Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Курлин, Редукция оснащенных зацеплений к обычным, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 177–178

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm190>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:22:11

РЕДУКЦИЯ ОСНАЩЕННЫХ ЗАЦЕПЛЕНИЙ К ОБЫЧНЫМ

В. КУРЛИН

Главный результат работы – это сведение классификации оснащенных зацеплений к классификации обычных зацеплений (теорема 1). В качестве приложения доказаны аналоги теоремы Маркова для оснащенных зацеплений и 3-многообразий. Под 3-многообразием мы понимаем ориентируемое замкнутое трехмерное многообразие. Известно, что любое 3-многообразие может быть получено перестройкой Дена из S^3 вдоль некоторого оснащенного зацепления (см. [1]). Оснащенные зацепления, полученные друг из друга преобразованиями Фенна–Рурка, задают гомеоморфные 3-многообразия (см. [2]). По аналогии с обычными зацеплениями оснащенное зацепление есть замыкание некоторой оснащенной косы, определенной с точностью до сопряжения и преобразований Маркова (теорема 3). Группа оснащенных кос FB_n канонически изоморфна группе $B_n \rtimes \mathbb{Z}^n$, где B_n – группа (обычных) кос (теорема 2). Таким образом, любая оснащенная коса задает 3-многообразие, причем 3-многообразия гомеоморфны, если и только если косы получаются друг из друга сопряжением и преобразованиями Маркова и Фенна–Рурка. В теореме 4 геометрические преобразования Фенна–Рурка переведены на комбинаторный язык оснащенных кос. Автор благодарен Л. А. Аляни за ряд ценных замечаний и В. М. Бухштаберу за редакторскую работу и поддержку.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. *Оснащенное m -компонентное зацепление* – это набор m непересекающихся ленточек в $\mathbb{R}^3$, зацепленных друг за друга и скрученных (вокруг своей средней линии) на целое число оборотов. Изотопия оснащенных зацеплений – это семейство гомеоморфизмов $\phi_t: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, непрерывно зависящее от параметра $t \in [0, 1]$, такое, что $\phi_0 = \text{id}$, ϕ_1 переводит одно оснащенное зацепление в другое.

Обозначим через L_i и F_i края i -й ленты. Получим неориентируемое зацепление $L_1 \cup F_1 \cup \dots \cup L_m \cup F_m$. Таким образом, каждому оснащеному m -компонентному зацеплению соответствует обычное неориентируемое $2m$ -компонентное зацепление.

ТЕОРЕМА 1. *Оснащенные зацепления изотопны, если и только если изотопны соответствующие обычные зацепления.*

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. *Оснащенная коса из n нитей* – это набор из n лент в $\mathbb{R}^3$ такой, что

- (2.1) нижний (верхний) край i -й ленты – это отрезок $[(2i, 0, 0), (2i + 1, 0, 0)] \subset \mathbb{R}^3$ ($[(2i, 0, 1), (2i + 1, 0, 1)] \subset \mathbb{R}^3$, соответственно);
- (2.2) каждая лента монотонно поднимается от нижнего края к верхнему;
- (2.3) каждая лента может быть скручена целое число раз.

Рассматривая вместо лент их края, получим обычную косу из $2n$ нитей. Множество FB_n оснащенных кос наследует естественную групповую структуру из обычных кос и является подгруппой в группе B_{2n} . Существует естественное действие перестановок $s \in S_n$ на

$$\mathbb{Z}^n = \{\bar{f} = (f_1, \dots, f_n), f_i \in \mathbb{Z}\} : s(f_1, \dots, f_n) = (f_{s(1)}, \dots, f_{s(n)}).$$

Определим полупрямое произведение $B_n \rtimes \mathbb{Z}^n$ как множество пар $(\alpha, \bar{f})$ с групповой операцией (здесь $s = s(\beta)^{-1}$)

$$(\alpha, \bar{f}) \circ (\beta, \bar{g}) = (\alpha\beta, s(\bar{f}) + \bar{g}).$$

Зададим отображение $\Phi: B_n \rtimes \mathbb{Z}^n \rightarrow FB_n$ формулой

$$\Phi(\sigma, \bar{f}) = \Delta(\sigma) \tau_1^{2f_1} \dots \tau_{2n-1}^{2f_n},$$

где τ_i – образующие группы $B_{2n} \supset FB_n$ и $\Delta: B_n \rightarrow B_{2n}$ – раздваивающий гомоморфизм, определенный на образующих σ_i по формуле $\Delta(\sigma_i) = \tau_{2i} \tau_{2i-1} \tau_{2i+1} \tau_{2i}$.

