}.$$

В силу леммы 3.3 $(q_1^k)_t = -\frac{\partial \widehat{Q}}{\partial p_k^1}$. Динамика остальных фазовых переменных порождается динамикой этой переменной q_1^k (как и должно быть, так как по существу $q_1^k = u^k(x)$).

СЛЕДСТВИЕ 3.1. Произвольные коммутирующие эволюционные потоки $u_t^k = F^k$ и $u_\tau^s = G^s$, обладающие общим первым интегралом I , порождают по предположенной явной конструкции интегралы Q_1, Q_2 стационарной системы $\frac{\delta I}{\delta u^i} = 0$, причем $\{Q_1, Q_2\} = \text{const}$ для стандартной лагранжевой скобки Пуассона на фазовом пространстве стационарной системы.

СЛЕДСТВИЕ 3.2. Рассмотрим два произвольных гамильтоновых потока

$$(21) \quad u_t^k = \{u^k, H_1\} \equiv L^{ks} \frac{\delta H_1}{\delta u^s},$$

$$(22) \quad u_\tau^k = \{u^k, H_2\} \equiv L^{ks} \frac{\delta H_2}{\delta u^s},$$

задаваемых при помощи одной и той же произвольной локальной пуассоновой структуры $\{u^k(x), u^s(y)\} = L^{ks}[u(x)]\delta(x-y)$, где L^{ks} – дифференциальный гамильтонов оператор, коэффициенты которого зависят от x , $u^k(x)$ и их производных $u_{(n)}^k(x)$. Если гамильтонианы $H_i = \int h_i(x, u, u_x, \dots) dx$ потоков (21) и (22) находятся в инволюции, т.е. $\{H_1, H_2\} = 0$, то эти эволюционные потоки коммутируют, так как условие коммутации потоков имеет вид

$$L^{ks} \frac{\delta}{\delta u^s} \{H_1, H_2\} = 0,$$

и теорема 3.4 устанавливает каноническую гамильтоновость эволюционного потока (21) на множестве неподвижных точек потока (22):

$$\frac{\delta H_2}{\delta u^s} = \frac{\delta g}{\delta u^s}, \quad \frac{\delta g}{\delta u^s} \in \text{Ker}(L^{ks}).$$

В частности, если эволюционный поток задается согласованной парой скобок Пуассона, то он обладает высшими аналогами, которые удовлетворяют условиям следствия 3.2 (например, такими свойствами обладают системы типа Лакса $L_t = [L, A]$ и большинство известных интегрируемых систем уравнений в частных производных). Многие хорошо известные частные решения эволюционных систем (конечнозонные решения уравнения Кортевега–де Вриза, ленгмюровские солитоны и многие другие) могут быть получены редукцией системы на множество стационарных точек соответствующего интеграла по предложенной схеме.

Доказательство теоремы полностью переносится на многомерный случай. Предложенная естественная редукция позволяет понизить размерность системы, обладающей локальным законом сохранения, при этом редуцированная система всегда имеет каноническую гамильтонову структуру. Мы приведем соответствующие многомерные формулы и рассмотрим их применение на конкретных модельных примерах. В случае вырожденных законов сохранения необходимо применение схемы Дирака – теорема может быть обобщена и на этот случай.

Итак, рассмотрим произвольную многомерную эволюционную систему уравнений (3). Пусть

$$(23) \quad I = \int L(x, u, \dots, u_{(r)}^s, \dots) d^n x$$

– первый интеграл эволюционной системы (3), т.е. существуют такие функции $Q^m = Q^m(x, u, \dots, u_{(r)}^s, \dots)$, $1 \leq m \leq n$, что выполнено соотношение:

$$\frac{\delta I}{\delta u^k} F^k \equiv \sum_{m=1}^n D_m Q^m,$$

где D_m – оператор полной производной по переменной x^m :

$$D_m = \frac{\partial}{\partial x^m} + u_{x^m}^k \frac{\partial}{\partial u^k} + \dots$$

Мы предполагаем, что старшие производные полевых переменных $u^k(x)$ по переменной x^1 , входящие в функцию L , не являются смешанными и имеют порядок n_k : $u_{(n_k)(0)\dots(0)}^k$. В этом случае фазовые переменные стационарной системы

$$(24) \quad \frac{\delta I}{\delta u^k} = 0$$

определяются по следующим формулам (как и в одномерном случае, требуется также невырожденность лагранжиана L по соответствующим старшим производным $u_{(n_k)(0)\dots(0)}^k$ по переменной x^1):

$$(25) \quad q_s^k = u_{(s-1)(0)\dots(0)}^k, \quad p_k^s = \sum_{j=0}^{n_k-s} (-1)^j D_1^j \frac{\delta \tilde{I}}{\delta u_{(s+j)(0)\dots(0)}^k}, \quad 1 \leq s \leq n_k, \quad 1 \leq k \leq N,$$

где

$$(26) \quad \tilde{I} = \int L(x, u, \dots, u_{(r)}^s, \dots) dx^2 \dots dx^n.$$

В формулах (25) при взятии вариационных производных все производные переменных $u^k(x)$ по x^1 разных порядков считаются независимыми переменными (как и должно быть для функционала вида (26)). Соответственно, гамильтониан стационарной системы имеет вид

$$H = \int (p_k^j q_{j+1}^k + p_k^{n_k} (q_{n_k}^k)_{x^1} - L) dx^2 \dots dx^n,$$

а на фазовом пространстве определена лагранжева скобка Пуассона

$$(27) \quad \{H, G\} = \sum_{k=1}^N \sum_{i=1}^{n_k} \int \left(\frac{\delta H}{\delta q_i^k} \frac{\delta G}{\delta p_k^i} - \frac{\delta H}{\delta p_k^i} \frac{\delta G}{\delta q_i^k} \right) dx^2 \dots dx^n.$$

Соответственно, лагранжева система (24) приобретает вид канонической гамильтоновой динамической системы:

$$(28) \quad (q_i^k)_{x^1} = \frac{\delta H}{\delta p_k^i} \equiv \{q_i^k, H\}, \quad (p_k^i)_{x^1} = -\frac{\delta H}{\delta q_i^k} \equiv \{p_k^i, H\}.$$

Точно так же, как и в одномерном случае, после введения фазовых переменных по формулам (25) мы получаем следующие тождества на пространстве вектор-функций $\{u^k(x)\}$:

$$(29) \quad (p_k^1)_{x^1} + \frac{\delta H}{\delta q_1^k} \equiv -\frac{\delta I}{\delta u^k}; \quad (p_k^i)_{x^1} + \frac{\delta H}{\delta q_i^k} \equiv 0, \quad i > 1; \quad (q_i^k)_{x^1} - \frac{\delta H}{\delta p_k^i} \equiv 0.$$

ТЕОРЕМА 3.7 [84], [88]. *Многомерный эволюционный поток (3) на множестве стационарных точек его интеграла (23) является канонической гамильтоновой системой с гамильтонианом $G = - \int \widehat{Q}^1 dx^2 \cdots dx^n$:*

$$(30) \quad (q_i^k)_t = \frac{\delta G}{\delta p_k^i} \equiv \{q_i^k, G\}, \quad (p_k^i)_t = -\frac{\delta G}{\delta q_i^k} \equiv \{p_k^i, G\},$$

причем $\partial G / \partial x^1 + \{G, H\} = 0$.

