Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Е. Слюсарчук, Условия существования ограниченных решений нелинейных дифференциальных уравнений, *УМН*, 1999, том 54, выпуск 4, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm193>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:10:39

УСЛОВИЯ СУЩЕСТВОВАНИЯ ОГРАНИЧЕННЫХ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В.Е. СЛЮСАРЧУК

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение, $R(f) = \{f(x) : x \in \mathbb{R}\}$ и C^0 – банахово пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций $x = x(t)$ со значениями в $\mathbb{R}$ с нормой $\|x\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|$.

Укажем необходимые и достаточные условия существования ограниченных решений дифференциального уравнения

$$(1) \quad \frac{dx}{dt} = f(x) - h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

с произвольной функцией $h = h(t) \in C^0$.

ТЕОРЕМА. Уравнение (1) для каждой функции $h = h(t) \in C^0$ имеет по крайней мере одно решение $x = x(t) \in C^0$ тогда и только тогда, когда $R(f) = \mathbb{R}$. При этом для каждого отрезка $[\alpha, \beta]$, для которого $R(f|_{[\alpha, \beta]}) = \overline{R(h)}$ и $\{f(\alpha), f(\beta)\} = \{\inf_{t \in \mathbb{R}} h(t), \sup_{t \in \mathbb{R}} h(t)\}$, найдется решение $x = x(t) \in C^0$ такое, что $R(x) \subset [\alpha, \beta]$.

Доказательство теоремы основывается на следующих леммах.

Обозначим через $\mathcal{F}$ класс всех непрерывных отображений $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, для каждого из которых $R(g) = \mathbb{R}$ и $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} |g(x)| = +\infty$, а через $\mathcal{P}_T$ (где T – положительное число) подпространство пространства C^0 , состоящее из T -периодических функций.

ЛЕММА 1. Пусть $f \in \mathcal{F}$. Тогда уравнение (1) для каждой функции $h = h(t) \in \mathcal{P}_T$ имеет по крайней мере одно решение $x = x(t) \in \mathcal{P}_T$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем такие числа $k \neq 0$ и $a > 0$, чтобы

$$(2) \quad |f(x) - kx| \leq |k|a - \|h\|, \quad \text{если } |x| \leq a,$$

и рассмотрим вполне непрерывное отображение $G: \mathcal{P}_T \rightarrow \mathcal{P}_T$, определенное равенством

$$(Gx)(t) = -\frac{k}{|k|} \int_{\{s: kt < ks\}} e^{k(t-s)} (f(x(s)) - kx(s) - h(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Нетрудно убедиться в том, что задача о существовании T -периодических решений уравнения (1) равносильна аналогичной задаче для уравнения

$$(3) \quad x(t) = (Gx)(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

на основании (2) $GSa \subset Sa$, где $Sa = \{x \in \mathcal{P}_T : \|x\| \leq a\}$. Поэтому согласно теореме Шаудера о неподвижной точке [1, с. 36] множество T -периодических решений уравнения (3), а следовательно, и уравнения (1) непусто.

ЛЕММА 2. Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – непрерывное отображение, $h(t) \in \mathcal{P}_T$ и $[a, b]$, $[\alpha, \beta]$ – такие отрезки, что $R(f|_{[\alpha, \beta]}) = R(h) = [a, b]$ и $\{f(\alpha), f(\beta)\} = \{a, b\}$. Тогда уравнение (1) имеет решение $y(t) \in \mathcal{P}_T$, для которого $R(y) \subset [\alpha, \beta]$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим отображение $f^* \in \mathcal{F}$, для которого $f^*|_{[\alpha, \beta]} = f|_{[\alpha, \beta]}$ и

$$(4) \quad f^*(x) \in \mathbb{R} \setminus [a, b] \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta].$$

Согласно лемме 1 уравнение

$$(5) \quad \frac{dy}{dt} = f^*(y) - h(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

имеет решение $y(t) \in \mathcal{P}_T$, которое в некоторых точках t_1 и t_2 принимает наименьшее $y_{\min}$ и наибольшее $y_{\max}$ значения. В этих точках $dy/dt = 0$. Поэтому $\{f^*(y_{\min}), f^*(y_{\max})\} = \{h(t_1), h(t_2)\}$ и на основании (4) $\{y_{\min}, y_{\max}\} \subset [\alpha, \beta]$. Следовательно, $R(y) \subset [\alpha, \beta]$. Поскольку $f^*(x) = f(x)$ для всех $x \in [\alpha, \beta]$, то решение $y = y(t)$ уравнения (5) также является решением уравнения (1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Пусть $R(f) = \mathbb{R}$. Рассмотрим последовательность чисел $T_n > 0$ и функций $h_n(t) \in \mathcal{P}_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$, для которых $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n = +\infty$,

$$(6) \quad R(h_n) = \overline{R(h)}, \quad n \in \mathbb{N},$$

и

$$(7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq p} |h(t) - h_n(t)| = 0 \quad \forall p > 0,$$

а также отрезок $[\alpha, \beta]$, для которого $R(f|_{[\alpha, \beta]}) = \overline{R(h)}$ и $\{f(\alpha), f(\beta)\} = \{\inf_{t \in \mathbb{R}} h(t), \sup_{t \in \mathbb{R}} h(t)\}$. Согласно лемме 2 и равенствам (6) найдутся функции $x_n(t) \in \mathcal{P}_{T_n}$, $n \in \mathbb{N}$, такие, что $R(x_n) \subset [\alpha, \beta]$, $n \in \mathbb{N}$, и

$$(8) \quad x_n(t) = x_n(0) + \int_0^t (f(x_n(s)) - h_n(s)) ds, \quad k \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда $\sup\{|x'_n(t)| : n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}\} \leq \max\{|a|, b\} + \|h\|$. Следовательно, функции $x_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, не только равномерно ограничены, но и равномерно непрерывны на $\mathbb{R}$. Поэтому на основании теоремы Арцеля [2, с. 106] найдутся функция $z(t) \in C^0$ и числа $n_k > k$, $k \in \mathbb{N}$, для которых $R(z) \subset [\alpha, \beta]$ и

$$(9) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{|t| \leq p} |z(t) - x_{n_k}(t)| = 0 \quad \forall p > 0.$$

В силу (7)–(9) и непрерывности отображения f

$$z(t) = z(0) + \int_0^t (f(z(s)) - h(s)) ds, \quad t \in \mathbb{R},$$

т.е. $z(t)$ – решение уравнения (1).

Пусть $R(f) \neq \mathbb{R}$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx}{dt} = f(x) - m, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $m \in \mathbb{R} \setminus \overline{R(f)}$. Каждое решение $x(t)$ этого уравнения является неограниченным, поскольку $|x'(t)| \geq \inf\{|m - y| : y \in R(f)\} > 0$ для всех точек t из множества определения этого решения. Отсюда следует, что существование ограниченных решений уравнения (1) с произвольной функцией $h(t) \in C^0$ обеспечивает выполнение соотношения $R(f) = \mathbb{R}$, что завершает доказательство теоремы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ниренберг Л. Лекции по нелинейному функциональному анализу. М.: Мир, 1977.
- [2] Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.