ТЕОРЕМА 2. Φ является изоморфизмом.

Простым следствием теоремы Маркова (см. [3]) о зацеплениях и теоремы 1 является следующая

ТЕОРЕМА 3. *Оснащенные косы при замыкании дают изотопные оснащенные зацепления, если и только если одна получается из другой конечной последовательностью следующих преобразований:*

- (1) сопряжение $\alpha \mapsto \beta\alpha\beta^{-1}$, $\alpha, \beta \in B_n$;
- (2) преобразования Маркова $\alpha \leftrightarrow \alpha\sigma_n^{\pm 1}$, $\alpha \in B_n \subset B_{n+1}$.

Любое оснащенное зацепление можно расположить на плоскости (см. [4]) так, что каждая лента почти полностью лежит на плоскости, лишь несколько раз поднимаясь над ней, когда зацепляется с другой лентой или скручивается вокруг себя, образуя при этом петельки.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Преобразования Фенна–Рурка оснащенных зацеплений, расположенных на плоскости, заключаются в добавлении и удалении ± 1 -оснащенной незаузеленной ленты. При этом ленты, которые проходят сквозь нее (их можно расположить параллельно рядом друг с другом), как единое целое скручиваются в виде большой петли. Такую петлю можно нарисовать двумя способами. Нужный способ выбирается в соответствии с оснащением добавленной (или удаленной) ленты. В частности, можно добавлять и удалять ± 1 -оснащенную ленту, расположенную вдалеке от остальной части зацепления.

ТЕОРЕМА 4. *Оснащенные косы задают гомеоморфные 3-многообразия, если и только если одна получается из другой конечной последовательностью следующих преобразований*

- (1) сопряжение $\alpha \mapsto \beta\alpha\beta^{-1}$, $\alpha, \beta \in B_n$;
- (2) преобразования Маркова $\alpha \leftrightarrow \alpha\sigma_n^{\pm 1}$, $\alpha \in B_n \subset B_{n+1}$;
- (3) преобразования Фенна–Рурка $\sigma \leftrightarrow \sigma fr_n^{\pm}(i, j)$, $\sigma \in FB_n \subset FB_{n+1}$, где мы обозначили

$$\begin{aligned} fr^+(i, j) &= \Phi(\sigma^+(i, j), n\text{-кортеж}(1, \dots, 1)), \\ fr^-(i, j) &= \Phi(\sigma^-(i, j), n\text{-кортеж}(-1, \dots, -1)), \\ \sigma^+(i, j) &= \alpha(\sigma_n^2)(\sigma_{n-1}\sigma_n^2\sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_{n-i-j+2} \cdots \sigma_n^2 \cdots \sigma_{n-i-j+2})\beta, \\ \sigma^-(i, j) &= \alpha(\sigma_n^{-2})(\sigma_{n-1}\sigma_n^2\sigma_{n-1}) \cdots (\sigma_{n-i-j+2}^{-1} \cdots \sigma_n^{-2} \cdots \sigma_{n-i-j+2}^{-1})\beta, \\ \alpha &= (\sigma_n \cdots \sigma_{n-j+1})(\sigma_{n-j}^{-1} \cdots \sigma_{n-i-j+1}^{-1}), \quad \beta = (\sigma_{n-i-j+1}^{-1} \cdots \sigma_{n-j}^{-1})(\sigma_{n-j+1} \cdots \sigma_n). \end{aligned}$$

Заметим, что преобразования Маркова выводят косу из подгруппы FB_n в группу всех кос B_{2n} . Преобразования Фенна–Рурка могут применяться только к оснаренным косам из FB_n .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Матвеев С. В., Фоменко А. Т. Алгоритмические и компьютерные методы в трехмерной топологии. М.: Изд-во МГУ, 1991. [2] Lu N. // Trans. Amer. Math. Soc. 1992. V. 331. P. 143–156. [3] Morton H. // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 1986. V. 99. P. 247–260. [4] Прасолов В. В., Сосинский А. Б. Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. М.: МЦНМО, 1997.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
21.07.1999