ПРИМЕР 3.1. Проиллюстрируем предложенную схему в простейшей многомерной ситуации, когда требуется выполнить минимум необходимых вычислений, – рассмотрим линейный $(2+1)$ -мерный поток $u_t = u_x + u_y$ и его невырожденный квадратичный интеграл

$$I = \frac{1}{2} \int (u_x^2 + au_y^2 + bu_x u_y) dx dy.$$

В соответствии с общей схемой имеем:

$$\frac{\delta I}{\delta u} u_t = (Q^1)_x + (Q^2)_y, \quad Q^1 = -\frac{1}{2}u_x^2 - u_x u_y - \frac{1}{2}(a-b)u_y^2.$$

Введем согласно (25) фазовые переменные q, p стационарной задачи $\frac{\delta I}{\delta u} = 0$:

$$q = u, \quad p = u_x + \frac{1}{2}bu_y.$$

Тогда

$$q_t = p + (1 - b/2)q_y = \frac{\delta G}{\delta p}, \quad p_t = (1 - b/2)p_y + (b^2/4 - a)q_{yy} = -\frac{\delta G}{\delta q},$$

где

$$G = - \int Q^1 dy = \frac{1}{2} \int \left[p^2 + (2-b)pq_y + \left(\frac{1}{4}b^2 - a \right) q_y^2 \right] dy.$$

Гамильтониан H стационарной лагранжевой системы $\frac{\delta I}{\delta u} = 0$ имеет вид

$$H = \int \left[\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{2}bpq_y + \left(\frac{1}{8}b^2 - \frac{1}{2}a \right) q_y^2 \right] dy, \quad \{H, G\} = 0.$$

ПРИМЕР 3.2. Рассмотрим простейший нелинейный эволюционный поток

$$(31) \quad u_t = u_x^2 - \varepsilon u_y^2,$$

обладающий невырожденным квадратичным интегралом

$$(32) \quad I = -\frac{1}{2} \int (u_x^2 + \varepsilon u_y^2) dx dy,$$

$$(33) \quad \frac{\delta I}{\delta u} = u_{xx} + \varepsilon u_{yy},$$

$$\frac{\delta I}{\delta u} u_t = \left(\frac{u_x^3}{3} - \varepsilon u_y^2 u_x \right)_x - \left(\varepsilon^2 \frac{u_y^3}{3} - \varepsilon u_x^2 u_y \right)_y, \quad Q^1 = \frac{u_x^3}{3} - \varepsilon u_y^2 u_x.$$

Введем фазовые переменные $q = u, p = -u_x$. Редукция $(2+1)$ -мерного уравнения (31) на множество стационарных точек его интеграла (32) имеет вид канонической гамильтоновой $(1+1)$ -мерной эволюционной системы:

$$(34) \quad q_t = p^2 - \varepsilon q_y^2 = \frac{\delta G}{\delta p}, \quad p_t = -2\varepsilon p q_{yy} - 2\varepsilon q_y p_y = -\frac{\delta G}{\delta q},$$

где

$$G = - \int \widehat{Q}^1 dy = \int \left(\frac{p^3}{3} - \varepsilon p q_y^2 \right) dy.$$

Гамильтониан стационарной лагранжевой системы (33) имеет вид

$$H = \frac{1}{2} \int (-p^2 + \varepsilon q_y^2) dy, \quad \{H, G\} = 0.$$

Система (34) эквивалентна нелинейному уравнению $q_{tt} = -4\varepsilon(q_t q_y)_y - 8\varepsilon^2 q_y^2 q_{yy}$.

Рассмотрим теперь примеры применения теоремы 3.6.

ПРИМЕР 3.3. Рассмотрим систему Гиббонса–Царева – неоднородную двухкомпонентную систему гидродинамического типа (см. [65], [139]):

$$(35) \quad u_t = v u_x - \frac{1}{u-v}, \quad v_t = u v_x + \frac{1}{u-v}.$$

Система (35), как показали Дж. Гиббонс и С.П. Царев (см. [65], [139]), описывает двухпараметрические редукции уравнений Бенни – системы уравнений для двумерных движений невязкой несжимаемой жидкости со свободной поверхностью в поле тяжести в приближении длинных волн ([8]):

$$(36) \quad u_t + u u_x - u_y \int_0^y u_x dy + h_x = 0, \quad h_t + \left(\int_0^h u dy \right)_x = 0,$$

где $-\infty < x < \infty$ – горизонтальная координата, $0 \leq y$ – вертикальная координата, t – время, $u = u(x, y, t)$ – горизонтальная компонента скорости, $h(x, t)$ – высота свободной поверхности (нормировка такова, что ускорение силы тяжести и плотность жидкости

равны 1). Вертикальная компонента скорости $v(x, y, t)$ исключена из системы уравнений Бенни (36) в силу уравнения неразрывности $u_x + v_y = 0$ и граничного условия $v = 0$ при $y = 0$. Д. Бенни показал также, что из системы (36) вытекает следующая однородная система гидродинамического типа с бесконечным числом компонент – так называемые уравнения моментов:

$$(37) \quad A_t^k + A_x^{k+1} + kA^{k-1}A_x^0 = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $A^k(x, t) = \int_0^h u^k(x, y, t) dy$, $k \geq 0$, – соответствующие моменты. Хорошо известны $2N$ -параметрические редукции Захарова [152] для уравнений Бенни

$$(38) \quad \eta_t^i + (q^i \eta^i)_x = 0, \quad q_t^i + q^i q_x^i + P_x = 0, \quad P = \sum_{k=1}^N \eta^k, \quad i = 1, \dots, N,$$

получаемые из уравнений моментов (37) при $A^k = \sum_{s=1}^N \eta^s (q^s)^k$. Система уравнений (38) моделирует движения N -слойной несжимаемой жидкости: $\eta^i(x, t)$ – толщина i -го слоя, $q^i(x, t)$ – его скорость. Система Бенни (38) является однородной диагонализуемой системой гидродинамического типа, обладает тремя локальными пуассоновыми структурами гидродинамического типа и интегрируется обобщенным методом годографа [130], [139]. С. П. Царев построил полное семейство преобразований Комбескюра для егоровской системы координат, соответствующей N -слойной системе Бенни (38), что позволяет найти симметрии системы и строить с помощью формулы обобщенного годографа решения системы (см. [139]). Кроме редукции Захарова (38) известны и другие редукции уравнений моментов (37), также приводящие к диагонализуемым интегрируемым системам гидродинамического типа (см. [130]). Дж. Гиббонс и С. П. Царев [65] изучили интересную задачу об описании всех возможных конечно-параметрических редукций уравнения моментов (37), т.е. N -мерных подмногообразий $A^k = A^k(u^1, \dots, u^N)$, инвариантных относительно (37) ($u^i(x, t)$ – новые переменные). Показано, что в качестве новых переменных u^i всегда можно взять $A^0, A^1, \dots, A^{N-1}$, и, соответственно, достаточно искать редукции вида

$$(39) \quad \begin{aligned} A^N &= f(A^0, \dots, A^{N-1}), \\ A^{N+1} &= A^{N+1}(A^0, \dots, A^{N-1}), \\ &\dots\dots\dots \\ A^{N+k} &= A^{N+k}(A^0, \dots, A^{N-1}), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

