Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. А. Кузнецов, Отсутствие арбитража в модели с фрактальным броуновским движением, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm191>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.174.149.18

26 апреля 2023 г., 16:50:17

ОТСУТСТВИЕ АРБИТРАЖА В МОДЕЛИ С ФРАКТАЛЬНЫМ БРОУНОВСКИМ ДВИЖЕНИЕМ

Ю. А. КУЗНЕЦОВ

На фильтрованном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \leq T}, \mathbb{P})$ рассмотрим стандартное броуновское движение $B = (B_t)_{t \leq T}$ и фрактальное броуновское движение $B^H = (B_t^H)_{t \leq T}$ с показателем H , $0 < H \leq 1$, т.е. гауссовский процесс с непрерывными траекториями и $B_0^H = 0$, $\mathbb{E}B_t^H = 0$, $\mathbb{E}(B_t^H)^2 = t^{2H}$,

$$\text{cov}(B_t^H, B_s^H) = \frac{1}{2}(|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t-s|^{2H}).$$

При $H = 1/2$ фрактальное броуновское движение является броуновским движением. При $H = 1$ имеем $\text{Law}(B_t^1; t \leq T) = \text{Law}(\xi \cdot t; t \leq T)$, где $\xi \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

Рассмотрим фрактальную версию модели Башелье $(B(r), S(\mu))$ -рынка. Пусть для простоты $B_t \equiv 1$ ($r = 0$), $S_t = B_t^H$ ($\mu = 0$).

При $H \in (0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ процесс B^H не является семимартингалом. Поэтому в этом случае не существует мартингальной меры, и первая фундаментальная теорема финансовой математики (отсутствие арбитража эквивалентно существованию мартингальной меры) не применима.

Пусть $\pi = (\beta, \gamma)$ – портфель с капиталом

$$X_t^\pi = \beta_t + \gamma_t S_t, \quad t \leq T.$$

Предположим, что π – самофинансируемый, тогда

$$(1) \quad X_t^\pi = X_0^\pi + \int_0^t \gamma_u dS_u.$$

В формуле (1) участвует интеграл по фрактальному броуновскому движению.

Определим этот интеграл согласно [1], [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Стратегия π доставляет арбитраж, если

$$X_0^\pi = 0, \quad X_T^\pi \geq 0 \quad (\text{P-п.н.}), \quad \mathbb{P}(X_T^\pi > 0) > 0.$$

Рассмотрим смешанную модель:

$$S_t = \sigma_H B_t^H + \sigma B_t.$$

ТЕОРЕМА. В смешанной модели арбитраж отсутствует в классе всех марковских стратегий $\gamma_t = G(S_t, t)$, где $G = G(S_t, t)$ класса $C^{1,1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Не ограничивая общности, можно считать, что $\sigma_H = 1$, $\sigma = 1$. Тогда $S_t = B_t^H + B_t$. Пусть

$$\gamma_t = \frac{\partial F}{\partial x}(S_t, t).$$

По формуле Ито:

$$dF(S_t, t) = \frac{\partial F}{\partial x}(S_t, t) dS_t + \left(\frac{\partial F}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(S_t, t) \right) dt.$$

Капитал в момент времени T равен $X_T^\pi = \int_0^T \frac{\partial F}{\partial x}(S_t, t) dS_t$. Условие неотрицательности X_T^π записывается в виде

$$(2) \quad F(S_T, T) - F(0, 0) \geq \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial t}(S_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(S_t, t) \right) dt.$$

Можно считать, что $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$, и процесс B_t^H определен на Ω_1 , а B_t — на Ω_2 . Введем множества

$$A = \left\{ \omega = (\omega_1 \times \omega_2) : F(S_T, T) - F(0, 0) \geq \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial t}(S_t(\omega), t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(S_t(\omega), t) \right) dt \right\},$$

$$B = \left\{ \omega_1 : F(S_T(\omega_1 \times \omega_2), T) - F(0, 0) \geq \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial t}(S_t(\omega_1 \times \omega_2), t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(S_t(\omega_1 \times \omega_2), t) \right) dt \text{ } \mathbb{P}_2\text{-п.н.} \right\}.$$

Имеем $\mathbb{P}(A) = 1$. Тогда по теореме Фубини $\mathbb{P}_1(B) = 1$.

Зафиксируем $\omega_1 \in B$. Имеем $S_t(\omega_1 \times \omega_2) = B_t^H(\omega_1) + B_t(\omega_2)$. Положим $C_t = B_t^H(\omega_1)$ при фиксированном ω_1 . Тогда неравенство

$$(3) \quad F(C_T + B_T(\omega_2), T) - F(0, 0) \geq \int_0^T \left(\frac{\partial F}{\partial t}(C_t + B_t(\omega_2), t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(C_t + B_t(\omega_2), t) \right) dt$$

выполнено для почти всех ω_2 . Но это неравенство в точности означает неотрицательность капитала портфеля в обычной броуновской модели, когда $S_t = B_t(\omega_2)$ и стратегия $\gamma_t(\omega_2) = \frac{\partial F}{\partial x}(C_t + B_t(\omega_2), t)$. Известно, что в этом случае арбитража нет [2], [3], и стратегия должна быть нулевой, т.е.

$$\gamma_t(\omega_2) = \frac{\partial F}{\partial x}(C_t + B_t(\omega_2), t) = 0.$$

Итак, при фиксированном $\omega_1 \in B$ для почти всех ω_2

$$\frac{\partial F}{\partial x}(B_t^H(\omega_1) + B_t(\omega_2), t) = 0$$

для всех $0 \leq t \leq T$.

Отсюда ясно, что для всех x и t

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, t) = 0.$$

Тем самым отсутствие арбитража в смешанной модели доказано.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Lin S. J. // Stochastics Stochastics Rep. 1995. V. 55. № 1, 2. P. 121–140. [2] Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998. [3] Shiryaev A. N. On Arbitrage and Replication for Fractal Models.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
21.07.1999