Редукция (39) возможна тогда и только тогда, когда выполнена следующая система уравнений на функцию f ([65], [139]):

$$(40) \quad \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial A^r} \left(\frac{\partial f}{\partial A^{N-1}} \frac{\partial f}{\partial A^s} + \frac{\partial f}{\partial A^{s-1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial A^s} \left(\frac{\partial f}{\partial A^{N-1}} \frac{\partial f}{\partial A^r} + \frac{\partial f}{\partial A^{r-1}} \right), \quad 1 \leq s, r \leq N-1, \\ \frac{\partial}{\partial A^0} \left(\frac{\partial f}{\partial A^{N-1}} \frac{\partial f}{\partial A^s} + \frac{\partial f}{\partial A^{s-1}} \right) &= \frac{\partial}{\partial A^s} \left[-N A^{N-1} + \frac{\partial f}{\partial A^{N-1}} \left((N-1) A^{N-2} + \frac{\partial f}{\partial A^0} \right) + \sum_{p=0}^{N-2} p A^{p-1} \frac{\partial f}{\partial A^p} \right]. \end{aligned}$$

При этом, как показано в [65], [139], все редукции являются диагонализуемыми интегрируемыми однородными системами гидродинамического типа. Система (40) весьма интересна и нетривиальна уже в случае двухпараметрических редукций. В этом случае

$$\frac{\partial}{\partial A^0} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial A^1} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial A^0} \right] = \frac{\partial}{\partial A^1} \left[-2A^1 + \frac{\partial f}{\partial A^1} \left(A^0 + \frac{\partial f}{\partial A^0} \right) \right].$$

После введения новых переменных $t = A^0, x = A^1, z = f(A^0, A^1) + (A^0)^2/2$ получается неоднородное квазилинейное уравнение $z_{tt} + z_x z_{xt} - z_t z_{xx} + 1 = 0$, которое эквивалентно неоднородной системе гидродинамического типа ($a = z_t, b = z_x$): $a_t = ab_x - ba_x - 1, b_t = a_x$. После замены переменных $u = (-b + \sqrt{b^2 + 4a})/2, v = (-b - \sqrt{b^2 + 4a})/2$ система Гиббонса–Парева приобретает вид (35). Хотя система (35) должна быть интегрируемой, на настоящий момент для нее не найдено никакой процедуры интегрирования. Более того, не найдено ни одной гамильтоновой структуры системы (35). Между тем, несложно найти невырожденные квадратичные законы сохранения для системы (35) (см. [56]):

$$(41) \quad I = \int L dx = \int [(v - u)(u_x^2 - v_x^2) + c(u + v)] dx,$$

где c – произвольная константа (это общий вид закона сохранения системы (44), квадратичного по первым производным).

Применение к закону сохранения (41) явной схемы теоремы 3.6 автоматически приводит к интегрируемой канонической гамильтоновой конечномерной динамической системе. Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\delta I}{\delta u} &= -u_x^2 + v_x^2 + c - 2[(v - u)u_x]_x, & \frac{\delta I}{\delta v} &= u_x^2 - v_x^2 + c + 2[(v - u)v_x]_x, \\ \frac{\delta I}{\delta u} u_t + \frac{\delta I}{\delta v} v_t &= [cuv - 2u_x - 2v_x + (v - u)uv_x^2 - (v - u)vu_x^2]_x, \\ Q &= cuv - 2u_x - 2v_x + (v - u)uv_x^2 - (v - u)vu_x^2. \end{aligned}$$

Для стационарной лагранжевой задачи

$$(42) \quad \delta I / \delta u = 0, \quad \delta I / \delta v = 0$$

введем фазовые переменные (q^i, p^i) :

$$q^1 = u, \quad q^2 = v, \quad p^1 = \frac{\partial L}{\partial u_x} = 2(v - u)u_x, \quad p^2 = \frac{\partial L}{\partial v_x} = -2(v - u)v_x.$$

Соответственно, получаем

$$(43) \quad \begin{aligned} u_x &= \frac{p^1}{2(q^2 - q^1)}, & v_x &= \frac{p^2}{2(q^1 - q^2)}, \\ \hat{Q} &= cq^1 q^2 + \frac{p^2 - p^1}{q^2 - q^1} + \frac{q^1 (p^2)^2 - q^2 (p^1)^2}{4(q^2 - q^1)}. \end{aligned}$$

Редукция системы Гиббонса–Царева (35) на стационарное многообразие интеграла (41) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 q_t^1 &= -\{q^1, \widehat{Q}\} = \frac{1}{q^2 - q^1} + \frac{p^1 q^2}{2(q^2 - q^1)}, \\
 q_t^2 &= -\{q^2, \widehat{Q}\} = -\frac{1}{q^2 - q^1} - \frac{p^2 q^1}{2(q^2 - q^1)}, \\
 p_t^1 &= -\{p^1, \widehat{Q}\} = cq^2 + \frac{p^2 - p^1}{(q^2 - q^1)^2} + \frac{q^1(p^2)^2 - q^2(p^1)^2}{4(q^2 - q^1)^2} - \frac{(p^2)^2}{4(q^2 - q^1)}, \\
 p_t^2 &= -\{p^2, \widehat{Q}\} = cq^1 - \frac{p^2 - p^1}{(q^2 - q^1)^2} - \frac{q^1(p^2)^2 - q^2(p^1)^2}{4(q^2 - q^1)^2} - \frac{(p^1)^2}{4(q^2 - q^1)}.
 \end{aligned}
 \tag{44}$$

Гамильтониан H стационарной лагранжевой задачи (42) имеет вид

$$H = p^1 u_x + p^2 v_x - L = \frac{(p^1)^2 - (p^2)^2}{4(q^2 - q^1)}.
 \tag{45}$$

Поскольку функции $\widehat{Q}$ и H независимы и находятся в инволюции $\{\widehat{Q}, H\} = 0$ в силу теоремы 3.6 (теперь это несложно проверить прямым вычислением), то каноническая гамильтонова система (44), а кроме того и каноническая гамильтонова четырехкомпонентная система, соответствующая стационарной лагранжевой задаче (42), вполне интегрируемы по теореме Лиувилля.

Точно таким же способом теорема 3.6 применяется и к другим однородным и неоднородным системам гидродинамического типа, обладающим невырожденными высшими законами сохранения (классификация и описание систем, обладающих высшими законами сохранения, представляет собой отдельную хорошо разработанную в последнее время задачу, и имеется богатое семейство соответствующих примеров).

Как видно из формул (43) и (45), функции $\widehat{Q}$ и H , находящиеся в инволюции относительно лагранжевой скобки Пуассона, квадратичны по импульсам p^1, p^2 . Е. В. Феррапонтов и А. Форди недавно установили [44], [45], что применяя теорему 3.6 к произвольным неоднородным системам гидродинамического типа с квадратичным интегралом первого порядка, мы получим все пары функций, квадратичных по импульсам и находящихся в инволюции. Эффективное описание таких пар функций представляет собой самостоятельную интересную и важную в теоретической механике задачу. Пока эта задача в общем виде не решена.

Используя бигамильтоново представление уравнения ассоциативности (3.1.2), найдем по схеме Ленарда–Магри его высшие интегралы первого порядка. Удобнее всего проделать все необходимые вычисления в переменных u^1, u^2, u^3 , связанных с переменными a, b, c формулами Виета, – в них первая пуассонова структура M_1 становится постоянной пуассоновой структурой $\bar{M}_1$ (см. формулы (3.1.10) и (3.1.11) в §3.1). Вторая пуассонова структура M_2 (см. формулу (3.2.2)) в переменных u^i приобретает вид

$$\widehat{M}_2 = JM_2J^T,
 \tag{46}$$

где коэффициенты пуассоновой структуры M_2 , зависящие от переменных a, b, c , должны быть выражены по формулам Виета через переменные u^i , а матрица J – матрица, обратная к матрице Якоби преобразования от переменных a, b, c к переменным u^i :

$$J = \left(\frac{\partial(a, b, c)}{\partial(u^1, u^2, u^3)} \right)^{-1},$$

т.е.

$$(47) \quad J = \begin{pmatrix} \frac{(u^1)^2}{(u^1-u^2)(u^1-u^3)} & \frac{2u^1}{(u^1-u^2)(u^1-u^3)} & \frac{1}{(u^1-u^2)(u^1-u^3)} \\ \frac{(u^2)^2}{(u^2-u^1)(u^2-u^3)} & \frac{2u^2}{(u^2-u^1)(u^2-u^3)} & \frac{1}{(u^2-u^1)(u^2-u^3)} \\ \frac{(u^3)^2}{(u^3-u^1)(u^3-u^2)} & \frac{2u^3}{(u^3-u^1)(u^3-u^2)} & \frac{1}{(u^3-u^1)(u^3-u^2)} \end{pmatrix}.$$

Применим схему Ленарда–Магри к функционалам Казимира $K^m = \int u^m dx$ первой пуассоновой структуры (3.1.11) уравнения ассоциативности.

Высшие первые интегралы I^m находятся по формулам

$$(48) \quad \widehat{M}_1^{ij} \frac{\delta I^m}{\delta u^j} \equiv \widehat{M}_2^{ij} \frac{\delta K^m}{\delta u^j}, \quad m = 1, 2, 3.$$

Прямые вычисления приводят к следующим явным формулам для высших первых интегралов ($\mathcal{J}^m$ – плотности функционалов I^m):

$$(49) \quad I^1 = \int \mathcal{J}^1 dx = \int \left(\frac{2u^1 - u^2 - u^3}{2(u^2 - u^1)^3(u^3 - u^1)^3} \times \{ (u^3 - u^2)^2 (u_x^1)^2 + [(u^2 u^3)_x - u^1(u^2 + u^3)_x]^2 \} + \frac{(u^2 - u^1)^2 + (u^3 - u^1)^2}{(u^2 - u^1)^3(u^3 - u^1)^3} u_x^1 [(u^2 u^3)_x - u^1(u^2 + u^3)_x] \right) dx,$$

интегралы I^2 и I^3 получаются из (49) заменой индексов $1 \leftrightarrow 2$ и $1 \leftrightarrow 3$, соответственно.

Нетрудно проверить, что в силу системы (3.1.10) имеем

$$(50) \quad \mathcal{J}_t^1 = \mathcal{F}_x^1,$$

где

$$(51) \quad \mathcal{F}^1 = \frac{(u^2 + u^3 - u^1)^2 - u^2 u^3}{2(u^2 - u^1)^3(u^3 - u^1)^3} \times \{ (u^3 - u^2)^2 u_x^1{}^2 + [(u^2 u^3)_x - u^1(u^2 + u^3)_x]^2 \} + \frac{u^2(u^2 - u^1)^2 + u^3(u^3 - u^1)^2}{(u^2 - u^1)^3(u^3 - u^1)^3} u_x^1 [(u^2 u^3)_x - u^1(u^2 + u^3)_x].$$

Имеет место очевидное соотношение

$$(52) \quad \widehat{M}_1^{ij} \frac{\delta(I^1 + I^2 + I^3)}{\delta u^j} \equiv \widehat{M}_2^{ij} \frac{\delta(K^1 + K^2 + K^3)}{\delta u^j} = 0,$$

так как функционал $K^1 + K^2 + K^3 = \int a dx$ является функционалом Казимира пуассоновой структуры M_2^{ij} . Действительно, нетрудно показать, что $I^1 + I^2 + I^3 = 0$, и, следовательно, среди интегралов I^m только два линейно независимых.

Высшие потоки третьего порядка иерархии уравнений ассоциативности (3.1.10) имеют вид

$$(53) \quad u_{\tau_m}^i = \widehat{M}_1^{ij} \frac{\delta I^m}{\delta u^j} = \widehat{M}_2^{ij} \frac{\delta K^m}{\delta u^j}, \quad m = 1, 2, 3.$$

Построенные независимые высшие интегралы I^1 и I^2 квадратичны по первым производным, т.е. имеют вид

$$(54) \quad I^1 = \int g_{ij}^1(u) u_x^i u_x^j dx, \quad I^2 = \int g_{ij}^2(u) u_x^i u_x^j dx.$$

Кроме того, система уравнений ассоциативности (3.1.10) имеет пять первых интегралов гидродинамического типа

$$(55) \quad K^i = \int u^i dx, \quad i = 1, 2, 3,$$

$$(56) \quad K^4 = \int (u^1 u^2 + u^1 u^3 + u^2 u^3) dx,$$

$$(57) \quad K^5 = \int u^1 u^2 u^3 dx.$$

Произвольная линейная комбинация первых интегралов (54)–(57)

$$(58) \quad I = \int (g_{ij}(u) u_x^i u_x^j + V(u)) dx$$

определяет лагранжиан движения частицы в искривленном пространстве с метрикой

$$(59) \quad g_{ij} = \lambda_1 g_{ij}^1 + \lambda_2 g_{ij}^2$$

под действием потенциала $V(u)$, который является кубическим полиномом по переменным u^i . Здесь λ_1 и λ_2 – произвольные константы. При любом выборе этих констант за исключением следующих специальных случаев: 1) $\lambda_1 = \lambda_2$, 2) $\lambda_1 = 0$, 3) $\lambda_2 = 0$, метрика (59) является невырожденной, а следовательно, и лагранжиан (58) невырожден. Таким образом, в соответствии с теоремой 3.4, мы можем рассмотреть ограничение уравнения ассоциативности, представленного в виде системы гидродинамического типа (3.1.10), на множество стационарных точек интеграла (58). При этом мы получим интегрируемую конечномерную каноническую гамильтонову динамическую систему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Алексеев В. Л. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с уравнениями Уизема // УМН. 1995. Т. 50. № 6. С. 165–166.
- [2] Antonovicz M., Fordy A. P. A family of completely integrable multi-Hamiltonian systems // Phys. Lett. A. 1987. V. 122. P. 95–99.
- [3] Antonovicz M., Fordy A. P. Coupled KdV equations with multi-Hamiltonian structures // Physica D. 1987. V. 28. P. 345–357.
- [4] Antonovicz M., Fordy A. P. Coupled KdV equations associated with a novel Schrödinger spectral problem // Nonlinear Evolution. Proceedings of the 4th Workshop on Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems. France / ed. J. P. Leon, 1987. P. 145–159.
- [5] Асташов А. М. Нормальные формы гамильтоновых операторов в теории поля // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 5. С. 363–368.
- [6] Astashov A. M., Vinogradov A. M. On the structure of Hamiltonian operators in field theory // J. Geom. Phys. 1986. V. 3. № 2. P. 263–287.
- [7] Балинский А. А., Новиков С. П. Скобки Пуассона гидродинамического типа, фробениусовы алгебры и алгебры Ли // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 5. С. 1036–1039.
- [8] Benney D. J. Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. № 1. P. 45–50.
- [9] Бессе А. Многообразия с замкнутыми геодезическими. М.: Мир, 1981.
- [10] Bochner S. Curvature and Betti numbers // Ann. of Math. 1948. V. 49. № 2. P. 379–390.
- [11] Bochner S. Curvature and Betti numbers, II // Ann. of Math. 1949. V. 50. № 1. P. 77–93.
- [12] Bochner S., Yano K. Tensor-fields in non-symmetric connections // Ann. of Math. 1952. V. 56. № 3. P. 504–519.
- [13] Богоявленский О. И., Новиков С. П. О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач // Функциональный анализ и его прил. 1976. Т. 10. № 1. С. 9–13.
- [14] Calogero F. Solutions of certain integrable nonlinear PDE's describing nonresonant N -wave interactions // J. Math. Phys. 1989. V. 30. № 3. P. 639–654.
- [15] Cooke D. B. Classification results and the Darboux theorem for low-order Hamiltonian operators // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 1. P. 109–119.
- [16] Cooke D. B. Compatibility conditions for Hamiltonian pairs // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 11. P. 3071–3076.
- [17] Dijkgraaf R., Verlinde H., Verlinde E. Topological strings in $d < 1$ // Nucl. Phys. B. 1991. V. 352. P. 59–86.
- [18] Дирак П. А. М. Лекции по квантовой механике. М.: Мир, 1968.
- [19] Dorfman I. Ya. Dirac structures of integrable evolution equations // Phys. Lett. A. 1987. V. 125. № 5. P. 240–246.
- [20] Dorfman I. Ya. Dirac structures and integrability of nonlinear evolution equations. Chichester: Wiley, 1993.
- [21] Dorfman I. Ya. On differential operators that generate Hamiltonian structures // Phys. Lett. A. 1989. V. 140. № 7, 8. P. 378–382.
- [22] Дорфман И. Я. Уравнение Кричевера–Новикова и локальные симплектические структуры // Докл. АН СССР. 1988. Т. 302. № 4. С. 792–795.
- [23] Дорфман И. Я. Структуры Дирака интегрируемых эволюционных уравнений // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. Л.: ЛОМИ АН СССР, 1989.
- [24] Dorfman I. Ya., Mokhov O. I. Local symplectic operators and structures related to them // J. Math. Phys. 1991. V. 32. № 12. P. 3288–3296.
- [25] Dorfman I. Ya., Nijhoff F. W. On a $(2 + 1)$ -dimensional version of the Krichever–Novikov equation // Phys. Lett. A. 1991. V. 157. P. 107–112.
- [26] Doyle P. W. Differential geometric Poisson bivectors in one space variable // J. Math. Phys. 1993. V. 34. № 4. P. 1314–1338.
- [27] Dubrovin B. A. Geometry of 2D topological field theories // Preprint SISSA–89/94/FM, SISSA, Trieste, 1994, hep-th/9407018.

- [28] Dubrovin B. A. Integrable systems in topological field theory // Nucl. Phys. B. 1992. V. 379. P. 627–689.
- [29] Дубровин Б. А., Матвеев В. Б., Новиков С. П. Нелинейные уравнения типа Кортевега–де Фриза, конечнозонные линейные операторы и абелевы многообразия // УМН. 1976. Т. 31. № 1. С. 55–136.
- [30] Dubrovin B. A., Novikov S. P. Hydrodynamics of soliton lattices // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. 1993. V. 9. № 4. P. 1–136.
- [31] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гамильтонов формализм одномерных систем гидродинамического типа и метод усреднения Боголюбова–Уизема // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270. № 4. С. 781–785.
- [32] Дубровин Б. А., Новиков С. П. О скобках Пуассона гидродинамического типа // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. № 2. С. 294–297.
- [33] Дубровин Б. А., Новиков С. П. Гидродинамика слабо деформированных солитонных решеток. Дифференциальная геометрия и гамильтонова теория // УМН. 1989. Т. 44. № 6. С. 29–98.
- [34] Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. М.: Наука, 1986.
- [35] Фералонтов Е. В. Гамильтоновы системы гидродинамического типа и их реализация на гиперповерхностях псевдоевклидова пространства // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. Т. 22. М.: ВИНТИ, 1990. С. 59–96.
- [36] Фералонтов Е. В. Дифференциальная геометрия нелокальных гамильтоновых операторов гидродинамического типа // Функци. анализ и его прил. 1991. Т. 25. № 3. С. 37–49.
- [37] Фералонтов Е. В. Нелокальные матричные гамильтоновы операторы. Дифференциальная геометрия и приложения // ТМФ. 1992. Т. 91. № 3. С. 452–462.
- [38] Фералонтов Е. В. Ограничение по Дираку гамильтонова оператора $\delta^{IJ} \frac{d}{dx}$ на поверхность евклидова пространства с плоской нормальной связностью // Функци. анализ и его прил. 1992. Т. 26. № 4. С. 83–86.
- [39] Ferapontov E. V. On integrability of 3×3 semi-Hamiltonian hydrodynamic type systems which do not possess Riemann invariants // Physica D. 1993. V. 63. P. 50–70.
- [40] Ferapontov E. V. On the matrix Hopf equation and integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type, which do not possess Riemann invariants // Phys. Lett. A. 1993. V. 179. P. 391–397.
- [41] Ferapontov E. V. Dupin hypersurfaces and integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type which do not possess Riemann invariants // Diff. Geometry Appl. 1995. V. 5. № 2. P. 121–152.
- [42] Ferapontov E. V. Several conjectures and results in the theory of integrable Hamiltonian systems of hydrodynamic type, which do not possess Riemann invariants // ТМФ. 1994. V. 99. № 2. P. 257–262.
- [43] Ferapontov E. V. Nonlocal Hamiltonian operators of hydrodynamic type: differential geometry and applications // Topics in Topology and Mathematical Physics / ed. S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 33–58.
- [44] Ferapontov E. V., Fordy A. P. Separable Hamiltonians and integrable systems of hydrodynamic type // J. Geom. Phys. 1997. V. 21. № 2. P. 169–182.
- [45] Ferapontov E. V., Fordy A. P. Non-homogeneous systems of hydrodynamic type, related to quadratic Hamiltonians with electromagnetic term // Physica D. 1997. V. 108. P. 350–364.
- [46] Ferapontov E. V., Galvão C. A. P., Mokhov O. I., Nutku Y. Bi-Hamiltonian structure of equations of associativity in 2D topological field theory // Comm. Math. Phys. 1997. V. 186. P. 649–669.
- [47] Ferapontov E. V., Mokhov O. I. On the Hamiltonian representation of the associativity equations // Algebraic aspects of integrable systems: In memory of Irene Dorfman / ed. I. M. Gelfand, A. S. Fokas. Boston: Birkhäuser, 1996. P. 75–91.

- [48] Ferapontov E. V., Mokhov O. I. The equations of the associativity as hydrodynamic type systems: Hamiltonian representation and integrability // Proceedings of the First International Workshop "Nonlinear Physics. Theory and Experiment. Nature, Structure and Properties of Nonlinear Phenomena". Le Sirenuse, Gallipoli (Lecce), Italy. 29 June–7 July, 1995 / ed. E. Alfinito, M. Boiti, L. Martina, F. Pempinelli. Singapore: World Scientific, 1996. P. 104–115.
- [49] Ferapontov E. V., Pavlov M. V. Quasiclassical limit of coupled KdV equations. Riemann invariants and multi-Hamiltonian structure // Physica D. 1991. V. 52. P. 211–219.
- [50] Fokas A. S., Fuchssteiner B. On the structure of symplectic operators and hereditary symmetries // Lettere al Nuovo Cimento. 1980. V. 28. №8. P. 299–303.
- [51] Fordy A. P., Reyman A. G., Semenov-Tian-Shansky M. A. Classical R -matrices and compatible Poisson brackets for coupled KdV systems // Lett. Math. Phys. 1989. V. 17. №1. P. 25–29.
- [52] Fuchssteiner B. Application of hereditary symmetries to nonlinear evolution equations // Nonlinear Analysis. Theory, Methods and Applications. 1979. V. 3. P. 849–862.
- [53] Fuchssteiner B. A symmetry approach to exactly solvable evolution equations // J. Math. Phys. 1980. V. 21. P. 1318–1325.
- [54] Fuchssteiner B., Fokas A. S. Symplectic structures, their Bäcklund transformations and hereditary symmetries // Physica D. 1981. V. 4. P. 47–66.
- [55] Ганжа Е. И. Основные серии неоднородных систем гидродинамического типа с постоянными матрицами, обладающих законами сохранения 1-го порядка // Фундаментальная и прикладная математика. 1995. Т. 1. №3. С. 641–648.
- [56] Ганжа Е. И. О высших законах сохранения неоднородных систем гидродинамического типа // Вестник МГУ. Сер. 1. 1996. №1. С. 86–87.
- [57] Gardner C. S., Greene J. M., Kruskal M. D., Miura R. M. Korteweg–de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution // Comm. Pure Appl. Math. 1974. V. 27. P. 97–133.
- [58] Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Дробные степени операторов и гамильтоновы системы // Функци. анализ и его прил. 1976. Т. 10. №4. С. 13–29.
- [59] Гельфанд И. М., Дикий Л. А. Резольвента и гамильтоновы системы // Функци. анализ и его прил. 1977. Т. 11. №2. С. 11–27.
- [60] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры // Функци. анализ и его прил. 1979. Т. 13. №4. С. 13–30.
- [61] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы // Функци. анализ и его прил. 1980. Т. 14. №3. С. 71–74.
- [62] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли // Функци. анализ и его прил. 1981. Т. 15. №3. С. 23–40.
- [63] Гельфанд И. М., Дорфман И. Я. Гамильтоновы операторы и классическое уравнение Янга–Бакстера // Функци. анализ и его прил. 1982. Т. 16. №4. С. 1–9.
- [64] Гельфанд И. М., Манин Ю. И., Шубин М. А. Скобки Пуассона и ядро вариационной производной в формальном вариационном исчислении // Функци. анализ и его прил. 1976. Т. 10. №4. С. 30–34.
- [65] Gibbons J., Tsarev S. P. Reductions of the Benney equations // Phys. Lett. A. 1996. V. 211. №1. P. 19–24.
- [66] Гринберг Н. И. О скобках Пуассона гидродинамического типа с вырожденной метрикой // УМН. 1985. Т. 40. №4. С. 217–218.
- [67] Haantjes A. On X_{n-1} -forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae. 1955. V. 17. №2. P. 158–162.
- [68] Кац В. Бесконечномерные алгебры Ли. М.: Мир, 1993.
- [69] Kontsevich M. Homological algebra of mirror symmetry // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. August 3–11, 1994, Zürich, Switzerland. V. 1. Basel: Birkhäuser, 1995. P. 120–139.

- [70] Kontsevich M., Manin Yu. Gromov–Witten classes, quantum cohomology, and enumerative geometry // *Comm. Math. Phys.* 1994. V. 164. P. 525–562.
- [71] Kosmann-Schwarzbach Y., Magri F. Poisson–Nijenhuis structures // *Annales de l'Institut Henri Poincaré, série A (Physique théorique)*. 1990. V. 53. № 1. P. 35–81.
- [72] Кричевер И. М., Новиков С. П. Голоморфные расслоения и нелинейные уравнения. Конечнозонные решения ранга 2 // *Докл. АН СССР*. 1979. Т. 247. № 1. С. 33–37.
- [73] Kupershmidt B. A. Invariance of the stationary manifold of a conserved density // *Phys. Lett. A*. 1987. V. 121. № 8, 9. P. 395–398.
- [74] Kupershmidt B. A. GL_2 -orbit of the Korteweg–de Vries equation // *Phys. Lett. A*. 1991. V. 156. № 1, 2. P. 53–60.
- [75] Kupershmidt B. A., Wilson G. Modifying Lax equations and the second hamiltonian structure // *Invent. Math.* 1981. V. 62. № 3. P. 403–436.
- [76] Lax P. D. Periodic solutions of the KdV equation // *Lect. Appl. Math.* 1974. V. 15. P. 85–96.
- [77] Lax P. D. Almost periodic solutions of the KdV equation // *SIAM Review*. 1976. V. 18. № 3. P. 351–375.
- [78] Magri F. A simple model of the integrable Hamiltonian equation // *J. Math. Phys.* 1978. V. 19. № 5. P. 1156–1162.
- [79] Magri F. A geometrical approach to the nonlinear solvable equations. *Nonlinear Evolution Equations and Dynamical Systems* // *Lect. Notes in Physics* / ed. M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani. V. 120. New York: Springer-Verlag, 1980. P. 233–263.
- [80] Magri F., Morosi C., Tondo G. Nijenhuis G -manifolds and Lenard bicomplexes // *Comm. Math. Phys.* 1988. V. 115. P. 457–475.
- [81] Манин Ю. И. Алгебраические аспекты нелинейных дифференциальных уравнений // *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики*. Т. 11. М.: ВИНТИ, 1978. С. 5–152.
- [82] Miura R. M. Korteweg–de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation // *J. Math. Phys.* 1968. V. 9. № 8. P. 1202–1204.
- [83] Meshkov A. G. Hamiltonian and recursion operators for two-dimensional scalar fields // *Phys. Lett. A*. 1992. V. 170. № 6. P. 405–408.
- [84] Мохов О. И. Гамильтоновость эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла // *УМН*. 1984. Т. 39. № 4. С. 173–174.
- [85] Мохов О. И. Локальные скобки Пуассона третьего порядка // *УМН*. 1985. Т. 40. № 5. С. 257–258.
- [86] Мохов О. И. Геометрия коммутирующих дифференциальных операторов ранга 3 и гамильтоновых потоков // *Дисс. . . . канд. физ.-матем. наук*. М.: МГУ, 1986.
- [87] Мохов О. И. Гамильтоновы дифференциальные операторы и контактная геометрия // *Функц. анализ и его прил.* 1987. Т. 21. № 3. С. 53–60.
- [88] Мохов О. И. О гамильтоновости произвольной эволюционной системы на множестве стационарных точек ее интеграла // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1987. Т. 51. № 6. С. 53–60.
- [89] Мохов О. И. О скобках Пуассона типа Дубровина–Новикова (ДН-скобки) // *Функц. анализ и его прил.* 1988. Т. 22. № 4. С. 92–93.
- [90] Мохов О. И. Канонические переменные для вихревой двумерной гидродинамики несжимаемой жидкости // *ТМФ*. 1989. Т. 78. № 1. С. 136–139.
- [91] Мохов О. И. Контактная геометрия и вариационное исчисление // *Геометрия, топология и приложения*. М.: МИП, 1990. С. 111–115.
- [92] Мохов О. И. О гамильтоновой структуре эволюции по пространственной переменной x для уравнения Кортевега–де Фриза // *УМН*. 1990. Т. 45. № 1. С. 181–182.
- [93] Мохов О. И. Симплектические формы на пространстве петель и риманова геометрия // *Функц. анализ и его прил.* 1990. Т. 24. № 3. С. 86–87.
- [94] Мохов О. И. Однородные симплектические структуры второго порядка на пространствах петель и симплектические связности // *Функц. анализ и его прил.* 1991. Т. 25. № 2. С. 65–67.

- [95] Мохов О. И. Каноническое гамильтоново представление уравнения Кричевера–Новикова // Матем. заметки. 1991. Т. 50. №3. С. 87–96.
- [96] Мохов О. И. Теорема о гамильтоновости эволюционного потока на множестве стационарных точек его интеграла и теорема Нётер // Асимптотические методы решения дифференциальных уравнений. Уфа: Институт математики УрО РАН, 1992. С. 74–75.
- [97] Мохов О. И. Двумерные нелинейные σ -модели в теории поля: симплектический подход // Тезисы 9-ой Всероссийской конференции “Современный групповой анализ. Методы и приложения”. 24–30 июня 1992. Нижний Новгород: Научно-исследов. радиофиз. ин-т, 1992. С. 38.
- [98] Мохов О. И. О комплексах однородных форм на пространствах петель гладких многообразий и их группах когомологий // УМН. 1996. Т. 51. №2. С. 141–142.
- [99] Мохов О. И. Симплектические и пуассоновы структуры на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 1996.
- [100] Мохов О. И. О группах когомологий комплексов однородных форм на пространствах петель гладких многообразий // Функци. анализ и его прил. 1998. Т. 32. №2.
- [101] Мохов О. И. Дифференциальная геометрия симплектических и пуассоновых структур на пространствах петель гладких многообразий и интегрируемые системы // Пространства петель и группы диффеоморфизмов. Сб. статей. Труды МИАН / ред. А. Г. Сергеев. Т. 217. М.: Наука–МАИК Наука, 1997. С. 100–134.
- [102] Мохов О. И. О согласованных пуассоновых структурах гидродинамического типа // УМН. 1997. Т. 52. №6. С. 173–174.
- [103] Мохов О. И. О согласованных потенциальных деформациях фробениусовых алгебр и уравнениях ассоциативности // УМН. 1998. Т. 53. №2. С. 141–142.
- [104] Mokhov O. I. Vorticity equation of two-dimensional hydrodynamics of an incompressible fluid as canonical Hamiltonian system // Phys. Lett. A. 1989. V. 139. №8. P. 363–368.
- [105] Mokhov O. I. Hamiltonian systems of hydrodynamic type and constant curvature metrics // Phys. Lett. A. 1992. V. 166. №3, 4. P. 215–216.
- [106] Mokhov O. I. On the canonical variables for two-dimensional vortex hydrodynamics of incompressible fluid // International Series of Numerical Mathematics. V. 106. Basel: Birkhäuser, 1992. P. 215–221.
- [107] Mokhov O. I. Two-dimensional nonlinear sigma models and symplectic geometry on loop spaces of (pseudo)-Riemannian manifolds // Nonlinear evolution equations and dynamical systems. Proceedings of the 8th International Workshop (NEEDS'92), 6–17 July, 1992, Dubna, Russia / ed. V. G. Makhan'kov. Singapore: World Scientific, 1993. P. 444–456; hep-th/9301048.
- [108] Mokhov O. I. Symplectic and Poisson geometry on loop spaces of manifolds and nonlinear equations // Topics in topology and mathematical physics / ed. S. P. Novikov. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. 121–151; hep-th/9503076.
- [109] Mokhov O. I. Differential equations of associativity in 2D topological field theories and geometry of nondiagonalizable systems of hydrodynamic type // Internat. Conference on Integrable Systems “Nonlinearity and Integrability: from Mathematics to Physics”, February 21–24, 1995, Montpellier, France.
- [110] Mokhov O. I. Poisson and symplectic geometry on loop spaces of smooth manifolds // Geometry from the Pacific Rim. Proceedings of the Pacific Rim Geometry Conference held at National University of Singapore, Republic of Singapore, December 12–17, 1994 / ed. A. J. Berrick, B. Loo, H.-Y. Wang. Berlin: Walter de Gruyter, 1997. P. 285–309.
- [111] Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. О нелокальных гамильтоновых операторах гидродинамического типа, связанных с метриками постоянной кривизны // УМН. 1990. Т. 45. №3. С. 191–192.
- [112] Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. Гамильтоновы пары, порождаемые кососимметричными тензорами Киллинга на пространствах постоянной кривизны // Функци. анализ и его прил. 1994. Т. 28. №2. С. 60–63.

- [113] Мохов О. И., Ферапонтов Е. В. Уравнения ассоциативности двумерной топологической теории поля как интегрируемые гамильтоновы недиагонализуемые системы гидродинамического типа // Функци. анализ и его прил. 1996. Т. 30. № 3. С. 62–72; hep-th/9505180.
- [114] Mokhov O. I., Nutku Y. Homogeneous Poisson brackets of Dubrovin–Novikov type and their nonlocal generalizations // Preprint. TÜBITAK – Marmara Research Center, Research Institute for Basic Sciences, Gebze, Turkey, 1996.
- [115] Mokhov O. I., Nutku Y. Bianchi transformation between the real hyperbolic Monge–Ampère equation and the Born–Infeld equation // Lett. Math. Phys. 1994. V. 32. № 2. P. 121–123.
- [116] Nijenhuis A. X_{n-1} -forming sets of eigenvectors // Indagationes Mathematicae. 1951. V. 13. № 2. P. 200–212.
- [117] Nijenhuis A. Geometric aspects of formal differential operators on tensor fields // Proceedings of the International Congress of Mathematicians. 1958. Edinburgh. P. 463–469.
- [118] Новиков С. П. Периодическая задача Кортевега–де Фриза // Функци. анализ и его прил. 1974. Т. 8. № 3. С. 54–66.
- [119] Новиков С. П. Двумерные операторы Шредингера в периодических полях // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Т. 23. М.: ВИНТИ, 1983. С. 3–32.
- [120] Новиков С. П. Геометрия консервативных систем гидродинамического типа. Метод усреднения для теоретико-полевых систем // УМН. 1985. Т. 40. № 4. С. 79–89.
- [121] Novikov S. P. Differential geometry and hydrodynamics of soliton lattices // Important developments in soliton theory / ed. A. S. Fokas, V. E. Zakharov. Springer Ser. in Nonlinear Dyn.. Berlin: Springer-Verlag, 1993. P. 242–256.
- [122] Новиков С. П. (ред.) Теория солитонов: Метод обратной задачи. М.: Наука, 1980.
- [123] Nutku Y. Canonical formulation of shallow water waves // J. Phys. A. 1983. V. 16. P. 4195.
- [124] Nutku Y. Hamiltonian formulation of the KdV equation // J. Math. Phys. 1984. V. 25. № 6. P. 2007–2008.
- [125] Nutku Y. Hamiltonian structure of real Monge–Ampère equations // J. Phys. A.: Math. Gen. 1996. V. 29. P. 3257–3280.
- [126] Nutku Y., Sarıoğlu O. An integrable family of Monge–Ampère equations and their multi-Hamiltonian structure // Phys. Lett. A. 1993. V. 173. № 3. P. 270–274.
- [127] Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. М.: Мир, 1989.
- [128] Павлов М. В. Мультигамильтоновы структуры уравнений Уизема // Докл. АН СССР. 1994. Т. 338. № 2. С. 165–167.
- [129] Павлов М. В. Эллиптические координаты и мультигамильтоновы структуры систем гидродинамического типа // Докл. АН. 1994. Т. 339. № 1. С. 21–23.
- [130] Павлов М. В., Царев С. П. О законах сохранения уравнений Бенни // УМН. 1991. Т. 46. № 4. С. 169–170.
- [131] Потемин Г. В. Некоторые вопросы дифференциальной геометрии и алгебраической геометрии в теории солитонов // Дисс. ... канд. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 1991.
- [132] Потемин Г. В. О скобках Пуассона дифференциально-геометрического типа // Докл. АН СССР. 1986. Т. 286. № 1. С. 39–42.
- [133] Reeb G. Quelques propriétés globales des trajectoires de la dynamique dues à l'existence de l'invariant intégral de M. Élie Cartan // Comptes Rendus Acad. Sci. Paris. 1949. V. 229. № 20. P. 969–971.
- [134] Reeb G. Variétés de Riemann dont toutes les géodésiques sont fermées // Bull. Cl. Sciences. Acad. Royale Belg. 5 Série. 1950. V. 36. № 4. P. 324–329.
- [135] Ruan Y., Tian G. A mathematical theory of quantum cohomology // J. Diff. Geometry. 1995. V. 42. № 2. P. 259–367.
- [136] Соколов В. В. О гамильтоновости уравнения Кричевера–Новикова // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277. № 1. С. 48–50.

- [137] Царев С. П. О скобках Пуассона и одномерных гамильтоновых системах гидродинамического типа // Докл. АН СССР. 1985. Т. 282. № 3. С. 534–537.
- [138] Царев С. П. Гамильтоновость стационарных и обращенных уравнений механики сплошных сред и математической физики // Матем. заметки. 1989. Т. 46. № 1. С. 105–111.
- [139] Царев С. П. Дифференциально-геометрические методы интегрирования систем гидродинамического типа // Дисс. . . . докт. физ.-матем. наук. М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 1993.
- [140] Царев С. П. Геометрия гамильтоновых систем гидродинамического типа. Обобщенный метод годографа // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1990. Т. 54. № 5. С. 1048–1068.
- [141] Веселов А. П. О гамильтоновом формализме для уравнений Новикова–Кричевера коммутативности двух операторов // Функци. анализ и его прил. 1979. Т. 13. № 1. С. 1–7.
- [142] Веселов А. П. Интегрируемые системы с дискретным временем и разностные операторы // Функци. анализ и его прил. 1988. Т. 22. № 2. С. 1–13.
- [143] Веселов А. П. Что такое интегрируемое отображение? // Интегрируемость и кинетические уравнения для солитонов. Киев: Наукова Думка, 1990. С. 44–64.
- [144] Веселов А. П. Интегрируемые отображения // УМН. 1991. Т. 46. № 5. С. 3–45.
- [145] Виноградов А. М. Гамильтоновы структуры в теории поля // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241. № 1. С. 18–21.
- [146] Weinstein A. On the volume of manifolds all of whose geodesics are closed // J. Diff. Geom. 1974. V. 9. № 4. P. 513–517.
- [147] Witten E. On the structure of topological phase of two-dimensional gravity // Nucl. Phys. B. 1990. V. 340. P. 281–332.
- [148] Witten E. Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space // Surveys in Diff. Geometry. 1991. V. 1. P. 243–310.
- [149] Yano K. On harmonic and Killing vector fields // Ann. of Math. 1952. V. 55. № 1. P. 38–45.
- [150] Yano K. Some remarks on tensor fields and curvature // Ann. of Math. 1952. V. 55. № 2. P. 328–347.
- [151] Яно К., Бохнер С. Кривизна и числа Бетти. М.: ИЛ, 1957.
- [152] Захаров В. Е. Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функци. анализ и его прил. 1980. Т. 14. № 2. С. 15–24.

Центр нелинейных исследований

при Институте теоретической физики им. Л. Д. Ландау РАН

E-mail: mokhov@genesis.mi.ras.ru

Поступила в редакцию

10.02.1998